



Bir İlkokul Dördüncü Sınıf Öğrencisinin Bilişsel Matematiksel Modelleme Yeterliklerinin Geliştirilmesi: Ayrıntılı Geri Bildirim*

H. Beyza CANBAZOĞLU ALBAYRAK¹, Esra BUKOVA GÜZEL²

Özet

Bu çalışmada, bir ilkokul dördüncü sınıf öğrencisinin matematiksel modelleme yeterliklerinin değerlendirilmesine yönelik sağlanan ayrıntılı geri bildirimlerin, öğrencinin modelleme yeterliklerinin gelişimine etkisini incelemek amaçlanmıştır. Araştırmada, bütüncül tek durum deseni kullanılmıştır. Araştırmada veri toplama aracı olarak göreve dayalı mülakat (task-based interview) yöntemi kullanılmıştır. İlkokul dördüncü sınıf öğrencisinin hem araştırmanın başlangıcındaki ve sonundaki düzeyini belirlemede hem araştırma sürecince öğrencinin modelleme yeterliklerinin gelişimini açıklamada Tekin Dede ve Bukova Güzel (2018) tarafından oluşturulan Modelleme Yeterlikleri Değerlendirme Rubriği (MYDR) kullanılmıştır. Araştırmanın başlangıcında öğrencinin bilişsel matematiksel modelleme yeterlikleri değerlendirildiğinde, problemi anlama, sadeleştirme, yorumlama ve doğrulama yeterliklerini sergilemede güçlükler yaşadığı belirlenmiştir. Süreç sonunda öğrencinin matematiksel modelleme yeterlikleri değerlendirildiğinde problemi anlama, sadeleştirme, matematikselleştirme, matematiksel olarak çalışma, yorumlama ve doğrulama yeterliklerinde gelişimler olduğu belirlenmiştir. Bir başka deyişle ilkokul dördüncü sınıf öğrencisine her bir matematiksel modelleme yeterliklerine yönelik sağlanan ayrıntılı geri bildirimler sayesinde öğrencinin modelleme yeterliklerinde gelişim olduğu görülmüştür.

Makale Bilgileri

Araştırma
Makalesi

Gönderim Tarihi
01/05/2023
Kabul Tarihi
29/07/2024
Yayın Tarihi
23/09/2024

Anahtar Kelimeler

Bilişsel
matematiksel
modelleme,
ilkokul,
Modelleme
yeterliği
geliştirme,
Matematiksel
modelleme

¹ Çukurova Üniversitesi, 0000-0001-5596-5019, beyza.cnbzgl0@gmail.com

² Dokuz Eylül Üniversitesi, 0000-0001-7571-1374, esra.bukova@gmail.com

Atıf:

Canbazoğlu Albayrak, H. B. ve Bukova Güzel, E. (2024). Bir ilkokul dördüncü sınıf öğrencisinin bilişsel matematiksel modelleme yeterliklerinin geliştirilmesi: Ayrıntılı geri bildirim. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi [PAÜEFD]*, 62, 29-71. <https://doi.org/10.9779/pauefd.1290603>

Giriş

Matematiksel modelleme, gerçek dünyadaki bir durumu matematiksel hale getirme, matematiksel sonucunu elde etme ve elde edilen matematiksel sonucu gerçek yaşam bağlamında yorumlayarak gerçekleşen döngüsel bir süreçtir (Lesh ve Doerr, 2003). Matematiksel Modelleme Eğitiminde Değerlendirme ve Öğretim Yönergeleri (Guidelines for Assessment & Instruction in Mathematical Modeling Education [GAIMME], 2016) raporuna göre, matematiksel modelleme görevleri her zaman basit veya kesin bir çözüm ile sonuçlanmamaktadır (Bliss ve Libertini, 2016). Bu nedenle, matematiksel modellemede, değerlendirme zorlayıcıdır ancak süreci destekleyici önemli bir unsur olduğu da unutulmamalıdır. Asempapa ve Foley (2018) matematiksel modellemede değerlendirmenin rolünün kritik ve karmaşık olduğuna değinerek, öğretmenlerin ve matematik eğitimcilerinin ortak sorusunun, matematiksel modelleme sürecinin nasıl değerlendirileceği olduğunu belirtmektedirler.

Matematiksel modellemede değerlendirmenin neden yapılması gerektiği ve nasıl yapılabileceğini şekillendirmek için değerlendirmenin amaçlarını gözden geçirmek gerekir. Ulusal Araştırma Konseyi'ne (National Research Council [NRC], 2001) göre, üç temel değerlendirme amacı bulunmaktadır: (a) öğrenci öğrenmesine yardımcı olma (biçimlendirici değerlendirme), (b) bireysel başarıyı ölçme (özetleyici değerlendirme) ve (c) program değerlendirme. Matematiksel modellemede değerlendirmeyi bu amaçlarla ele aldığımızda, biçimlendirici değerlendirmenin, öğrencilerin modelleme yeterliklerini geliştirme için katkı sağlayacağını söyleyebiliriz. Biçimlendirici değerlendirme, öğretme ve öğrenme faaliyetlerini değiştirmek için geri bildirim olarak kullanılacak bilgiler sağlamaktadır (Asempapa ve Foley, 2018; Black ve Wiliam 1998). Biçimlendirici değerlendirme kullanan öğretmenlerle ilgili yapılan araştırmalarda, öğrenci başarısında artışlara neden olan değişiklikler olduğu vurgulanmaktadır (Black ve diğerleri, 2004). Çünkü biçimlendirici değerlendirmeler, öğrenmeyi desteklemektedir. Böylece öğretmenler ve öğrenciler, bireyin ilerleme düzeyini ve gelişiminin nasıl olduğunu belirleyebilmektedir. Bu kapsamda biçimlendirici değerlendirme türlerinden olan geri bildirim, öne çıkmaktadır. Geri bildirim, öğrenci öğrenmesini geliştirmek amacıyla öğrencinin düşüncesini veya davranışını değiştirmeyi amaçlayan ve bu doğrultuda öğrenciye iletilen bilgiler olarak tanımlanmaktadır (Shute, 2008). Model oluşturma etkinliklerinin karmaşık yapısı ve süreç içerisinde öğrenciden beklenen yüksek bilişsel görev talepleri nedeniyle öğrencilere hem süreç içerisinde hem de süreç sonrasındaki çözümlerine yönelik biçimlendirici geri bildirimler verilmesi gerektiği vurgulanmaktadır (Asempapa ve Foley, 2018; Besser ve diğerleri, 2013; Besser ve diğerleri, 2015; Diefes-Dux ve diğerleri, 2012; Levy ve diğerleri,

2016; Wake, 2010). Bu anlamda modelleme sürecinde geri bildirimlerin sistematik bir bütünlük içerisinde nasıl sağlanabileceği ve öğrencilerin modelleme yeterliklerinin gelişimine katkı sağlayıp sağlamadığı, araştırılması gereken bir husus olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu doğrultuda bu çalışma, ilkökul öğrencilerinin modelleme yeterliklerini geliştirmek bir başka deyişle öğrencilerin modelleme yapabilmesine yardımcı olmak için biçimlendirici değerlendirme türlerinden olan ayrıntılı geri bildirim, değerlendirme sürecine dâhil edilmesine odaklanmaktadır.

Öğrencilerin, matematiği gerçek yaşam ile ilişkilendirme becerilerini bir başka deyişle matematik okuryazarlığı becerilerini ölçmeyi hedefleyen PISA (Programme for International Student Assessment-Uluslararası Öğrenci Değerlendirme Programı) uygulamaları, matematiksel model ve modelleme süreçlerini önemle vurgulamaktadır. En son gerçekleştirilen PISA 2022 sonuçlarına göre öğrencilerin matematiksel modeller oluşturdukları ve elde ettikleri sonuçları gerçek yaşam bağlamında değerlendirdikleri “üst performans düzeyinde (beşinci ve altıncı yeterlik düzeyleri)” yer alan ülkemizdeki öğrenci oranları %5.4 olarak ifade edilmiştir (Organisation for Economic Co-operation and Development [OECD], 2023a, 2023b). Bu oranların, üst performans düzeyi için OECD ortalamasının (%9) altında yer aldığı görülmektedir (OECD, 2023a, 2023b). Bu sebeple öğrencileri ilkökul döneminden itibaren gerçek yaşam problem durumlarını içeren matematiksel modelleme etkinlikleri ile karşı karşıya getirmenin önemi ortaya çıkmaktadır (Carlson ve diğerleri, 2016; English, 2012; Watters ve diğerleri, 2004). İlkokul matematik dersi öğretim programında (Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], 2018) öğrencilerin matematik okuryazarlığını geliştirmeye yönelik amaç ve kazanımlar yer almasına rağmen çoğu matematik veya sınıf öğretmeni nadiren matematik derslerini, öğrencilerin günlük yaşamıyla ilişkilendirmeyi denemektedir (Steen ve diğerleri, 2007). Bu nedenle öğrenciler, matematik ve günlük yaşam arasında bağlantı kuramamakta (Tran ve Dougherty, 2014) ve öğrendikleri bilgileri karşılaştıkları problem durumlarına uygulama fırsatını kaçırmaktadırlar (Verschaffel ve diğerleri, 1999). Bu bağlamda matematiksel modelleme öğrencilerin, matematiğin dünyaya katılımını ve anlayışını nasıl desteklediğini görmelerine yardımcı olarak matematik okuryazarlığını geliştirmektedir (Carlson ve diğerleri, 2016; Şahin, 2019).

İlkokul dönemi çocukları ile matematiksel modellemeye ilişkin sınırlı çalışmaya ulaşılmıştır (Canbazoğlu ve Tarım, 2021; Canbazoğlu-Albayrak ve Tarım, 2023; Şahin, 2019; Şahin ve Eraslan, 2016, 2017; Ulu, 2017). Canbazoğlu ve Tarım (2021) tarafından yapılan çalışmada, ilkökulda model oluşturma etkinliklerinin uygulanabilmesi için bir öğretim süreci ortaya koyulmuş ve bir model oluşturma etkinliğinin uygulama süreci ele alınmıştır. Canbazoğlu-Albayrak ve Tarım (2023),

Şahin (2019), Şahin ve Eraslan (2016, 2017) ile Ulu (2017) tarafından yapılan çalışmalarda ise model oluşturma etkinliği ile çalışan ilkökul üçüncü ve dördüncü sınıf öğrencilerinin matematiksel modelleme süreçleri ve karşılaştıkları güçlükler ortaya koyulmaya çalışılmıştır. İlkokul dönemine ilişkin sınırlı sayıda yapılan araştırmalar incelendiğinde, çalışmaların odak noktasının modelleme süreci ve bu süreçte yaşanan güçlükler olduğu ortaya çıkmaktadır. Bu çalışmalarda (Canbazoğlu-Albayrak ve Tarım, 2023; Şahin, 2019; Şahin ve Eraslan, 2016, 2017; Ulu, 2017) ilkökul öğrencilerinin problemi anlama, matematikselleştirme, gerçek sonuçlar elde etme, yorumlama ve doğrulama süreçlerinde zorluklar yaşadığı sonucuna ulaşılmıştır. Yapılan çalışmalar sonucunda ilkökul öğrencilerinin matematiksel modelleme süreçlerinde ve yeterliklerinde güçlükler yaşadıkları belirlenmiş olmasına rağmen, ilkökul öğrencilerinin belirlenen bu gibi güçlüklerin farkında olup olmadıkları, eksikliklerinin nedenleri ve bu eksiklikleri giderme üzerine tartışılmadığı ortaya çıkmıştır. Bir başka deyişle ilkökul öğrencilerinin modelleme yeterliklerini geliştirmeye yönelik çalışma/lara rastlanılmamıştır. Ayrıca ayrıntılı geri bildirim bireyin öğrenmesinde ve performansı üzerinde pek çok etkisi olmasına rağmen, ilkökul öğrencilerinin matematiksel modelleme yeterliklerinin geliştirilmesi sürecinde ayrıntılı geri bildirim etkisinin incelendiği ulusal ve uluslararası alanyazında herhangi bir çalışmaya rastlanılmamıştır. Bu eksiklik göz önüne alındığında matematiksel modelleme etkinliklerinin ilkökul döneminde uygulanmasının yaygınlaştırılması, sınıf öğretmenlerine öğrenme-öğretme sürecinde yararlanabilecekleri örnek uygulamaların sağlanması ve ilkökul öğrencilerinin modelleme yeterliklerinin gelişimine yönelik çalışmaların yapılması ile alanyazındaki önemli bir eksikliği gidereceği düşünülmektedir. Bu doğrultuda bu çalışmada, bir ilkökul dördüncü sınıf öğrencisinin matematiksel modelleme yeterliklerinin değerlendirilmesine yönelik sağlanan ayrıntılı geri bildirimlerin, öğrencinin modelleme yeterliklerinin gelişimine etkisini incelemek amaçlanmıştır. Bu amaç doğrultusunda aşağıdaki sorulara yanıt aranmıştır:

1. Bir ilkökul dördüncü sınıf öğrencisinin modelleme yeterliklerinin değerlendirilmesine yönelik sağlanan ayrıntılı geri bildirimlerin, öğrencinin modelleme yeterliklerinin gelişimine etkisi nasıldır?
2. Süreç boyunca sağlanan ayrıntılı geri bildirimlerin içeriği nasıldır?

Teorik Çerçeve

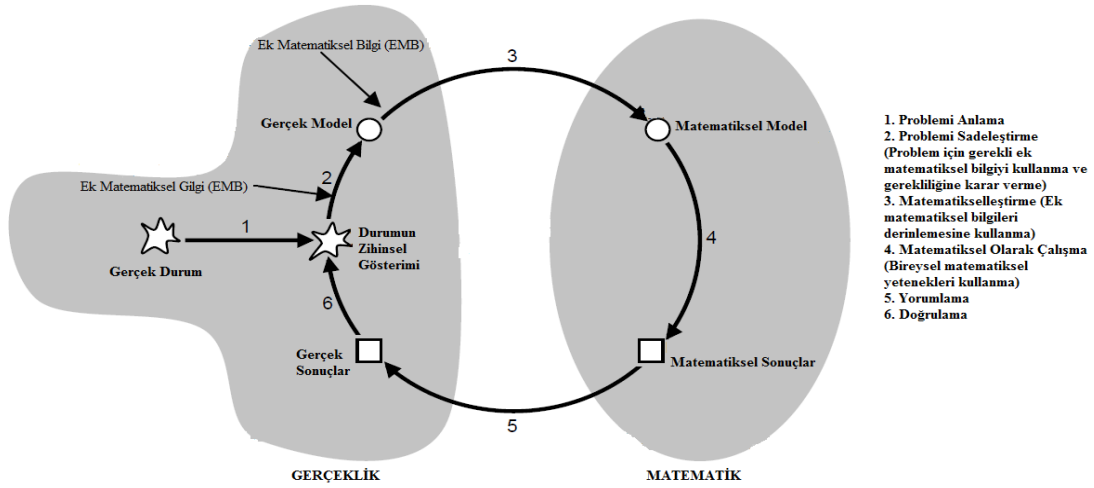
Bilişsel Matematiksel Modelleme Yeterliğinin Değerlendirilmesi

Bilişsel modelleme, matematiksel modelleme etkinliklerinin çözümü sırasında öğrencilerin zihinlerinde oluşan bilişsel yapıların ve süreçlerin neler olduğunu açıklamaya çalışan matematiksel modelleme

perspektiflerinden biridir (Kaiser ve Srirman, 2006). Matematiksel modelleme yeterliği, belirli bir bağlamda bireyin kendiliğinden bağımsız ve içselleştirmiş bir biçimde, matematiksel modelleme sürecinin tüm yönlerini yürütebilmesidir (Blomhøj ve Jensen, 2003). Matematiksel modelleme yeterliklerinin belirlenmesinde, modelleme sürecini açıklayan modelleme döngüleri ele alınmaktadır (Blomhoj, 2011). Bu çalışmada ilkokul öğrencisinin matematiksel modelleme yeterliklerini incelemek amacıyla Borromeo Ferri'nin (2006) matematiksel modelleme süreci kullanılmıştır (Bkz. Şekil 1).

Şekil 1

Bilişsel Modelleme Yaklaşımına Ait Modelleme Döngüsü (Borromeo Ferri, 2006)



Modelleme döngüsünde bilişsel modelleme yeterlikleri problemi anlama, problemi sadeleştirme, matematikselleştirme, matematiksel olarak çalışma, yorumlama ve doğrulama yeterliklerinden oluşmaktadır. Modelleme sürecinde ilk olarak öğrenciler tarafından problem durumu anlamlandırılmakta ve durumun zihinsel bir gösterimi yapılandırılmaktadır (Borromeo Ferri, 2006). Durumun zihinsel gösteriminden gerçek modele geçişte, verilen durum sadeleştirilmekte, yapılandırılmakta, daha net bir duruma getirilmekte ve problemin çözümü için varsayımlar ve gerekenler yapılmaktadır (Borromeo Ferri, 2006). Öğrencilerin sözlü ifadelerine dayalı olarak oluşturulan gerçek modelden matematiksel modele geçiş, matematikselleştirme basamağı olarak adlandırılmaktadır (Borromeo Ferri, 2006). Öğrenciler, şekiller, grafikler ve denklemler aracılığıyla kendi gösterimlerini oluşturarak matematiksel model/ler ortaya çıkarmaktadırlar (Borromeo Ferri, 2006). Matematiksel olarak çalışma (aritmetik işlemleri yapma, tablo okuma, vb.) sürecinde, öğrenciler modelleme yeterliklerini kullanarak modellerin çözümünü

gerçekleştirmekte ve matematiksel sonuçlar elde etmektedir (Borromeo Ferri, 2006). Sonuçların yorumlanması süreci, matematiksel sonuçlardan gerçek sonuçlara geçilmesini gerektirmektedir (Borromeo Ferri, 2006). Gerçek sonuçların elde edilmesinden sonra öğrenciler gerçek yaşam deneyimlerinden yararlanarak, gerçek sonuçlar ile kendi zihinsel gösterimleri arasındaki uyumun kontrol edilmesi bağlamında doğrulama süreci gerçekleşmektedir (Borromeo Ferri, 2006).

Öğrencinin model oluşturma etkinliği süresince gerçekleştirdiği eylemler bu basamaklara göre değerlendirilmiş ve bu süreçteki yeterlikleri geri bildirim odak noktasını oluşturmuştur. Bir başka deyişle öğrenciye modelleme döngüsündeki her bir yeterlik basamağına göre süreç içerisinde ve sonrasında ayrıntılı geri bildirim verilerek, bilişsel modelleme yeterliklerindeki eksiklerinin farkına varmasına ve geliştirilmesine çalışılmıştır. Bu doğrultuda modelleme döngüsünde bilişsel modelleme yeterlikleri problemi anlama, problemi sadeleştirme, matematikselleştirme, matematiksel olarak çalışma, yorumlama ve doğrulama yeterliklerinden oluşmaktadır.

Ayrıntılı Geri Bildirim

Biçimlendirici değerlendirme türlerinden olan geri bildirim, öğretmen tarafından öğrencinin performansı veya kavrayışıyla ilgili bilgiler ortaya çıkarma olarak tanımlanmaktadır (Hattie ve Timperley, 2007). Bu bağlamda geri bildirim, bireyin performansının bir sonucudur (Diefes-Dux ve diğerleri, 2012). Geri bildirim, bireyin öğrenme süreci ve performansı üzerinde önemli bir rol oynadığı ortaya çıkmaktadır (Besser ve diğerleri, 2013; Besser ve diğerleri, 2015; Greefrath ve Vorhölter, 2016; Shute, 2008; Wake, 2010). Geri bildirim temel amacı, matematiksel içerik alanlarında (örneğin, sayılar ve işlemler, geometri, ölçme, veri işleme) veya genel becerilerde (örneğin, problem çözme, modelleme, aritmetik işlemler yapma) öğrenci bilgilerini, becerilerini ve anlayışlarını arttırmak olarak düşünülmektedir (Black ve Wiliam, 1998).

Kulhavy ve Stock (1989) etkili geri bildirim öğrenciye, doğrulama ve ayrıntılı geri bildirim (detaylandırma) olmak üzere iki tür bilgi sağladığını belirtmiştir. Doğrulama, bir cevabın doğru olup olmadığı ile ilgili öğrenciye verilen geribildirimdir. Ayrıntılı geri bildirim, geri bildirim bilgilendirici yönünü vurgularken, öğrenciyi doğru bir cevaba yönlendirmek için ilgili ipuçları sağlamaktadır. Örneğin ayrıntılı geri bildirim; konuyu ele alabilir, yanıtı ele alabilir, belirli hataları tartışabilir, çalışılmış örnekler verebilir veya öğrenciye rehberlik sağlayabilir (Shute, 2008). Ayrıca ayrıntılı geribildirim genellikle öğrencinin söylemleri, eylemleri ve cevapları doğrultusunda açıklamalar yapma ve nasıl olması gerektiği hakkında öğrenciye bilgi sağlamaktadır. Bu tür söylemlere, eylemlere ve cevaplara özgü geri

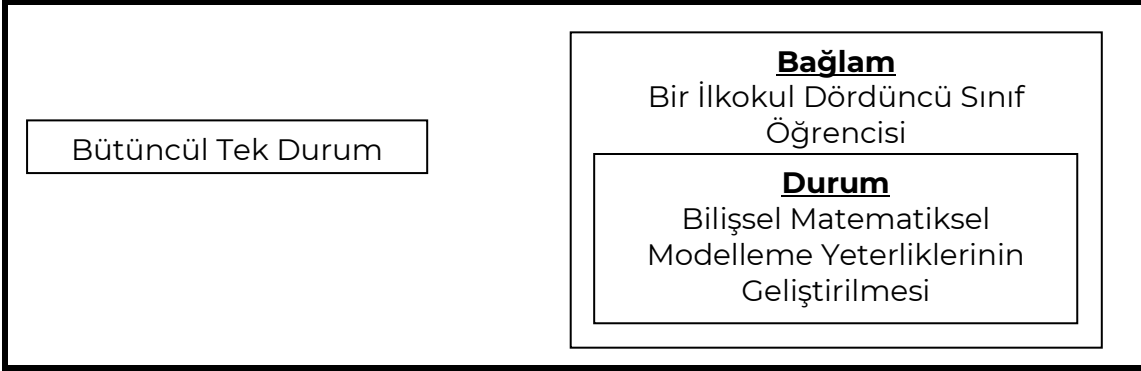
bildirim, ğrenci başarsını, özellikle öğrenme verimliliğini, doğrulama geri bildirim türünden daha fazla artırdığı yönünde çalışmalar bulunmaktadır (Corbett ve Anderson, 2001; Mory, 2004; Shute ve diğerleri, 2007). Ayrıca hedefe yönelik geri bildirimler, öğrencilerin öğrenme ve görev performanslarını artırmaktadır (Asempapa ve Foley, 2018; Diefes-Dux ve diğerleri, 2012; Greefrath ve Vorhölter, 2016; Shute, 2008; Wake, 2010). Bu doğrultuda bu çalışmada, model oluşturma etkinliği süresince ve sonrasında öğrenciye bilişsel modelleme yeterliklerine göre ayrıntılı geri bildirimler sağlanmıştır. Bu geri bildirimler, öğrenciden beklenen bilişsel modelleme yeterliğini göstermediğinde veya eksik gösterdiğinde o alandaki yeterliğini ortaya çıkarmaya ve kazandırmaya yönelik olmuştur.

Yöntem

Araştırmada bir ilkokul dördüncü sınıf öğrencisinin matematiksel modelleme yeterliklerinin değerlendirilmesine yönelik ayrıntılı geri bildirimlerin, öğrencinin modelleme yeterliklerinin gelişimini nasıl etkilediği sorusuna yanıt arandığı için bütüncül tek durum deseni tercih edilmiştir. Bütüncül tek durum deseni, daha önce hiç kimsenin çalışmadığı veya ulaşamadığı durumlar, bütüncül tek durum deseni kullanılarak çalışabilir (Yin, 2017). Böyle durumların çalışılması ile birlikte daha sonraki araştırmacılar için daha önce bilinmeyen belirli bir konunun görünür olması ve daha sonra yapılacak araştırmalara temel oluşturması ya da yol göstermesi açısından önemlidir (Yıldırım ve şimşek, 2016). İlkokul ğrencilerinin bilişsel matematiksel modelleme yeterliklerinin geliştirilmesine yönelik daha önce yapılmış bir çalışmanın bulunmaması, elde edilecek dokümanlar ile daha sonraki çalışmalara yol gösterici olması açısından araştırmada, bütüncül tek durum deseni kullanılmıştır. şekil 2'de görüldüğü gibi bağlam olarak "bir ilkokul dördüncü sınıf ğrencisi", durum olarak "bilişsel matematiksel modelleme yeterliklerinin geliştirilmesi" ele alınmıştır. Son olarak araştırmanın etik gerekleri doğrultusunda ilgili niversitenin etik komisyonunun 13.07.2020 tarihli 16/1 sayılı kararı ile alınan izinle araştırma gerçekleştirilmiştir.

Şekil 2

Araştırmanın Bütüncül Tek Durum Deseni Modeli (Yin'den, 2017, s. 8 uyarlanarak görselleştirilmiştir.)



Katılımcı

Araştırma 2020-2021 eğitim öğretim yılında gerçekleştirilmiştir. Katılımcı, Türkiye'nin güneyinde yer alan ve orta sosyo-ekonomik düzeydeki bir devlet okulunda öğrenim gören ilkökul dördüncü sınıf öğrencisidir. Devlet okulunun belirlenmesi sürecinde tipik durum örnekleme kullanılmıştır. Bu şekilde sıra dışı olmayan ortalama (Yamane, 2009) tipik bir okul belirlenmiştir. Katılımcının belirlenmesinde ise ölçüt örnekleme yöntemi kullanılmıştır. Bu çalışmada ölçüt olarak, model oluşturma etkinlikleri ile deneyimi olmayan bir öğrenci ile çalışılmıştır. Öğrencinin matematik başarısı ise ortalama düzeydedir. Bu şekilde genel bir durum yansıtılmaya çalışılmıştır. Veri toplama süreci 2020 yılında gerçekleştirilmiştir. Bu zaman diliminde pandeminin yeni ortaya çıkması ve diğer öğrencilerin yüz yüze görüşme sürecindeki endişeleri sebebiyle ebeveyni ve çocuğu gönüllü olan bir öğrenci ile çalışılmıştır.

Katılımcının, gerçek kimliğinin deşifre edilmemesi için kod ad olarak "Ö" harfi kullanılmıştır. Ö, 10 yaşında bir kız öğrencidir. Okul öncesi eğitim almıştır. Okul sonrası öğrenim gördüğü okulda etüt saatine katılmaktadır. Etüt saatine katılmasındaki amaç, anne ve babası çalıştığı için okulun bitiş saatinde onu okuldan alamamasıdır. Bir başka deyişle öğrencinin herhangi bir başarısız olduğu ders bulunmamaktadır. Etüt saatinde çoğunlukla ödevlerini yapma, ders tekrarı gibi etkinlikler yapılmaktadır. Son olarak öğrencinin matematik dersi akademik başarısı iyi durumdadır.

Veri Toplama Araçları

Araştırmada, matematik eğitimi nitel araştırmalarında bir bireyin veya bir grup öğrencinin mevcut ve gelişmekte olan matematiksel bilgi ve problem çözme davranışları hakkında bilgi edinmek için kullanılan göreve dayalı mülakat (task-based interview) yöntemi kullanılmıştır.

Bir klinik mülakat biçimi olan göreve dayalı mülakat, bireyin bir görev ortamı ile etkileşime girebileceği şekilde tasarlanmaktadır (Goldin, 2000). Bu doğrultuda bu çalışmada, öğrenciye model oluşturma etkinlikleri verilerek bir görev üzerinde çalışması sağlanmış, öğrencinin modelleme yeterliği ve gelişimi belirlenmeye çalışılmıştır. Ayrıca öğrencinin tüm modelleme süreçleri, ses kayıt cihazı ve video kamera ile kayıt altına alınmıştır. Video ve ses kaydının neden alındığı öğrenciye ilk uygulamada açıklanmış ve öğrenci videodan olumsuz anlamda etkilenmemiştir.

Göreve dayalı mülakat sürecinde *Restaurant* (Doerr ve English, 2003), *Elmalı Turta* (Tekin Dede, 2015) ve *Okulda Zaman* (Maaß ve Mischo, 2011) problemleri, ön ölçüm ve son ölçüm süreçlerinde kullanılmıştır. Asıl uygulama sürecinde ise *Fasulye Problemi* (English ve Watters, 2005), *Akaryakıt İstasyonu* (Tekin Dede, 2015) ve *Saman Balyası* (Tekin Dede, 2015) kullanılmıştır. Kullanılan matematiksel modelleme problemlerinin ilgili olduğu öğrenme alanları (MEB, 2018) Tablo 1'de sunulmuştur. Ayrıca uygulanan matematiksel modelleme problemleri, Ek A'da sunulmuştur.

Tablo 1

Matematiksel Modelleme Problemlerinin Öğrenme Alanları

Uygulama Süreci	Matematiksel Modelleme Problemleri	Öğrenme Alanları
Ön Ölçüm ve Son Ölçüm	Restaurant	Doğal Sayılarla Toplama İşlemi Veri Toplama ve Değerlendirme
	Elmalı Turta	Doğal Sayılarla Toplama ve Çarpma İşlemi
	Okulda Zaman	Zaman Ölçme
Asıl Uygulama	Fasulye Problemi	Doğal Sayılarla Toplama İşlemi Veri Toplama ve Değerlendirme
	Akaryakıt İstasyonu	Doğal Sayılarla Toplama ve Çarpma İşlemi
	Saman Balyası	Doğal Sayılarla Çarpma İşlemi Uzunluk Ölçme

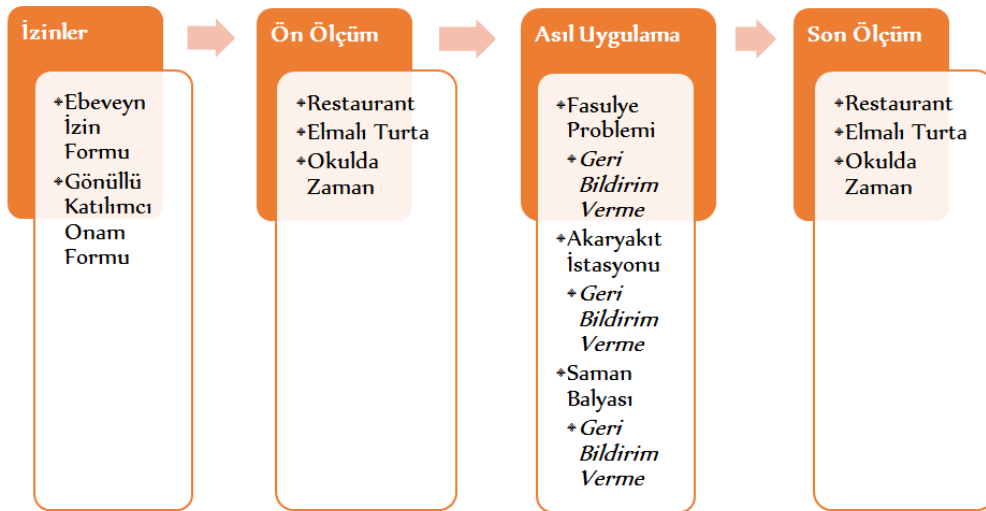
Veri Toplama Süreci

İlkokul dördüncü sınıf öğrencisinin matematiksel modelleme yeterliklerinin gelişimini belirleyebilmek için üç farklı model oluşturma etkinliği (*Restaurant*, *Elmalı Turta* ve *Okulda Zaman*) ön ölçüm ve son ölçüm olarak sürecin başında ve sonunda kullanılmıştır. Ön ölçüm ve

son ölçüm sürecinde öğrenciden, belirlenen üç farklı model oluşturma etkinliğini çözmesi istenmiştir. Ön ölçüm süreci tamamlandıktan sonra asıl uygulama sürecine geçilmiştir. Asıl uygulama bir başka deyişle öğrenciye geri bildirimlerin sağlandığı süreçte öğrencinin, her hafta bir model oluşturma etkinliği üzerinde çalışması sağlanmış ve toplamda üç farklı model oluşturma etkinliği (*Fasulye Problemi*, *Akaryakıt İstasyonu* ve *Saman Balyası*) ile üç haftalık asıl uygulama süreci tamamlanmıştır (Bkz. Şekil 3). Beş haftalık veri toplama süreci, ders dışı bir etkinlik olarak birinci araştırmacı tarafından Çukurova Üniversitesi'nin Eğitim Fakültesi toplantı salonunda gerçekleştirilmiştir. Öğrenciye matematiksel modelleme problemlerini çözmesi için Carlson ve diğerlerinin (2003) önerdiği gibi süre sınırlaması olmadan çözmesi istenmiştir. Her bir etkinlik ortalama 45-60 dakika sürede gerçekleştirilmiştir.

Şekil 3

Veri Toplama Süreci



Uygulama süresince bilişsel modelleme döngüsüne göre öğrencinin problemi nasıl anladığını, varsayımlarını nasıl oluşturduğunu, nasıl modeller oluşturacağını ve oluşturduğu modelleri nasıl çözeceğini, bulduğu sonucu nasıl yorumlayacağını ve doğrulayacağını ifade etmesi istenerek, söylemleri doğrultusunda nasıl ilerlediğine dair öğrenciye ayrıntılı geri bildirimler verilmiştir. Ardından her bir süreç sonunda, öğrenci çözümünü tamamladıktan sonra yazılı çözüm kâğıdı araştırmacı tarafından alınmıştır. Daha sonra öğrencinin yazılı çözüm kâğıdı, araştırmacılar tarafından Borromeo Ferri'nin (2006) çalışmasındaki modelleme sürecine göre değerlendirilerek, öğrenciye bir sonraki çalışma başlamadan iki gün önce birinci araştırmacı tarafından ayrıntılı geri bildirimler sağlanmıştır. Bu sayede bilişsel modelleme yeterlikleri doğrultusunda süreç içerisinde ve sonrasında

öğrencinin modelleme yeterliklerinin farkına varması ve geri bildirim sağlanan modelleme yeterlik alanındaki gelişimi sağlanmaya çalışılmıştır. Bu şekilde uygulanan etkinliklerle birlikte beş haftalık veri toplama süreci tamamlanmıştır.

Veri Analizi

İlkokul dördüncü sınıf öğrencisinin hem araştırmanın başlangıcındaki ve sonundaki düzeyini belirlemede hem araştırma sürecince öğrencinin modelleme yeterliklerinin gelişimini açıklamada Tekin Dede ve Bukova Güzel (2018) tarafından oluşturulan Modelleme Yeterlikleri Değerlendirme Rubriği (MYDR) kullanılmıştır. MYDR'nin boyutları, Borromeo Ferri'nin (2006) çalışmasındaki "problemi anlama, sadeleştirme, matematikselleştirme, matematiksel olarak çalışma, yorumlama, doğrulama" modelleme yeterliklerinden oluşmaktadır. MYDR'den en fazla 25 puan alınırken, en az 0 puan alınabilmektedir. Bu doğrultuda değerlendirme sonucunda öğrenci yeterlik düzeyleri 0-6 puan arası için "*modelleme yeterliğine sahip değil*"; 7-12 puan arası için "*bir ölçüde modelleme yeterliğine sahip*"; 13-21 puan arası için "*kabul edilebilir ölçüde modelleme yeterliğine sahip*" ve 22-25 puan arası için "*üst düzey modelleme yeterliğine sahip*" olarak değerlendirilmiştir (Tekin Dede ve Bukova Güzel, 2018). Bununla birlikte MYDR'nin geçerlik ve güvenilirlik çalışmaları için Miles ve Huberman'ın (2016) uyum yüzdesi hesaplamasından yararlanılmıştır. Geçerlik ve güvenilirlik çalışmaları sonucunda uyum yüzdesi %88.8 olarak hesaplanan MYDR'nin geçerli ve güvenilir olduğuna karar verilmiştir.

MYDR ile analizler gerçekleştirilirken öğrencinin problem çözme süreci, transkriptler ve çözüm kâğıtları iki araştırmacı tarafından birlikte incelenmiştir. Verilerin analizi sürecinde kodlayıcılar arası güvenilirlik formülü (Miles ve Huberman, 2016) kullanılmış ve iki kodlayıcı arasındaki güvenilirlik % 91 olarak hesaplanmıştır. Miles ve Huberman (1994), iyi bir nitel güvenilirlik için kodlamanın güvenilirliğinin en az % 80 uyum düzeyinde olması gerektiğini belirtmektedir. Bu kapsamda kodlayıcılar arası güvenilirliğin yüksek çıktığı belirlenmiştir. Ayrıca öğrencinin hem yazılı çözüm süreci kâğıtlarından görsellere hem de görüşlerinden doğrudan alıntılara yer verilmiştir.

Bulgular

Ön Ölçüm Matematiksel Modelleme Yeterliği

Öğrenciye ilk olarak *Restaurant*, *Elmalı Turta* ve *Okulda Zaman* problemleri yazılı olarak verilmiş ve öğrencinin bu problemleri çözmesi istenerek başlangıçtaki matematiksel modelleme yeterlikleri belirlenmiştir. Öğrencinin başlangıçtaki matematiksel modelleme yeterlikleri Tablo 2'de yer almaktadır.

Tablo 2*Ön Ölçüm Matematiksel Modelleme Yeterliği*

Düzeyler	Model Oluşturma Etkinlikleri		
	Restaurant	Elmalı Turta	Okulda Zaman
Problemi Anlama	2	0	1
Problemi Sadeleştirme	1	2	1
Matematikselleştirme	4	0	0
Matematiksel Olarak Çalışma	4	0	0
Yorumlama	3	2	2
Doğrulama	0	0	0
Toplam	14	4	4

İlkokul dördüncü sınıf öğrencisinin ön ölçüm bilişsel modelleme yeterlik düzeyi değerlendirildiğinde, *Restaurant* probleminden 14 puan alarak “*kabul edilebilir ölçüde modelleme yeterliğine sahip.*”; *Elmalı Turta* ve *Okulda Zaman* problemlerinden 4 puan alarak “*modelleme yeterliğine sahip değil.*” olarak belirlenmiştir.

Ayrıntılı Geri Bildirimlerin Sağlandığı Matematiksel Modelleme Süreci

Ön ölçüm sürecinden sonra *Fasulye Problemi*, *Akaryakıt İstasyonu* ve *Saman Balyası* problemleri ile ayrıntılı geri bildirimlerin sağlandığı öğrencinin modelleme yeterliliği gelişimi ortaya koyulmuştur. Bu doğrultuda öğrencinin her bir model oluşturma etkinliği sürecindeki modelleme yeterlikleri, ayrı ayrı ele alınarak bütünsel biçimde sunulmuştur.

“Fasulye Problemi” Matematiksel Modelleme Yeterliği Süreci

Tablo 3’te öğrencinin ilk etkinlik olarak gerçekleştirilen *Fasulye* problemindeki matematiksel modelleme yeterliklerine ilişkin düzeylerine ve bu düzeyler doğrultusunda aldığı puanlara yer verilmiştir.

Tablo 3*“Fasulye Problemi” Modelleme Yeterliği Süreci*

Düzeyler	Fasulye Problemi Soru 1	Fasulye Problemi Soru 2
Problemi Anlama	2	0
Problemi Sadeleştirme	2	0
Matematikselleştirme	2	0
Matematiksel Olarak Çalışma	4	0
Yorumlama	3	0
Doğrulama	0	0

Tablo 3*“Fasulye Problemi” Modelleme Yeterliği Süreci (devam)*

Toplam	13	0
---------------	-----------	----------

Tablo 3’te görüldüğü gibi öğrenci her iki problem bağlamında değerlendirildiğinde toplamda 13 puan alarak “*modelleme yeterliğine sahip değil.*” olarak değerlendirilmiştir. Fasulye probleminin birinci sorusunda öğrencinin, problemi anladığını gösteren ifadeler yer verdiği ancak verilenleri ve istenenleri belirleme sürecinde gereksiz değişkenleri de ele aldığı belirlenmiştir. Öğrenci, problemde sadece onuncu haftanın verilerini kullanarak matematiksel modele ulaşmak yerine üç ayrı haftanın verilerini kullanarak matematiksel modele ulaşmaya çalışmıştır. Öğrenci, problemde iki farklı fasulye yetiştirme koşulu olduğunu ve bu koşullar altındaki her haftanın ağırlıklarını kullanarak problemi çözeceğini ifade ederek bir ölçüde kabul edilebilir bir varsayımda bulunduğu görülmüştür.

Araştırmacı: *Ne düşünüyorsun?*

Ö: *Şimdi iki tane fasulye yetiştirme koşulu var. Bunlardan birini kullanarak en iyi fasulyeyi yetiştirmeye çalışıyorlar. Hangisi olduğunu verileri kullanarak bulmaya çalışacağım.*

Araştırmacı: *Şimdi ne yapacaksın? Ne düşünüyorsun?*

Ö: *Şimdi hangisinin daha ağır olduğunu mu bulmaya çalışıyoruz?*

Araştırmacı: *Ne diyordu soruda?*

Ö: *Burada kg yazıyor kilogram yazdığı için ağırlığı bulacağım.*

Araştırmacı: *Sence bunu nasıl bulabilirsin?*

Ö: *Şimdi hepsini teker teker her sırayı toplayacağım. Sıra bir, sıra iki, sıra üç, sıra dörtteki ağırlıklarının hepsini toplayacağım. Sonra karşılaştırma yapacağım.*

Matematikselleştirme sürecinde öğrencinin, bir ölçüde kabul edilebilir varsayımlara dayalı doğru matematiksel modelleri oluşturduğu ve oluşturduğu matematiksel modelleri kullanarak doğru matematiksel çözüme ulaştığı böylece matematiksel olarak çalışma sürecini gerçekleştirdiği belirlenmiştir. Bu süreçte öğrenci, fasulyelerin gün ışığında ve gölgedeki her haftalık ağırlığını toplayarak hesaplamalar yapmış ve karşılaştırma yaparak gün ışığının daha fazla ürün verdiğini ifade etmiştir.

Araştırmacı: *Bu bulduğun sonuçlar hangisi için?*

belirlenmiştir. Problemden haftalar arasındaki ağırlıklara göre bir örüntü bulması gerekirken, öğrencinin on ikinci hafta ile onuncu hafta arasındaki farktan yola çıkarak bir çözüm yolu bulmaya çalıştığı görülmüştür. Ancak öğrenci, bu farkın her hafta için geçerli olmadığını fark ettiği ve nasıl çözeceğini bulamadığı için problemi çözemeyeceğini söylemesi ile süreç tamamlanmıştır.

Araştırmacı: *İkinci sorumuz da ne diyor?*

Ö: *“Gün ışığında ve gölgede fasulyelerin 12. hafta sonunda ağırlıklarını tahmin ediniz ve bu tahmini nasıl yaptığınızı Ali Amcaya bir mektupla açıklayınız.” Şimdi öğretmenim hepsi iki farklı oluyor. Mesela gün ışığında 13'e, 2 eklersem Sıra 1'i bulabilirim.*

Araştırmacı: *Niye 13'e, 2 ekliyorsun?*

Ö: *Çünkü 10. haftada böyle olmuş. Bize 12. haftayı soruyor. 12 ile 10 arasındaki fark 2 olduğu için 2 ekliyorum.*

Araştırmacı: *Neden böyle düşündün?*

Ö: *Çünkü öğretmenim, Aaaa. Hayır, öyle değilmiş.*

Araştırmacı: *Ne öyle değilmiş? Öyle olmayan ne?*

Ö: *Hepsi öyle olmuyor. Nasıl bulacağımı bilmiyorum mesela öğretmenim 10. haftadan 12'yi bulmak için 2 eklerim. Çünkü 10 ile 12'nin farkı 2 ama burada 8 ile 10 farkı 2 olmasına rağmen 2 eklememiş.*

Araştırmacı: *Kaç eklemiş?*

Ö: *Hepsi değişiyor öğretmenim. Burada 1 eklemiş, burada 3 eklemiş.*

Araştırmacı: *O zaman nasıl çözebilirsin?*

Ö: *Düşünüyorum. ... Bulamadım öğretmenim.*

“Akaryakıt İstasyonu” Matematiksel Modelleme Yeterliği Süreci

Tablo 4'de öğrencinin, ikinci etkinlik olarak gerçekleştirilen *Akaryakıt İstasyonu* problemindeki matematiksel modelleme yeterliklerine ilişkin düzeylerine ve bu düzeyler doğrultusunda aldığı puanlara yer verilmiştir.

Tablo 4

“Akaryakıt İstasyonu” Modelleme Yeterliği Süreci

Düzeyleler	Akaryakıt İstasyonu
Problemi Anlama	2
Problemi Sadeleştirme	2
Matematikselleştirme	2
Matematiksel Olarak Çalışma	4
Yorumlama	3

Tablo 4*“Akaryakıt İstasyonu” Modelleme Yeterliği Süreci (devam)*

Doğrulama	6
Toplam	19

Tablo 4’te görüldüğü gibi öğrenci bu problemde 19 puan alarak *“kabul edilebilir ölçüde modelleme yeterliğine sahip.”* olarak değerlendirilmiştir. Akaryakıt istasyonu probleminde öğrencinin, problemi anladığını gösteren ifadeler yer verdiği, verilenleri ve istenenleri bir ölçüde belirleyebildiği ancak aralarında ilişki kurmada güçlük yaşadığı belirlenmiştir. Problemin çözümü için varsayımlar oluşturma sürecinde, evin yanındaki Çukurova’dan mı yakıt almak daha karlı yoksa 10 km uzaklıktaki Seyhan’a mı gitmek daha karlı bunu belirlemeye çalışmıştır. Bunu belirlerken depoda kalan yakıt miktarının ne kadar olduğunu bilmediği için bir çelişki yaşayarak bir ölçüde kabul edilebilir varsayımlarda bulunmuştur. Öğrenci Hyundai i20 arabasını seçmiş ve arabanın 10 km’de harcadığı yakıt miktarı 2 litre olduğu için arabanın deposunda kalan yakıt miktarının 2 litre olduğunu bir başka deyişle benzin istasyonuna gidecek kadar yakıt olduğunu varsayarak matematik dünyasına geçiş yapmıştır. Ancak doğrulama sürecinde, bu varsayımında hata yaptığını fark ederek hatasını düzeltmiştir.

Araştırmacı: *Problemde ne ifade ediyor?*

Ö: *Benzinimiz bitmek üzereymiş. Bizim hemen bir yakıt doldurmamız gerekiyormuş. Bir benzin istasyonu bulmamız gerekiyormuş. Hangisine gideceğimize karar veremiyormuşuz. Bir evimizin yanında benzin istasyonu varmış, bir de evimizden 10 km uzakta varmış. Seçtiğimiz arabaya göre hangisinden daha karlı çıkarız?*

Araştırmacı: *Hangisini seçmek istersin?*

Ö: *Hyundai i20. 2 litre benzin. 45 litre yakıt deposu. ... Tablo var. Marka ve modellere göre arabalar var. Bunların 10 km’de harcadığı ortalama yakıt miktarı var. Yani uzaktaki benzinliğe giderse harcayacağı yakıt miktarı. Yakıt deposunda ise 45 litre benzin var.*

Araştırmacı: *Arabanın yakıt deposunda 45 litre benzin mi var diyorsun?*

Ö: *Hayır. Yakıt toplamının 45 litre olduğunu söylüyorum. ... Ama yakıtı bitmek üzere. Ama ne kadar bittiği yazmıyor ki.*

Araştırmacı: *Soru da ne diyordu?*

Ö: *Depomuzu tamamen doldurmak için nereden yakıt alacağınıza karar veremiyoruz. Ama ne kadar kalmış ki onu bilmiyoruz.*

Araştırmacı: *Hyundai i20 ne ile çalışıyormuş?*

Ö: *Benzin ile çalışıyor. Eğer 10 km uzaklıktaki Seyhan'a giderse 2 litre benzin kaybedecek.*

Araştırmacı: *Evet. O zaman ne yapacaksın?*

Ö: *Doldurmamız lazım.*

Araştırmacı: *Bizden ne istiyordu soruda?*

Ö: *Yakıt depomuzu tamamen doldurmak. Yakıt depomuz 45 litre. O yüzden ek fiyat olacak. Ondan dolayı bence Çukurova'dakine gidebiliriz. Ama ne kadar olduğunu bilmiyorum.*

Araştırmacı: *Neyin ne kadar olduğunu bilmiyorsun?*

Ö: *Arabamızın yakıtı bitmek üzere diyor. Ama sadece bitmek üzere diyor. Ne kadar olduğunu söylemiyor ki. ... Şimdi şöyle yapabilir miyiz? Tamamen bitmiş gibi kabul edemeyiz dimi?*

Araştırmacı: *Sen nasıl istersen. Soruda ne diyordu?*

Ö: *... Çukurova mı daha karlı Seyhan mı karlı diye soruyor. ... İkisini karşılaştırmam gerek.*

Araştırmacı: *İkisini karşılaştırmak için ne yapacaksın?*

Ö: *İkisini de hesaplayacağım.*

Araştırmacı: *Tamam.*

Ö: *Şimdi eğer Çukurova'ya giderse bir şey kaybetmiyor. Ama ne kadar olduğunu bilmediğimiz için şu an.*

Araştırmacı: *Ne kadar olduğunu bilsen ne yapardın ne kadar olduğunu bilmesen ne yapardın? Çözüm varsayımı oluşturmayı sen seçeceksin. Tamam diyelim ki ne kadar olduğunu biliyoruz. Bu senin çözüm varsayımın olamaz mı?*

Ö: *O zaman gidecek kadar yakıtımız var. Şimdi 2 litremiz olsun. İki litrenin tamamı da gitsin. O zaman 45 litrenin tamamını da doldurmamız gerekiyor. O zaman benzin ile çalıştığı için şimdi Seyhan'a gitti.*

Matematikselleştirme sürecinde öğrencinin, bir ölçüde kabul edilebilir varsayıma dayalı doğru matematiksel modelleri oluşturduğu ve doğru oluşturulan matematiksel modelleri kullanarak doğru matematiksel çözüme ulaştığı böylece matematiksel olarak çalışma sürecini gerçekleştirdiği belirlenmiştir. Bu süreçte öğrenci, Çukurova'dan yakıt aldığı anda ne kadar ödeme yapacağını belirleyebilmek için aracın yakıt deposu miktarı olan 45 litre ile Çukurova'daki 1 litre benzin fiyatı olan 5 TL'yi çarparak bir matematiksel model oluşturmuştur. Aynı matematiksel modeli Seyhan'dan yakıt aldığı anda ne kadar ödeme yapacağını belirleyebilmek için 45 litre ile Seyhan'daki 1 litre benzin

fiyatı olan 4 TL'yi çarparak bir matematiksel model oluşturmuştur. Oluşturduğu matematiksel modellerin çözüm süreci sonunda Çukurova'dan yakıt aldığında 225 TL ödeme yapacağını, Seyhan'dan yakıt aldığında ise 180 TL ödeme yapacağını ifade etmiştir. Ancak doğrulama sürecinde, Seyhan'dan yakıt aldığında aynı zamanda gidiş-dönüş yakıtını da hesaplaması gerektiğini fark etmiştir. Bunun içinde Seyhan'a gittiğinde 10 km'de harcanan ortalama yakıt miktarının seçtiği araba olan Hyundai i20 için 2 litre olduğunu belirlemiş ve gidiş-dönüş toplamda 4 litre benzin harcanacağını belirtmiştir. Bundan dolayı 4 litrelik benzin fiyatını hesaplamak için 4 litre ile Seyhan'daki benzin fiyatı olan 4 TL'yi çarparak gidiş-dönüş maliyetini bulmuştur. Ardından Seyhan'dan yakıt aldığında toplamda ne kadar ödeme yapacağını belirleyebilmek için toplam yakıt deposu maliyeti olan 180 TL ile gidiş-dönüş maliyeti olan 16 TL'yi toplayarak 196 TL ödeme yapacağını göstermiştir.

Ö: 45 ile 4'ü çarpacağız. Kaç TL vereceğimizi bulacağız. ... Çarptım. 180 TL. Bir de Çukurova'yı bulmamız lazım. Çukurova'da benzin kaybolmayacak diyelim. Şimdi o zaman 45 ile 5'i çarpacağız. 225 TL.

Araştırmacı: Tamam. Sence hangisi daha karlı?

Ö: Hesaplara göre Seyhan daha karlı.

Araştırmacı: Tamam çarpma işleminde bir sıkıntı yok benim anlamadığım nokta şu kafama takılan. Şimdi bir evimiz var. Arabamızın deposunu doldurmak istiyoruz. İki seçeneğimiz var. Biri Çukurova evimizin yakınındaki, diğeri de 10 km uzaklıktaki Seyhan. Bizim depomuzda da bir miktar benzin var. Biz yakıt depomuzun hepsini doldurmak istiyoruz. Seyhan'a gittim. Ama evim Çukurova'da.

Ö: Seyhan'dan eve dönmem lazım. Aaaa evet bir de gidiş dönüş olacak. O zaman gidiş-dönüş hesaplamamız gerekiyor. Gidişimiz 10 km dönüşümüzde 10 km olacak. O zaman gidişte 2 litre dönüşte de 2 litre olacak. O zaman depomuzun tamamen dolu olmasını istediği için gidiş ve dönüşte de benzin almamız lazım o boşluğu doldurmamız lazım. 4 litreyi hesaplamak için Seyhan'da 4 TL, 4 ile 4'ü çarpacağım. Sonra 180 ekleyeceğim.

Araştırmacı: Peki. Yap bakalım.

Ö: 180'e 16 eklersek 196 TL.

Araştırmacı: Evet. O zaman sence Seyhan mı yoksa Çukurova mı daha karlı?

Ö: Şimdi yine de Seyhan daha karlı.

Resim 3

Matematikselleştirme ve Matematiksel Olarak Çalışma Sürecine Dair Çözüm Kağıdından Bir Kesit

Handwritten mathematical calculations on a piece of paper. The top left shows a multiplication: 45 x 4 = 180, with "Seyhan" written above. The top right shows a multiplication: 45 x 4 = 180, with "Çukurova" written above. The bottom left shows a multiplication: 180 x 4 = 720. The bottom right shows a multiplication: 4 x 4 = 16.

Yorumlama yeterliğinde öğrencinin, elde edilen doğru matematiksel çözümü gerçek yaşam bağlamında eksik bir şekilde yorumladığı belirlenmiştir. Öğrencinin, Seyhan ve Çukurova'ya yapacağı ödemeleri karşılaştırarak bir başka deyişle sadece elde ettiği sayısal sonuçları karşılaştırarak yorumlama yaklaşımında bulunmuştur. Doğrulama yeterliğinde ise ilk defa doğrulama yaklaşımında bulunmuş ve oluşturduğu varsayımında hata yaptığını belirleyerek, varsayımını düzeltmiş ve yeni matematiksel modeller oluşturmuştur. Öğrenci, ilk başta oluşturduğu varsayımında, arabanın yakıt deposunda Seyhan'a gidebilecek kadar benzin kaldığı varsayımını yapmış ve dönüş yakıtını da hesaplaması gerektiğine dair bir varsayım oluşturmamıştır. Ancak süreç içerisinde araştırmacının öğrenciye sağladığı geri bildirimler ve bunun doğrultusunda öğrencinin gerçekleştirdiği yeni çözüm varsayımları ve fikirler doğrultusunda öğrenci, Seyhan'dan yakıt aldığı gidiş ve dönüş maliyetini de hesaplaması gerektiğini fark etmiştir. Bundan dolayı en başta oluşturduğu varsayımını düzelterek Seyhan'a giderken ve Seyhan'dan dönerken de yakıt harcamasını bundan dolayı arabanın yakıt deposunun tamamen dolabilmesi için gidiş-dönüş yakıt miktarını da hesaplaması gerektiğini fark ederek bir varsayımında bulunmuştur. Ardından oluşturduğu varsayım doğrultusunda gidiş-dönüş yakıt maliyetini hesaplamak için gerekli matematiksel modeller oluşturmuş ve matematiksel çözümlerini gerçekleştirmiştir.

Araştırmacı: *Peki sence sonucun doğru mu yanlış mı?*

Ö: *Bir dakika öğretmenim. Doğrulama yapacağım.*

Araştırmacı: *Tamam, bekliyorum.*

Ö: *Problem de hangi benzin istasyonu seçersek daha karlı çıkabiliriz diyordu seçtiğimiz arabaya göre. Çukurova evimizin yakınında Seyhan 10 km uzaklıkta.*

Araştırmacı: *Sence Seyhan'a gittiğimizde benzin harcamayacak mıyız harcamayacak mıyız?*

: Seyhan'a gidersek harcayacağız.

Araştırmacı: O zaman yakıt deposunu tamamen doldurmuş oluyor muyuz?

: Evet doldurmuş oluyoruz ama burada Seyhan'dakiler 4 TL, Çukurova'dakiler 5 TL.

Araştırmacı: Tamam ama Seyhan kaç kilometre uzaklıkta?

: 10.

Araştırmacı: Oraya nasıl gideceğiz? On kilometrelik benzin nerede?

: 2 litre benzin gerekiyormuş. İki litremiz varmış diyelim.

Araştırmacı: Hııı sen o şekilde varsayım oluşturdun.

: Evet. Ona göre çarpım yaptım şimdi de doğrulama yapıyorum.

(arpma işlemimi kontrol ediyor.)

: Seyhan'dan eve dönmem lazım. Aaaa evet bir de gidiş dönüş olacak. O zaman gidiş-dönüş hesaplamamız gerekiyor. Gidişimiz 10 km dönüşümüzde 10 km olacak. O zaman gidişte 2 litre dönüşte de 2 litre olacak. O zaman depomuzun tamamen dolu olmasını istediği için gidiş ve dönüşte de benzin almamız lazım o boşluğu doldurmamız lazım. 4 litreyi hesaplamak için Seyhan'da 4 TL, 4 ile 4' arpacağım. Sonra 180 ekleyeceğim.

Araştırmacı: Problemi zm sürecini en başından itibaren bana özetleyebilir misin?

Ö: şimdi iki tane akaryakıt istasyonumuz var. Biri evimizden 10 km uzaklıkta ve 2 litreye götürüyor. Bir de evimizin yanında var. Hangisinin daha karlı olduğunu seçtiğimiz arabaya göre hesaplamamızı istiyor ama bunun bir de dönüşü var. Onu da hesaplamamızı istiyor. Hangisi daha karlı olabilir bunu bulacağız. Ben de buradan Hyundai i20 arabasını seçtim. Başta Seyhan'inkini hesapladım. Dizel değil de benzin olduğu için Seyhan'da benzin 4 TL. şimdi arabamızın toplam yakıt deposu 45 lt. O yüzden 45 ile 4' çarptım 180. Ama bunun birde dönüşü var. Onu da hesapladım 4 ile çarptım. Çünkü giderken 2, dönerken 2 litre benzin gidiyor. 4 ile 4' çarptım 16. 180'nin üstüne ekledim. 196 oldu. Sonra Çukurova'ninkini hesapladım. 45 ile 5'i çarptım. 225 buldum. Seyhan daha karlı ıktı. İlk başta varsayım yapacağımı anlamadım. Arabamızın yakıtı bitmek üzere ama onun ne kadar olduğunu belirtmesi gerektiğini düşündüm varsayım yapacağımı anlamadım sonradan

anladım ona göre ilerledim ve problemi çözmüştüm ki dönüş yolu olduğunu fark ettim ona göre tekrar çözdüm.

“Saman Balyası” Matematiksel Modelleme Yeterliği Süreci

Tablo 5’de öğrencinin üçüncü etkinlik olarak gerçekleştirilen *Saman Balyası* problemindeki matematiksel modelleme yeterliklerine ilişkin düzeylerine ve bu düzeyler doğrultusunda aldığı puanlara yer verilmiştir.

Tablo 5

“Saman Balyası Problemi” Modelleme Yeterliği Süreci

Düzeyleer	Saman Balyası
Problemi Anlama	3
Problemi Sadeleştirme	3
Matematikselleştirme	4
Matematiksel Olarak Çalışma	4
Yorumlama	3
Doğrulama	6
Toplam	23

Tablo 5’te görüldüğü gibi öğrenci bu problemde 23 puan alarak “*üst düzey modelleme yeterliğine sahip.*” olarak değerlendirilmiştir. *Saman balyası* problemde öğrencinin, problemde verilenleri kendi cümleleriyle ifade edebildiği, problemde verilenleri şekil çizerek gösterebildiği ve bu verilenlere göre problemde neler istendiğini yorumlayabildiği belirlenmiştir. Problemdeki resimde yer alan insandan yola çıkarak, saman balyalarının yüksekliğini hesaplayabileceğini bir başka deyişle resimdeki insanın boyu ile saman balyalarının yüksekliği arasında bir ilişki kurarak gerçekçi bir varsayımda bulunmuştur.

Araştırmacı: *Problemde ne diyor bize?*

Ö: *Beş saman balyası bulunmakta en altta. Bir üst sıraya geçildiğinde her defasında bir saman balyası eksiliyor. O zaman alttan üste doğru 5, 4, 3, 2, 1 tane saman balyası sıralanmaktaymış. Buna göre yığının yüksekliğini soruyor.*

(Saman balyalarının şeklini çiziyor.)

Araştırmacı: *Burada kaç sıra var?*

Ö: *5 sıra var. Şimdi bunların hepsinin bir yüksekliği olması lazım. O zaman şimdi varsayımda bulunacağım öğretmenim. Ama nasıl bulunacağım? Hiç sayı vermemiş ki.*

Araştırmacı: *Probleme bir daha bak. İyice incele tüm verilenleri.*

Ö: *Tamam. (Problemi tekrar okuyor ve inceliyor.) ...
Resimde biri var. Samanda duran.*

Araştırmacı: *Evet.*

Ö: *O zaman... (Düşünüyor.) Mesela yaklaşık bir insanın
boyutuna göre mi düşüneceğim saman balyalarını?*

Araştırmacı: *Problemin çözümü sen de. Sen nasıl
çözersen.*

Ö: *Tamam o zaman. Samanda duran biri var. 1.50
olabilir.*

Araştırmacı: *Ne 1.50 olabilir? Neden 1.50?*

Ö: *Bir arkadaşımın boyu idi.*

Araştırmacı: *Resimdekini bir çocuk olarak mı
düşündün?*

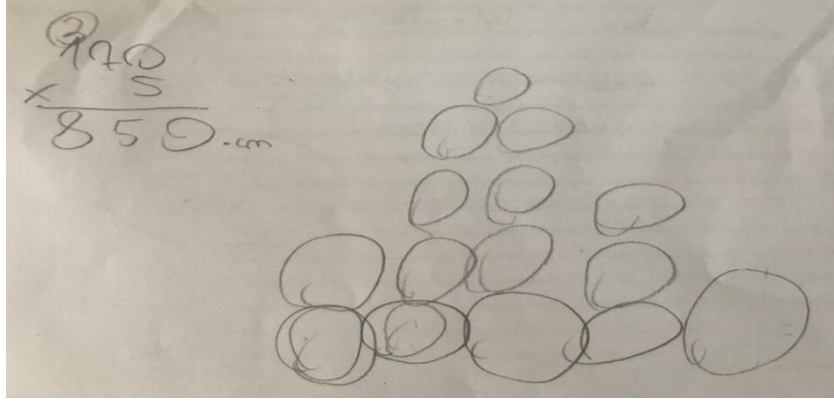
Ö: *Aslında resimdeki çocuk değil o zaman bir insanın
boyutu, bir büyüğün boyutu 1.70 olsa. O zaman şimdi
bir büyük olarak düşünelim. Bu (kadın) arasında
durmuş. O zaman bir saman balyası 1.70 oluyor. Böyle
düşüneceğim. Resimdeki kadının yüksekliğinden yola
çıkacağım.*

Matematikselleştirme sürecinde öğrencinin, gerçekçi varsayımlara göre doğru matematiksel modelleri oluşturduğu ve doğru oluşturulan matematiksel modelleri kullanarak doğru matematiksel çözüme ulaştığı böylece matematiksel olarak çalışma sürecini gerçekleştirdiği belirlenmiştir. Bu süreçte öğrenci, bir insanın boyunu 170 cm olarak varsaymıştır. Saman balyaları aşağıdan yukarıya doğru 5 sıra olarak yerleştirildiği için 170 ile 5'i çarparak saman balyalarının yüksekliğini hesaplamıştır. Böylece öğrenci problemi matematiksel açıdan çözmüş ve gerçek yaşam sonucunu da bulmuş sayılmaktadır.

Ö: *O zaman bir insanın boyutu, bir yetişkinin boyutu 1.70
olsa. ... O zaman bir saman balyası 1.70 oluyor. Böyle
düşüneceğim. Resimdeki kadının yüksekliğinden yola
çıkacağım. 5 sıra var. 5 sıra saman balyalarının yüksekliği. O
zaman 170 ile 5'i çarpacağım. Ve 850 cm buldum.*

Resim 5

Matematikselleştirme ve Matematiksel Olarak Çalışma Sürecine Dair Çözüm Kağıdından Bir Kesit



Yorumlama yeterliğinde öğrencinin, elde edilen doğru matematiksel çözümü gerçek yaşam bağlamında eksik bir şekilde yorumladığı belirlenmiştir. Öğrenci ulaştığı matematiksel çözüm doğrultusunda kısmen gerçek yaşam sonucunu bulmuş sayılsa da saman balyalarının üstten alta doğru birbirlerine uyguladığı basıncın artması ile bir çökme meydana geleceğini ve bundan dolayı bulunduğu yükseklikten daha az çıkacağını belirtmediği için elde ettiği sonucu gerçek yaşam bağlamında eksik bir şekilde yorumlamıştır. Doğrulama yeterliğinde ise öğrenci, sürecin en başından itibaren yaptıklarını gözden geçirerek doğrulama yeterliliğinde bulunmuştur. Bu bağlamda öğrenci, problemi yeniden anlamlandırarak bunu sözlü olarak ifade etmiştir. Ardından oluşturduğu varsayımı değerlendirerek matematiksel modelini ve yaptığı tüm işlemleri yeniden kontrol etmiştir. Ayrıca öğrenci, problemde kendisinden bulunduğu sonucu yazılı olarak veya bir mektup ile ifade etmesini istemediği halde tüm sürecini yazılı olarak ifade etme isteğinde bulunarak bir de tüm modelleme sürecini yazılı olarak ifade etmiştir.

Araştırmacı: *Bu bulduğun sonucun. Şimdi ne yapacaksın?*

Ö: *Doğrulamaaaa.* (Yüksek sesle ifade etti.)

Araştırmacı: *Nasıl doğrulama yapacaksın?*

Ö: *Bir daha çözeceğim. Şimdi size anlatacağım öğretmenim. Burada şekilde en alt sırada 5 saman balyası bulunmaktadır diyor. Bir üst sıraya geçildiğinde her defasında bir saman balyası eksilmekte yani 5, 4, 3, 2, 1 tane saman balyası kalmaktadır. Buna göre tüm yığının yüksekliğini yaklaşık olarak hesaplayınız diyor. Bu saman balyasının şeklini çizdikten sonra 5 sıra olduğunu buldum yüksekliğinin. Bu kadına bir uzunluk yükseklik verdim. Bu*

kadının yüksekliğini saman balyası boyu ile ilişkilendirdim. Sonra ikisini çarptım. Yani 170 kadının boyu ve saman balyasının yüksekliği 5 sıra. O yüzden yüksekliği 5. Ve 850 cm buldum.

Araştırmacı: Doğru mu çözdün sence?

Ö: Evet.

Araştırmacı: Bulduğun 850 cm ne?

Ö: Şeyin uzunluğu. Saman balyasının, tüm yığının uzunluğu. Şimdi arkasına yazılı olarak mı ifade edeceğim?

Araştırmacı: Sen bilirsin.

Ö: Bir daha bir doğrulama yapacağım. Çarpımı kontrol edeceğim.

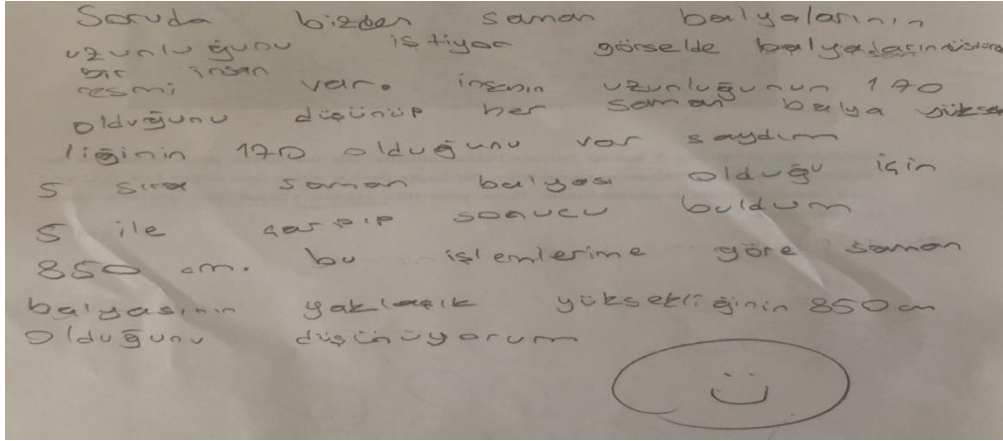
Araştırmacı: Et bakalım.

Ö: 7 kere 5, 35. 5, 3 daha 8. 850. Tamam, doğru bulmuşum. İşlemimi kontrol ettim. Şimdi arkasına yazılı olarak ifade edeceğim.

(Yorumunu yazılı olarak ifade ediyor.)

Resim 6

Yorumlama Sürecine Dair Çözüm Kağıdından Bir Kesit



Son Ölçüm Matematiksel Modelleme Yeterliği

Öğrenciye son olarak Restaurant, Elmalı Turta ve Okulda Zaman problemleri yazılı olarak verilmiş ve öğrencinin bu problemleri çözmesi istenerek süreç sonundaki matematiksel modelleme yeterlikleri belirlenmiştir. Öğrencinin süreç sonundaki matematiksel modelleme yeterlikleri Tablo 6'da yer almaktadır.

Tablo 6*Son Ölçüm Matematiksel Modelleme Yeterliği*

Düzeyler	Model Oluşturma Etkinlikleri		
	Restaurant Problemi	Elmalı Turta	Okulda Zaman
Problemi Anlama	4	4	3
Problemi Sadeleştirme	3	3	2
Matematikselleştirme	4	4	1
Matematiksel Olarak Çalışma	4	4	2
Yorumlama	3	4	2
Doğrulama	6	6	4
Toplam	24	25	14

İlkokul dördüncü sınıf öğrencisinin son ölçüm bilişsel modelleme yeterlik düzeyi değerlendirildiğinde, Restaurant probleminden 24 puan alarak “*üst düzey modelleme yeterliğine sahip.*”; Elmalı Turta probleminden 25 puan alarak “*üst düzey modelleme yeterliğine sahip.*” ve Okulda Zaman probleminden 14 puan alarak “*kabul edilebilir ölçüde modelleme yeterliğine sahip.*” olarak belirlenmiştir.

Süreç Boyunca Sağlanan Ayrıntılı Geri Bildirimlerin İçeriği

İlkokul dördüncü sınıf öğrencisine, modelleme döngüsündeki her bir yeterlik basamağına göre uygulama süreci ve sonrasında ayrıntılı geri bildirim verilerek, bilişsel modelleme yeterliklerindeki eksiklerinin farkına varmasına ve geliştirilmesine çalışılmıştır. Bu doğrultuda sağlanan geri bildirimlerin içeriğinin nasıl olduğu, üç uygulama boyunca ayrı ayrı ele alınarak sunulmuştur.

Fasulye Problemi (Birinci Uygulama) Geri Bildirimi

Fasulye probleminin birincisi sorusu için verilen geri bildirimde, öğrenciye problemi anladığını gösteren ifadelere yer verdiği ancak verilenleri ve istenenleri belirleme sürecinde gereksiz değişkenleri de ele aldığı belirtilmiştir. Altıncı, sekizinci ve onuncu haftanın verileri ile matematiksel modeller oluşturmaya başlaması sebebiyle gereksiz değişkenleri ele aldığı söylenmiştir. Ayrıca problemi anlama sürecinde, problemde verilenlerin ve istenenlerin neler olduğunu ve bunlar arasındaki ilişkileri yazılı olarak ifade etmesi gerektiği belirtilmiştir. Ardından çözüm aşamasına geçmeden önce verilenlerden ve istenenlerden yola çıkarak problemi nasıl çözeceğine dair varsayımlar oluşturması gerektiği söylenmiş böylece problemi sadeleştirme süreci gerçekleştireceği belirtilmiştir. Problemi sadeleştirme yeterliğine yönelik olarak kendisinin, iki farklı fasulye yetiştirme koşulu altındaki her haftanın ağırlıklarını kullanarak problemi çözeceğini ifade etmesi nedeniyle bir ölçüde kabul edilebilir bir varsayımda bulunduğu

belirtilmiştir. Matematiselleştirme yeterliğinde aslında sadece onuncu hafta verilerini kullanarak veya gün ışığında ve gölgede haftalık olarak kilo miktarlarını karşılaştırarak da modelleme sürecinin gerçekleştirebileceği ancak oluşturduğu matematiksel modellerde herhangi bir hata olmadığı belirtilmiştir. Matematiksel olarak çalışma yeterliğinde ise oluşturduğu matematiksel modelleri doğru olarak çözdüğü ifade edilmiştir. Yorumlama yeterliğinde elde ettiği sonuçlara dayalı olarak sadece sayısal karşılaştırmalar yaptığı ifade edilmiştir. Bunun yerine bulduğu sayısal sonuçların gerçek yaşam bağlamında ne anlama geldiğini ifade etmesi gerektiği böylece elde ettiği matematiksel çözümü gerçek yaşam bağlamında yorumlamış olabileceği belirtilmiştir. Elde ettiği matematiksel çözümü gerçek yaşam bağlamında doğru yorumlamanın şu şekilde olabileceği söylenmiştir: *“En uygun ışık koşulu, gün ışığıdır. Çünkü örneğin birinci sıradaki bitkinin altıncı haftada gün ışığındaki ağırlığı 9 kg, gölgede 5 kg’dır. Sekizinci haftada gün ışığındaki ağırlığı 12 kg, gölgede 9 kg’dır. Onuncu haftada ise gün ışığındaki ağırlığı 13 kg, gölgede 15 kg’dır. Bunu diğer sıradaki bitkiler için de incelediğimizde, gün ışığında kilo artış miktarı daha fazladır. Bundan dolayı en uygun ışık koşulu, gün ışığıdır. Veya her bir hafta ne kadar fasulye miktarı olduğunu belirleyerek de gün ışığının daha çok ürün sağladığını bulabiliriz. Örneğin gün ışığı onuncu hafta $13+14+18+17=62$ kg; gölge onuncu hafta $15+14+12+13=54$ kg.”* Ayrıca problemde istenen Ali Amca’ya mektup yazılması görevinin, nasıl yapılması gerektiği açıklanmıştır. Bunun için mektupta problemde verilenleri ve istenenleri yazarak mektuba başlaması, belirlediği değişkenlerden problemi nasıl çözdüğü, neden bu çözüm yolunu tercih ettiğini ve elde ettiği sonucun ne anlama geldiğini yazması gerektiği belirtilmiştir. Son olarak doğrulama yeterliğinde ise herhangi bir yaklaşım sergilemediği ifade edilmiştir. Doğrulama sürecinde, problemde verilenleri ve istenenleri belirleyerek problemi tam olarak anlayıp anlamadığını, oluşturduğu varsayımları, matematiksel modelleri ve matematiksel modellerin çözümünü, elde ettiği matematiksel sonucun problemde istenilen cevabı karşılayıp karşılamadığını ve bu sonucun gerçek yaşamda ne anlam ifade ettiğini kontrol etmesi eğer bir hata varsa düzeltmesi gerektiği belirtilmiştir. Böylece bundan sonraki problemlerinde doğrulama yaklaşımını nasıl yapması gerektiğine yönelik açıklamalarda bulunulmuştur.

Fasulye probleminin ikinci sorusu için verilen geri bildirimde, öğrencinin uygulama sürecinde problemi çözemediği için problemi nasıl anlamlandırması gerektiği ifade edilmiştir. Bunun için problemde gün ışığında ve gölgede haftalık olarak dört ayrı sıradaki kuru fasulye bitkisinin ağırlıkların verildiği ve bu ağırlıklara göre on ikinci haftanın ağırlığının bulunmasının istendiğini belirterek problemi anlama sürecini gerçekleştirebileceği ifade edilmiştir. Ardından problemi

sadeleştirme yeterliğine yönelik araştırmacı tarafından problemin çözümü için varsayımlar oluşturulmuştur. Bu doğrultuda gün ışığında ve gölgede altıncı, sekizinci ve onuncu haftanın ağırlıkları arasındaki değişime bakılarak bir çözüm varsayımı oluşturulabileceği belirtilmiştir. Matematikselleştirme yeterliğinde öğrenciye, haftalar arasındaki ağırlık değişkenlerinden yola çıkılarak bir örüntü olduğu fark ettirilmiştir. Haftalar arasındaki ağırlık farklarından yola çıkılarak örüntüler oluşturulmuş ve gün ışığı ve gölgedeki fasulyelerin on ikinci hafta ağırlığı bulunarak matematiksel olarak çalışma yeterliği öğrenci ile birlikte gerçekleştirilmiştir. Yorumlama yeterliğinde bulduğumuz ağırlıkları gerçek yaşam bağlamında nasıl yorumlayabileceğimiz tartışılmıştır. Doğrulama yeterliğinde, verilenleri ve istenenleri doğru belirleyip belirleyemediğimiz, çözüm varsayımımız, oluşturulan örüntüler, hesaplamalar ve elde ettiğimiz matematiksel sonucun gerçek yaşam bağlamındaki yorumu kontrol edilerek süreç tamamlanmıştır.

Akaryakıt İstasyonu Problemi (İkinci Uygulama) Geri Bildirimi

Akaryakıt istasyonu probleminde öğrenciye, problemi anladığını gösteren ifadeler yer verdiği, verilenleri ve istenenleri bir ölçüde belirleyebildiği ancak aralarında ilişki kurmada güçlük yaşadığı belirtilmiştir. Problemi anlama ve çözümü için varsayımlar oluşturma sürecinde, evin yanındaki Çukurova'dan mı yakıt almak daha karlı yoksa 10 km uzaklıktaki Seyhan'a mı gitmek daha karlı bunu belirlemeye çalıştığı ancak depoda kalan yakıt miktarının ne kadar olduğunu bilmediği için bir çelişki ve güçlük yaşadığı söylenmiştir. Daha sonra doğrulama sürecinde gerçekçi varsayımlar oluşturularak, hatasını düzelttiği ifade edilmiştir. Öğrencinin oluşturduğu gerçekçi varsayımların farkına varmasını sağlamak için neleri göz önünde bulundurduğu yeniden tartışmaya açılmıştır. Örneğin yakıt deposunda ne kadar miktar benzin kaldığına yönelik bir varsayımda bulunduğu söylenmiştir. İlk önce "Yakıt depomuzu tamamen doldurmak. Yakıt depomuz 45 litre. O yüzden Seyhan'a giderse ek fiyat olacak. Bence Çukurova'dakine gidebiliriz." varsayımını oluşturduğu ardından "Gidecek kadar yakıtımız var." varsayımını oluşturularak matematikselleştirme sürecine geçtiği ifade edilmiştir. Matematikselleştirme sürecinde öğrencinin, bir ölçüde kabul edilebilir varsayımlara göre doğru matematiksel modelleri oluşturduğu söylenmiştir. Ancak ilk oluşturduğu matematiksel modelde sadece Çukurova'dan ve Seyhan'dan yakıt aldığına ne kadar ödeme yapacağını hesapladığı, Seyhan'a giderken ve Seyhan'dan dönerken deponun boşalacağını ve bundan dolayı yakıt deposunun tamamen dolmayacağını göz ardı ettiği ifade edilmiştir. Çünkü Seyhan'a giderken ve Seyhan'dan dönerken yakıt deposunun Hyundai i20'yi seçtiği için 10 km'de toplamda gidiş-dönüş 4 litre boşalacağını ve o boşluğun dolması gerektiği söylenmiştir. Bu durumu fark ettikten

sonra yaptığı matematiksel modelin doğru olduğu belirtilmiştir. Yorumlama yeterliğinde ise, elde edilen doğru matematiksel çözümü gerçek yaşam bağlamında eksik bir şekilde yorumladığı söylenmiştir. Kendisinin sadece sayısal karşılaştırma yaparak “*Seyhan daha karlı çıktı.*” ifadesinde bulunduğu ve bundan dolayı eksik bir şekilde yorumlama yaptığı ifade edilmiştir. Elde ettiği matematiksel çözümü gerçek yaşam bağlamında doğru yorumlamanın şu şekilde olması gerektiği belirtilmiştir: “*Çukurova’dan yakıt almamız durumunda yapacağımız ödemenin 225 TL, Seyhan’dan yakıt almamız durumunda yapacağımız ödemenin 196 TL olduğu bulunmuştur. Buna göre bizim Seyhan’a gidip yakıt almamız daha karlı olacaktır. Ayrıca bu aşamada harcanan zaman, hava kirliliği, hava şartları gibi ek faktörler de göz önünde bulundurularak elde edilen çözümü tekrardan yorumlayabiliriz. 10 km uzaklıktaki bir yere gitmek hatta gidip geri dönmek, bu süreçteki yorgunluğa, atmosfere salınan gazlara, havanın yağışlı olması durumunda yaşanabilecek sıkıntılara değer mi?*” bu bağlamda düşündüğümde elde ettiğimiz çözümü gerçek yaşam bağlamında doğru bir şekilde yorumlamış olacağımız ifade edilmiştir. Bu sefer önceki problemlerden farklı olarak ilk defa doğrulama yeterliliğinde bulunduğu ve doğrulama yeterliliğinde bulunması sayesinde doğru matematiksel modele ve çözüme ulaştığı söylenmiştir.

Saman Balyası Problemi (Üçüncü Uygulama) Geri Bildirimi

Saman balyası probleminde öğrencinin, problemde verilenleri kendi cümleleriyle ifade edebildiği, problemde verilenleri şekil çizerek gösterebildiği ve bu verilere göre problemde neler istendiğini yorumlayabildiği böylece problemi tam olarak anlamlandırabildiği söylenmiştir. Problemdeki resimde yer alan insandan yola çıkarak, saman balyalarının yüksekliğini hesapladığını bir başka deyişle resimdeki insanın boyu ile saman balyalarının yüksekliği arasında bir ilişki kurarak gerçekçi bir varsayımda bulunduğu ifade edilmiştir. Matematikselleştirme sürecinde öğrencinin, gerçekçi varsayımlara göre doğru matematiksel modelleri oluşturduğu ve doğru oluşturulan matematiksel modelleri kullanarak doğru matematiksel çözüme ulaştığı böylece matematiksel olarak çalışma sürecini gerçekleştirdiği söylenmiştir. Yorumlama yeterliğinde ise, elde edilen doğru matematiksel çözümü gerçek yaşam bağlamında eksik bir şekilde yorumladığı söylenmiştir. Ulaştığı matematiksel çözüm doğrultusunda kısmen gerçek yaşam sonucunu bulmuş sayılsa da saman balyalarının üstten alta doğru birbirlerine uyguladığı basıncın artması ile bir çökme meydana geleceğini ve bundan dolayı bulunduğu yükseklikten daha az çıkacağını belirtmediği için elde ettiği sonucu gerçek yaşam bağlamında eksik bir şekilde yorumladığı öğrenciye ifade edilmiştir. Doğrulama yeterliğine yönelik olarak ise sürecin en başından itibaren yaptıklarını gözden geçirdiği, problemi yeniden anlamlandırarak bunu

sözlü olarak ifade ettiği, oluşturduğu varsayımı değerlendirerek matematiksel modelini ve yaptığı tüm işlemleri yeniden kontrol ettiği söylenmiştir. Ayrıca, problemde kendisinden bulduğu sonucu yazılı olarak veya bir mektup ile ifade etmesini istemediği halde tüm sürecini yazılı olarak ifade ettiğini böylece yorumlama sürecini gerçekleştirdiği belirtilmiştir. Son olarak Tablo 7'de ayrıntılı geri bildirim uygulama sürecinde nasıl kullanıldığına dair genel bir çerçeve sunulmuştur.

Tablo 6

Ayrıntılı Geri Bildirimin Uygulama Sürecindeki Kullanımı

Ölçütler	Ayrıntılı Geri Bildirim
Problemi Anlama	<ul style="list-style-type: none"> • Problemi anlamadığını veya bir ölçüde anladığını gösteren ifadeler yer verme, verilenleri ve istenenleri belirleyememe veya bir ölçüde belirleyebilme ve aralarında ilişki kuramama/yanlış ilişki kurma durumlarında öğrenciye, problemi doğru bir şekilde anlamadığının ifade edilmesi, problemi tekrardan okuması ve kendi cümleleriyle ne anladığını ifade etmesinin istenmesi. Eğer bu yeterliği gerçekleştiremezse problemi nasıl anlamasını gerektiğinin ifade edilmesi. • Problemi tam olarak anlamlandırıldığını gösteren ifadeler yer verme, verilenleri ve istenenleri belirleme ve aralarında ilişki kurma durumlarında öğrenciye, problemi doğru anlamadığının ifade edilmesi ve bir sonraki aşamaya geçilmesi.
Problemi Sadeleştirme	<ul style="list-style-type: none"> • Problemi sadeleştirmeme veya bir ölçüde sadeleştirme, gerekli/gereksiz değişkenleri belirlememe veya bir ölçüde belirleme ve yanlış varsayımlarda veya bir ölçüde kabul edilebilir varsayımlarda bulunma durumlarında öğrenciye, çözdüğü problem durumuna göre beyin fırtınası yapmasını sağlayacak sorular sorulması ve gerçekçi varsayımlarda bulunmasının sağlanması. Eğer bu yeterliği gerçekleştiremezse nasıl gerçekçi varsayımlarda bulunabileceğinin açıklanması. • Problemi sadeleştirme, gerekli/gereksiz değişkenleri belirleme ve gerçekçi varsayımlarda bulunma durumlarında, öğrenciye varsayımının problemin çözümü için geçerli olduğunun ifade edilmesi ve bir sonraki aşamaya geçilmesi.

Tablo 6

Ayrıntılı Geri Bildirim Uygulama Sürecindeki Kullanımı (devam)

Matematikselleştirme	<ul style="list-style-type: none">• Matematiksel model/ler oluşturmama veya eksik/hatalı matematiksel model/ler oluşturma durumlarında öğrenciye, oluşturduğu matematiksel modelin problemin çözümü için doğru olup olmadığına dair beyin fırtınası yapmasını sağlayacak sorular sorulması ve gerçekçi varsayımlara göre gerekli matematiksel model/leri doğru bir şekilde oluşturmalarının sağlanması. Eğer bu yeterliği gerçekleştiremezse nasıl gerçekçi varsayımlara göre matematiksel model/ler oluşturabileceğinin gösterilmesi.• Gerçekçi varsayımlara göre gerekli matematiksel model/leri doğru bir şekilde oluşturma, model/modelleri açıklama ve birbiriyle ilişkilendirme durumlarında öğrenciye, oluşturduğu matematiksel modelin doğru olduğunun ifade edilmesi ve bir sonraki aşamaya geçilmesi.
Matematiksel Olarak Çalışma	<ul style="list-style-type: none">• Matematiksel çözüm sunmama, oluşturulan matematiksel modelleri yanlış çözmeye veya yanlış matematiksel modeli çözmeye çalışma durumlarında öğrenciye, çözüm sürecini sorgulamaya yönelik sorular sorulması, hatalarının farkına vardırılması ve matematiksel modeli doğru çözmesinin sağlanması. Eğer bu yeterliği gerçekleştiremezse oluşturulan matematiksel modelin nasıl çözülebileceğinin gösterilmesi.• Doğru oluşturulan matematiksel model/leri kullanarak doğru matematiksel çözüme ulaşma durumlarında öğrenciye, çözümünün doğru olduğunun ifade edilmesi ve bir sonraki aşamaya geçilmesi.

Tablo 6**Ayrıntılı Geri Bildirim Uygulama Sürecindeki Kullanımı (devam)****Yorumlama**

- Elde edilen matematiksel çözümü gerçek yaşam bağlamında yanlış yorumlama veya hiç yorumlamama, elde edilen doğru matematiksel çözümü gerçek yaşam bağlamında eksik bir şekilde yorumlama durumlarında öğrenciye, başka nasıl şekillerde yorumlayabileceği sorularak gerçek yaşam bağlamında yorumlama yeterliğini ortaya çıkarılmasının sağlanması. Eğer bu yeterliği gerçekleştirmezse elde edilen doğru matematiksel çözümü gerçek yaşam bağlamında nasıl doğru bir şekilde yorumlayabileceğinin açıklanması.
- Elde edilen doğru matematiksel çözümü gerçek yaşam bağlamında doğru bir şekilde yorumlama durumlarında öğrenciye, yorumunun gerçek yaşam bağlamında olduğunun ifade edilmesi ve bir sonraki aşamaya geçilmesi.

Doğrulama

- Doğrulama yaklaşımında bulunmama veya yanlış doğrulama yapma, kısmen/bir ölçüde doğrulama yaklaşımında bulunma, hatalar belirlenmesine rağmen bu hataları düzeltmeme veya belirlenen hataları bir ölçüde düzeltme durumlarında öğrenciye, doğrulama yaklaşımının doğru olmadığı ve nasıl olması gerektiğinin buldurulmaya çalışılması ve ifade edilmesi. Eğer bu yeterliği gerçekleştirmezse nasıl doğrulama yaklaşımında bulunması gerektiğinin ifade edilmesi.
- Doğrulama yaklaşımında bulunma, belirlenen hataları düzeltme durumlarında öğrenciye, doğrulama yaklaşımının doğru olduğunun ifade edilmesi ve sürecin tamamlanması.

Tartışma ve Sonuç

Problemi anlama yeterliğinde öğrencinin, ilk haftada problemi anlamlandırmadan, gerekli-gereksiz değişkenleri belirlemeden doğrudan matematik dünyasına geçiş yaptığı görülmüştür. Ancak bu yeterliğe yönelik sağlanan ayrıntılı geri bildirimler sayesinde öğrencinin ilerleyen haftalarda artık problemi anlayarak okuduğu, verilenleri ve istenenleri belirleyebildiği, aralarında ilişki kurabildiği ve bu düşüncelerini yazılı olarak ifade edebildiği belirlenmiştir. English ve Watters'ın (2004) araştırmasında bu yaş grubundaki öğrencilerin çeşitli format ve temsillerde sunulan veriyi anlamada ve yorumlamada zorlandığı sonucuna ulaşılmıştır. Bu yaş grubundaki (10 yaş)

öğrencilerle yapılan benzer çalışmalarda da öğrencilerin problemi durumunu anlamlandırma sürecinde güçlük yaşadıklarını ortaya koymaktadır (Şahin, 2019; Şahin ve Eraslan, 2016). Benzer şekilde bu araştırmada da öğrencinin, problemi anlama sürecinde güçlük yaşamasına rağmen, problemi anlama yeterliğe yönelik sağlanan ayrıntılı geri bildirimler sayesinde gelişim gösterdiği görülmüştür. Bu doğrultuda yapılan araştırmalar, öğretme ve öğrenme faaliyetlerini değiştirmek için ayrıntılı geri bildirimlerin etkili bilgiler sağladığını vurgulamaktadır (Asempapa ve Foley, 2018). Paralel olarak öğrenciye verilen modelleme süreci bilgisinin, modelleme yeterliklerinin gelişimi üzerinde olumlu bir etkisi olduğu belirtilmektedir. (Maaß, 2006; Kaiser ve diğerleri, 2010).

Farklı yaş gruplarından öğrencilerle yapılan pek çok çalışmada, öğrencilerin problem durumuna uygun varsayım oluşturmakta ve problemi sadeleştirmekte güçlük yaşadıklarını vurgulamaktadır (Blum, 2015; Chan ve diğerleri, 2012; Haines ve Crouch, 2007; Maaß, 2006). Benzer şekilde bu araştırmada da öğrencinin, *problemi sadeleştirme* sürecinde zorlanmasına rağmen bu yeterliğe yönelik sağlanan ayrıntılı geri bildirimler sayesinde gelişim gösterdiği görülmüştür. Bu tür söylemlere, eylemlere ve cevaplara özgü ayrıntılı geri bildirim, öğrenci başarısını, özellikle öğrenme verimliliğini daha fazla artırdığı yönünde çalışmalar bulunmaktadır (Corbett ve Anderson, 2001; Mory, 2004; Shute ve diğerleri, 2007). Bir başka deyişle belirli bir amaca ve hedefe yönelik ayrıntılı geri bildirimler, öğrencilerin öğrenme ve görev performanslarını artırmaktadır (Asempapa ve Foley, 2018; Diefes-Dux ve diğerleri, 2012; Greefrath ve Vorhölter, 2016; Shute, 2008; Wake, 2010).

Matematikselleştirme ve matematiksel olarak çalışma yeterliğinde öğrencinin, ilk haftalarda bir ölçüde kabul edilebilir varsayımlara dayalı doğru matematiksel modeller oluşturdukları, son haftalarda ise gerçekçi varsayımlara göre doğru matematiksel modeller oluşturdukları belirlenmiştir. English (2007), 8-9 yaş aralığındaki çocuklarla gerçekleştirdiği modelleme çalışmasında, bu yaş grubundaki öğrencilerin nitel veriyi nicelleştirebildiğini ifade etmektedir. Benzer şekilde bu araştırmada da sürecin sonuna doğru öğrencilerin sözel ifadeleri giderek matematikselleşmiş ve gerçekçi varsayımlara uygun olan matematiksel modeller oluşturmuştur. Bu kapsamda model oluşturma etkinliklerinin karmaşık yapısı ve süreç içerisinde öğrenciden beklenen yüksek bilişsel görev talepleri nedeniyle öğrencilere hem süreç içerisinde hem de süreç sonrasındaki çözümlerine yönelik biçimlendirici geri bildirimler verilmesi gerektiği vurgulanmaktadır (Asempapa ve Foley, 2018; Besser ve diğerleri, 2013; Besser ve diğerleri, 2015; Diefes-Dux ve diğerleri, 2012; GAIMME Raporu, 2016; Levy ve diğerleri, 2016; Wake, 2010). Geri bildirim, öğrenci öğrenmesini geliştirmek amacıyla öğrencinin düşüncesini veya

davranışını değiştirmeyi amaçlayan ve bu doğrultuda öğrenciye iletilen bilgiler olarak tanımlanmaktadır (Shute, 2008). Modelleme sürecinde de öğrencilere sağlanacak bir destek olarak geri bildirimlerin, modelleme yeterliklerin gelişimine katkı sağladığı görülmüştür. Bu doğrultuda araştırmada da öğrenciye sağlanan ayrıntılı geri bildirimler sayesinde ilerleyen haftalarda öğrencinin doğrulama yeterliğini kazanması sayesinde oluşturduğu matematiksel modellerin çözümü sürecindeki hatalarını fark ettiği ve bu hatalarını düzelterek modelleri doğru olarak çözdüğü görülmüştür.

Geri bildirim temel amacı, matematiksel içerik alanlarında (örneğin, sayılar ve işlemler, geometri, ölçme, veri işleme) veya genel becerilerde (örneğin, problem çözme, modelleme, aritmetik işlemler yapma) öğrenci bilgilerini, becerilerini ve anlayışlarını arttırmayı sağlamaktır (Besser ve diğerleri, 2013; Besser ve diğerleri, 2015; Greefrath ve Vorhölter, 2016; Shute, 2008; Wake, 2010). Geri bildirim, uygun olmayan problem çözme stratejilerini, işlem hatalarını veya kavram yanlışlarını düzeltmek için öğrenciye yararlı olabilecek bilgiler sağlamaktadır (Mason ve Bruning, 2001; Mory, 2004; Narciss ve Huth, 2004). Bu anlamda bu çalışmada, model oluşturma etkinlikleri süresince öğrenciye hem süreç içerisinde hem de süreç sonunda ihtiyaç duyduğu alanlarda (problemi anlama, varsayım oluşturma, problem çözme stratejisi belirleme, model oluşturma, işlem hataları, kavram yanlışları, yorumlama, doğrulama) ayrıntılı geri bildirim sağlanarak modelleme yeterlikleri geliştirilmiştir. Hedefe yönelik söylemlere, eylemlere ve cevaplara özgü geri bildirim, öğrenci başarısını, özellikle öğrenme artırdığı yönünde çalışmalar bulunmaktadır (Corbett ve Anderson, 2001; Mory, 2004; Shute ve diğerleri, 2007). Ayrıca hedefe yönelik geri bildirimler, öğrencilerin öğrenme ve görev performanslarını artırmaktadır (Asempapa ve Foley, 2018; Diefes-Dux ve diğerleri, 2012; Greefrath ve Vorhölter, 2016; Shute, 2008; Wake, 2010).

Yorumlama yeterliğinde öğrenciye bu yeterliğe ilişkin ayrıntılı geri bildirimler verilmesine rağmen yine de bu yeterliği sergilemekte zorlandığı görülmüştür. Bununla birlikte yorumlama yeterliği kapsamında değerlendirilen sonucu yazılı olarak ifade etme sürecinde öğrencinin ilk haftalarda elde ettiği matematiksel çözüme nasıl ulaştığını yazılı olarak ifade edemediği ancak ilerleyen haftalardaki problem durumlarında istenmemiş olmasına rağmen kendiliğinden bu eylemi gerçekleştirdiği görülmüştür. Benzer şekilde bu yaş grubu ile yapılan çalışmalarda da öğrencilerin elde ettikleri matematiksel sonucu yazılı bir forma dönüştürmede güçlük yaşadıkları ifade edilmektedir (English, 2006; English ve Watters, 2004, 2005; Şahin, 2019). Bu bağlamda yapılan çalışmalar öğrencilerin modelleme problemleri üzerinde çalışırken, kendi modellerini yorumlayabilecekleri ve gerçek hayat durumu ile modellerini

yorumlayabilecekleri ortamların sağlanması gerektiğini vurgulamaktadır (Blum ve Borremeo Ferri, 2009; Haas ve diğerleri, 2020; Suh ve diğerleri, 2021). Ayrıca geribildirim, özellikle çalışılan konu üzerindeki deneyimi az olan ve karmaşık bir problem çözme görevi ile karşılaşan düşük yetenekli öğrencilerin, bilişsel yükünü azalttığı vurgulanmaktadır (Moreno, 2004; Paas ve diğerleri, 2003).

Doğrulama yeterliğinde öğrencinin, ilk haftalarda bu yeterliği hiç gerçekleştirmediği ancak ilerleyen haftalarda bu yeterliğe yönelik sağlanan ayrıntılı geri bildirimler sayesinde doğrulama yeterliğini gösterdiği belirlenmiştir. Hem uygulama sürecinde hem süreç sonunda araştırmacı tarafından öğrenciye sadece işlem hatalarını değil problemi doğru anlayıp anlamadığı, çözüm varsayımlarını, oluşturduğu matematiksel modelin doğruluğunu, matematiksel çözümlerinde işlem hatası yapıp yapmadığını kontrol etmesi gerektiğine dair geri bildirimler verilmiştir. Bu geri bildirimler sayesinde öğrencinin doğrulama yeterliğinde gelişim olduğu belirlenmiştir. Öğrencinin bu yeterliği kazanması ile hatalarını fark ettiği ve bu hatalarını düzelterek matematiksel modellerini doğru olarak çözdüğü görülmüştür. Amaca ve hedefe yönelik sağlanan geri bildirimlerin, uygun olmayan problem çözme stratejilerini, işlem hatalarını ve kavram yanlışlarını düzeltmek için öğrenciye yararlı bilgiler sağladığını vurgulayan çalışmalar bulunmaktadır (Mason ve Bruning, 2001; Mory, 2004; Narciss ve Huth, 2004). Çünkü biçimlendirici değerlendirme, bireyin gelişimini ve süreç içerisinde hala geliştirilmesi gereken yönlerin olup olmadığını ortaya koymasının yanı sıra bireye mevcut durumunu anlama ve farkındalık kazanmada destek olmaktadır (Black ve diğerleri, 2004).

Öneriler

Bu çalışma ile bir ilkokul dördüncü sınıf öğrencisine her bir modelleme yeterliklerine yönelik sağlanan ayrıntılı geri bildirimler sayesinde öğrencinin modelleme yeterliklerinde gelişim olduğu görülmüştür. Bu çalışmanın sonuçları bütüncül tek durum deseni olarak bir öğrenci ve beş haftalık bir uygulama ile sınırlıdır. Benzer bir çalışma deneysel veya başka araştırma yöntemleri ile gerçekleştirilerek karşılaştırmalı çalışmalar yapılabilir. İlkokul dördüncü sınıf öğrencisi ile yapılan bu çalışmada kullanılan model oluşturma etkinlikleri ve ayrıntılı geri bildirimler, ilkokul dönemindeki farklı sınıf düzeylerine uygulanarak karşılaştırmalı çalışmalar yapılabilir. Bu çalışmada Borromeo Ferri'nin (2006) bilişsel matematiksel modelleme yeterlikleri kapsamında değerlendirme yapılmıştır. Başka çalışmalarda daha farklı modelleme döngüleri ele alınarak öğrencilerin modelleme yeterlikleri değerlendirilebilir ve geliştirilebilir. Ayrıca başka çalışmalarda matematiksel modelleme yeterliklerinin gelişiminde etkili olabilecek daha farklı öğretim ve öğrenme yolları denebilir.

Etik Kurul İzin Bilgisi: Bu araştırma, Dokuz Eylül Üniversitesi Sosyal ve Beşeri Bilimler Araştırma ve Yayın Etik Kurulunun 13/07/2020 tarihli 16/1 sayılı kararı ile alınan izinle yürütülmüştür.

Yazar Çıkar Çatışması Bilgisi: Yazarların beyan edeceği bir çıkar çatışması yoktur.

Yazar Katkısı: Yazarlar çalışmanın tüm kısımlarına eşit düzeyde katkı sağlamışlardır.

Kaynakça

- Asempapa, R. S., & Foley, G. D. (2018). Classroom assessment of mathematical modeling tasks. *Education Research Highlights in Mathematics, Science and Technology*, 6, 1-20.
- Besser, M., Blum, W., & Klimczak, M. (2013). Formative assessment in everyday teaching of mathematical modelling: implementation of written and oral feedback to competency-oriented tasks. G. Stillman, W. Blum, J. Brown ve G. Kaiser (Eds.), *Teaching mathematical modelling: Connecting to research and practice* (pp. 469-478) içinde. Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-6540-5_40
- Besser, M., Blum, W., & Leiss, D. (2015). How to support teachers to give feedback to modelling tasks effectively? Results from a teacher-training-study in the Co2CA project. In G. Stillman, W. Blum ve M. S. Biembengut (Eds.), *Mathematical modelling in education research and practice: Cultural, social and cognitive influences* (pp.151-160). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-18272-8>
- Black, P., & Wiliam, D. (1998). Inside the black box: Raising standards through classroom assessment. *Phi Delta Kappan* 80(2), 139-148.
- Black, P., Harrison, C., Lee, C., Marshall, B., & Wiliam, D. (2004). Working inside the black box: Assessment for learning in the classroom. *Phi Delta Kappan*, 86(1), 9-21.
- Bliss, K., & Libertini, J. (2016). What is mathematical modeling? In S. Garfunkel & M. Montgomery (Eds.), *GAIMME: Guidelines for assessment & instruction in mathematical modeling education* (pp. 7-21). Society for Industrial and Applied Mathematics SIAM.
- Blomhøj, M. (2011). Modelling competency: Teaching, learning and assessing competencies-Overview. In Kaiser, G., Blum, W., Borromeo Ferri, R., & Stillman, G. (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (pp. 343-347). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_34
- Blomhøj, M., & Jensen, T. H. (2003). Developing mathematical modelling competence: Conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and its Applications*, 22(3), 123-139. <https://doi.org/10.1093/teamat/22.3.123>

- Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? In S. J. Cho (Ed.), *Proceedings of the 12th international congress on mathematical education: Intellectual and attitudinal challenges* (pp. 73-96). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3>
- Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM*, 38(2), 86-95. <https://doi.org/10.1007/BF02655883>
- Blum, W., & Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt?. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(1), 45-58.
- Canbazoğlu, H. B. ve Tarım, K. (2021). İlkokulda matematiksel modelleme için bir öğretim süreci. *Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi Dergisi*, (51), 210-225. <https://doi.org/10.53444/deubefd.825361>
- Canbazoğlu Albayrak, H. B. ve Tarım, K. (2023). İlkokul dönemi öğrencilerinin bilişsel matematiksel modelleme yeterlikleri. *SDU International Journal of Educational Studies*, 10(1), 1-21. <https://doi.org/10.33710/sduijes.1191490>
- Carlson, M. A., Wickstrom, M. H., Burroughs, E. A., & Fulton, E. W. (2016). A case for mathematical modeling in the elementary school classroom. In C. R. Hirsch & A. R. McDuffie (Eds.), *Mathematical modeling and modeling mathematics* (pp. 121-129). National Council of Teachers of Mathematics.
- Carlson, M., Larsen, S., & Lesh, R. (2003). Integrating a models and modeling perspective with existing research and practices. In R. Lesh & H. Doerr (Eds), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 465-478). Lawrence Erlbaum Associates.
- Chan, C. M. E., Ng, K. E. D., Widjaja, W., & Seto, C. (2012). Assessment of primary 5 students' mathematical modelling competencies. *Journal of Science and Mathematics Education in Southeast Asia*, 35(2), 146-178.
- Corbett, A. T., & Anderson, J. R. (2001). Locus of feedback control in computer-based tutoring: Impact on learning rate, achievement and attitudes. In Jacko, J., Sears, A., Beaudouin-Lafon, M. & Jacob, R. (Eds.), *Proceedings of ACM CHI'2001 Conference on Human Factors in Computing Systems* (pp. 245-252). ACM Press. <https://doi.org/10.1145/365024.365111>
- Diefes-Dux, H. A., Zawojewski, J. S., Hjalmarsen, M. A., & Cardella, M. E. (2012). A framework for analyzing feedback in a formative assessment system for mathematical modeling problems. *Journal of Engineering Education*, 101(2), 375-406. <https://doi.org/10.1002/j.2168-9830.2012.tb00054.x>
- Doerr, H. M., & English, L. D. (2003). A modeling perspective on students' mathematical reasoning about data. *Journal for Research in Mathematics Education*, 34(2), 110-136. <https://doi.org/10.2307/30034902>

- English, L. (2012). Data modelling with first-grade students. *Educational Studies in Mathematics*, 81(1), 15-30. <https://doi.org/10.1007/s10649-011-9377-3>
- English, L. D. (2006). Introducing young children to complex systems through modeling. In M. Chinnappan, P. Grootenboer & R. Zevenbergen (Eds.), *Proceedings of the 29th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 195-202). MERGA Inc.
- English, L. D. (2007). Interdisciplinary modelling in the primary mathematics curriculum. In J. Watson & K. Beswick (Eds.), *Mathematics: Essential Research, Essential Practice* (pp. 275-284). MERGA Inc.
- English, L. D., & Watters, J. J. (2004). Mathematical modelling with young children. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 335-342.
- English, L. D., & Watters, J. J. (2005). Mathematical modeling in third-grade classrooms. *Mathematics Education Research Journal*, 16, 59-80. <https://doi.org/10.1007/BF03217401>
- Goldin, G. (2000). A scientific perspective on structures, task-based interviews in mathematics education research. In R. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 547-590). Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Publishers.
- Greefrath, G., & Vorhölter, K. (2016). *Teaching and learning mathematical modelling: Approaches and developments from German speaking countries*. Springer Nature. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-45004-9>
- Haas, B., Kreis, Y., & Lavicza, Z. (2020). Connecting the real world to mathematical models in elementary schools in Luxemburg. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 40(2), 1-6.
- Haines C., & Crouch R. (2007). Mathematical modelling and applications: Ability and competence frameworks. In W. Blum, P. L. Galbraith, H. W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education* (pp. 417-424). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_46
- Hattie, J., & Timperley, H. (2007). The power of feedback. *Review of Educational Research*, 77(1), 81-112. <https://doi.org/10.3102/003465430298487>
- Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM*, 38(3), 302-310. <https://doi.org/10.1007/BF02652813>
- Kaiser, G., Schwarz, B., & Tiedemann, S. (2010). Future teachers' professional knowledge on modeling. In R. Lesh, P. L. Galbraith, C. R. Haines & A. Hurford (Eds.), *Modeling students' mathematical modeling competencies* (pp. 433-444). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0561-1_37

- Kulhavy, R. W., & Stock, W. (1989). Feedback in written instruction: The place of response certitude. *Educational Psychology Review*, 1(4), 279–308. <https://doi.org/10.1007/BF01320096>
- Lesh, R. A., & Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching and learning. In R. A. Lesh & H. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 3-34). Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
- Levy, R., Zbiek, R. M., Galluzzo, B., & Long, M. (2016). Mathematical modeling in the early and middle grades: Prekindergarten through grade 8. In S. Garfunkel & M. Montgomery (Eds.), *GAIMME: Guidelines for assessment & instruction in mathematical modeling education* (pp. 23-43). Society for Industrial and Applied Mathematics SIAM.
- Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM*, 38(2), 113-142. <https://doi.org/10.1007/BF02655885>
- Maaß, K., & Mischo, C. (2011). Implementing modelling into day-to-day teaching practice-The project STRATUM and its framework. *Journal Für Mathematik-Didaktik*, 1(32), 103-131. <https://doi.org/10.1007/s13138-010-0015-x>
- Mason, B. J., & Bruning, R. (2001). *Providing feedback in computer-based instruction: What the research tells us*. Center for Instructional Innovation, University of Nebraska-Lincoln.
- Miles, M. B., & Huberman, A. M. (2016). *Qualitative data analysis: An expanded sourcebook*. Sage Publications.
- Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2018). *İlkokul matematik (1-4. Sınıflar) dersi öğretim programı*. Ankara: Talim Terbiye Başkanlığı Yayınları.
- Moreno, R. (2004). Decreasing cognitive load for novice students: Effects of explanatory versus corrective feedback in discovery-based multimedia. *Instructional Science*, 32, 99-113. <https://doi.org/10.1023/B:TRUC.0000021811.66966.1d>
- Mory, E. H. (2004). Feedback research review. In D. Jonassen (Ed.), *Handbook of research on educational communications and technology* (pp. 745-783). Lawrence Erlbaum.
- Narciss, S., & Huth, K. (2004). How to design informative tutoring feedback for multimedia learning. H. M. Niegemann, D. Leutner & R. Brunken (Eds.), *Instructional design for multimedia learning* (pp. 181-195). Waxmann.
- National Research Council [NRC] (2001). *Adding it Up: Helping Children Learn Mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.
- Organisation for Economic Co-operation and Development [OECD]. (2023a). *PISA 2022 assessment and analytical framework*. Paris: OECD Publishing.
- Organisation for Economic Co-operation and Development [OECD]. (2023b). *PISA 2022 results (Volume I): The state of learning and equity in education*. Paris: OECD Publishing.

- Paas, F., Renkl, A., & Sweller, J. (2003). Cognitive load theory and instructional design: Recent developments. *Educational Psychologist*, 38, 1-4. https://doi.org/10.1207/S15326985EP3801_1
- Shute, V. J. (2008). Focus on formative feedback. *Review of Educational Research*, 78(1), 153-189. <https://doi.org/10.3102/0034654307313795>
- Shute, V. J., Hansen, E. G., & Almond, R. G. (2007). An assessment for learning system called ACED: Designing for learning effectiveness and accessibility. *ETS Research Report Series*, 2007(2), i-45. <https://doi.org/10.1002/j.2333-8504.2007.tb02068.x>
- Steen, L. A., Turner, R., & Burkhardt, H. (2007). Developing mathematical literacy. *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study* (pp. 285-294). Springer US.
- Suh, J., Matson, K., Seshaiyer, P., Jamieson, S., & Tate, H. (2021). Mathematical modeling as a catalyst for equitable mathematics instruction: Preparing teachers and young learners with 21st century skills. *Mathematics*, 9(2), 162. <https://doi.org/10.3390/math9020162>
- Şahin, N. (2019). *İlkokul 4. sınıf öğrencilerinin bilişsel modelleme yeterliklerinin belirlenmesi ve değerlendirilmesi*. [Doktora tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi]. Ulusal Tez Merkezi.
- Şahin, N. ve Eraslan, A. (2016). İlkokul öğrencilerinin modelleme süreçleri: Suç problemi. *Eğitim ve Bilim*, 41(183), 47-67. <http://dx.doi.org/10.15390/EB.2016.6011>
- Şahin, N. ve Eraslan, A. (2017). Fourth-grade primary school students' thought processes and challenges encountered during the butter beans problem. *Educational Sciences: Theory & Practice*, 17(1), 105-127. <https://doi.org/10.12738/estp.2017.1.0038>
- Tekin Dede, A. (2015). *Matematik derslerinde öğrencilerin modelleme yeterliklerinin geliştirilmesi: Bir eylem araştırması*. [Doktora tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi]. Ulusal Tez Merkezi.
- Tekin-Dede, A. ve Bukova-Güzel, E. (2018). A rubric development study for the assessment of modeling skills. *The Mathematics Educator*, 27(2), 33-72.
- Tran, D., & Dougherty, B. J. (2014). Authenticity of mathematical modeling. *The Mathematics Teacher*, 107(9), 672-678. <https://doi.org/10.5951/mathteacher.107.9.0672>
- Ulu, M. (2017). Examining the mathematical modeling processes of primary school 4th-grade students: Shopping problem. *Universal Journal of Educational Research*, 5(4), 561-580. <https://doi.org/10.13189/ujer.2017.050406>
- Verschaffel, L., De Corte, E., & Vierstraete, H. (1999). Upper elementary school pupils' difficulties in modeling and solving nonstandard additive word problems involving ordinal numbers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(3), 265-285. <https://doi.org/10.2307/749836>

Wake, G. (2010). Modelling and formative assessment pedagogies mediating change in actions of teachers and learners in mathematics classrooms. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of CERME 6* (pp. 2086-2095). Institut Français de Éducation.

Watters, J. J., English, L. D., & Mahoney, S. (2004). Mathematical modeling in the elementary school. *American Educational Research Association Annual Meeting* (pp. 1-12). San Diego.

Yamane, T. (2009). *Temel örnekleme yöntemleri*. Literatür Yayıncılık.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2016). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. (10. Baskı). Seçkin Yayıncılık.

Yin, R. K. (2017). *Durum çalışması araştırması uygulamaları* (İ. Günbayı, Çev.). Nobel Akademik Yayıncılık.

Ek A. Uygulanan Matematiksel Modelleme Problemleri

RESTAURANT PROBLEMİ

McDees restoranı yöneticisi, insanlara “Neden McDees’i tercih ediyorsunuz?” sorusunu sorarak insanların McDees’e gelmelerinin en önemli 5 sebebini bulmaya çalışmaktadır. Bunun içinde 10 kişi ile anket yapmıştır. İnsanlar, “patates kızartması, hamburger, çocuk menüleri, hızlı olması ve fiyat” durumlarına göre önem derecelerini 1’den 5’e kadar puanlamışlardır. 1 puan, en düşük; 5 puan ise en yüksek önem derecesidir. Aşağıdaki tabloda anket sonuçları gösterilmektedir.

GÖREVİNİZ

Aşağıdaki verileri kullanarak insanların tercih nedenlerini, en önemliden en önemsiz doğru sıralayan bir liste oluşturmanız gerekmektedir. Ayrıca McDees yöneticisine sisteminizin nasıl çalıştığını açıklamalısınız.

	Patates Kızartması	Hamburger	Çocuk Menüleri	Hızlı Olması	Fiyat
Müşteri 1	1	3	2	5	4
Müşteri 2	4	3	1	2	5
Müşteri 3	2	1	5	3	4
Müşteri 4	2	3	5	4	1
Müşteri 5	1	2	4	3	5
Müşteri 6	3	4	5	1	2
Müşteri 7	4	5	1	3	2
Müşteri 8	1	2	5	3	4
Müşteri 9	2	3	4	1	5
Müşteri 10	2	1	5	4	3

ELMALI TURTA PROBLEMİ

Hafta sonu sınıftan birkaç arkadaşını evine davet eden Sevinç, annesinden arkadaşları için meşhur elmalı turtasını yapmasını istiyor. Evde hiç elma kalmadığını fark eden annesi Sevinç'ten 3 kg elma alıp gelmesini istemiştir. Elma almak için Sevinç'in iki seçeneği vardır:

1.Seçenek: Evinin hemen yanındaki manavda yarım kg elma 1 TL'dir.

2.Seçenek: Evinden biraz uzaklıktaki pazarda 1 kg elma 1 TL'dir. Fakat pazar uzak olduğu için mutlaka herhangi bir ulaşım aracına (otobüs, dolmuş veya metro) binmesi gerekmektedir.

Sizce Sevinç'in hangi seçeneği seçmesi mantıklı olacaktır? Düşüncelerinizi nedenleriyle açıklayınız.

DİPNOT: Adana'da herhangi bir ulaşım aracına (otobüs, dolmuş veya metro) binerse;

Özel halk otobüslerinde kartsız binişler 4 TL.

Kentkart ile özel halk otobüsleri ve dolmuşlar, siviller için 3 TL.

Kentkart ile özel halk otobüsleri ve dolmuşlar, öğrenci için 2 TL.

Belediye otobüsleri ve metro, sivil için 2 TL.

Belediye otobüsleri ve metro, öğrenci için 1 TL.

OKULDA ZAMAN PROBLEMİ

Deniz okulda çok fazla zaman geçirdiğini düşünmekte ve "Okulda zaman nasıl geçiyor anlamıyorum! Neredeyse yılın çoğunu okulda geçiriyorum." demektedir. Bu durum hakkında ne düşünüyorsunuz? Siz de yılın çoğunu okulda geçirdiğinizi mi düşünüyorsunuz? Gerekli hesaplamaları yaparak Deniz'in haklı olup olmadığını bulunuz.

FASULYE PROBLEMİ

Çiftçi Ali Amca, fasulye yetiştirirken hangi ışık koşulunun daha iyi bir tercih olduğuna karar vermeye çalışmaktadır. Çiftçi Ali Amca, karar verirken yardımcı olacağını düşündüğü için fasulye bitkisini yetiştiren Çiftçiler Birliği'ni ziyaret etmiş ve iki farklı ışık koşulu kullandıklarını görmüştür. İki farklı ışık koşulu;

- Fasulyeleri açık havada gün ışığında yetiştirme
- Fasulyeleri sadece gölge altında yetiştirme

Çiftçiler Birliği on hafta sonunda, fasulyelerin ağırlığını ölçmüş ve kayıt etmişlerdir. Gün ışığında ve gölgede olmak üzere dört (4) sıra fasulye yetiştirmişlerdir.

GÜN IŞIĞINDA

Fasulye Bitkisi	6. Hafta	8. Hafta	10. Hafta
Sıra1	9 kg	12 kg	13 kg
Sıra 2	8 kg	11 kg	14 kg
Sıra 3	9 kg	14 kg	18 kg
Sıra 4	10 kg	11 kg	17 kg

GÖLGEDE

Fasulye Bitkisi	6. Hafta	8. Hafta	10. Hafta
Sıra1	5 kg	9 kg	15 kg
Sıra 2	5 kg	8 kg	14 kg
Sıra 3	6 kg	9 kg	12 kg
Sıra 4	6 kg	10 kg	13 kg

GÖREVİNİZ


1. Yukarıdaki verileri kullanarak fasulye yetiştirirken en çok ürünü alabilmek için tercih edilecek en uygun ışık koşulunu seçiniz ve neden bunu tercih ettiğinizi Ali Amcaya bir mektupla açıklayınız.
2. Gün ışığında ve gölgede fasulyelerin 12. Hafta sonunda ağırlıklarını tahmin ediniz ve bu tahmini nasıl yaptığınızı Ali Amcaya bir mektupla açıklayınız.

AKARYAKIT İSTASYONU PROBLEMİ

Arabanızın yakıtı bitmek üzere ve deponuzu tamamen doldurmak için nereden yakıt alacağınıza bir türlü karar veremiyorsunuz. Eviniz Çukurova'da ve yakıt almak için iki seçeneğiniz var. Birinci seçenek hemen evinizin yanındaki akaryakıt istasyonu iken, ikinci seçenek evinizden 10 km uzaklıktaki Seyhan'da bulunan bir akaryakıt istasyonudur. Bu iki akaryakıt istasyonlarındaki yakıtların 1 litre fiyatları şöyledir:

	1 litre benzin fiyatı	1 litre dizel fiyatı
Çukurova	5 TL	4 TL
Seyhan	4 TL	3 TL

Aşağıdaki tablodan seçtiğiniz bir araba markasını göz önünde bulundurarak, Çukurova'dan mı yoksa Seyhan'dan mı yakıt almanızın daha karlı olacağına karar veriniz.

Marka/Model	10 km'de Harcanan Ortalama Yakıt Miktarı	Yakıt Deposu
 <p>Toyota Yaris</p>	3 litre (Benzin)	42 litre

 Hyundai i20	2 litre (Benzin)	45 litre
 Mini Cooper	4 litre (Benzin)	40 litre
 Citroen C-Elysee	1 litre (Dizel)	50 litre

SAMAN BALYASI PROBLEMİ



Şekilde en alt sırada 5 saman balyası bulunmaktadır. Bir st sıraya geçildiğinde ise her defasında bir saman balyası eksilmektedir. Bir başka deyişle alttan ste doğru 5, 4, 3, 2 ve 1 tane saman balyası sıralanmaktadır. Buna göre tm yiğinin yksekliliğini yaklaşık olarak hesaplayınız.



Developing Cognitive Mathematical Modeling Competencies of a Fourth-Grade Elementary School Student: Elaborated Feedback*

H. Beyza CANBAZOĞLU ALBAYRAK¹, Esra BUKOVA GÜZEL²

Abstract

This study aimed to examine the effect of the elaborated feedback on developing the mathematical modeling competencies of a fourth-grade student. In the research, holistic single case design was employed and task-based interview method was used as a data collection tool. The rubric for the Assessment of Modeling Skills (RAMS) developed by Tekin Dede and Bukova Güzel (2018) was used to detect the level of the fourth-grade elementary school student both at the beginning and at end of the research and to explain the development of the student's modeling competencies throughout the research process. When the student's cognitive mathematical modeling competencies were evaluated at the beginning of the research, it was found that the student had difficulties in understanding the problem, simplifying, interpreting and validating competencies. When the mathematical modeling competencies of the student were evaluated at the end of the process, it was found that there were a number of improvements in the competencies of understanding the problem, simplifying the problem, mathematizing, working mathematically, interpreting and validating. In other words, thanks to the elaborated feedback provided to the fourth-grade elementary school student regarding each mathematical modeling competence, it was observed that the student's modeling competencies displayed progress.

Article Details

Research Article

Received

01/05/2023

Accepted

29/07/2024

Published

23/09/2024

Key words

Cognitive mathematical modeling, Elementary school, Modeling competence development, Mathematical modeling

¹ Çukurova University, 0000-0001-5596-5019, beyza.cnbzgl0@gmail.com

² Dokuz Eylül University, 0000-0001-7571-1374, esra.bukova@gmail.com

Suggested Citation:

Canbazoğlu Albayrak, H. B. & Bukova Güzel, E. (2024). Developing cognitive mathematical modeling competencies of a fourth-grade elementary school student: Elaborated feedback. *Pamukkale University Journal of Education [PUJE]*, 62, 29-71. <https://doi.org/10.9779/pauefd.1290603>

Introduction

Mathematical modeling is a cyclical process of mathematicizing a real-world situation, obtaining its mathematical result, and interpreting the obtained mathematical result in the context of real life (Lesh & Doerr, 2003). According to the 2016 report Guidelines for Assessment and Teaching in Mathematical Modeling Education (GAIMME) (Bliss & Libertini, 2016), mathematical modeling tasks do not always result in a simple or precise solution. Therefore, in mathematical modeling, assessment is challenging, but it should not be forgotten that it is an important element supporting the process. In this sense, Asempapa and Foley (2018) point out that the role of assessment in mathematical modeling is critical and complex, and further state that the common question of teachers and mathematics educators is how to evaluate the mathematical modeling process.

In mathematical modeling, it is necessary to review the purposes of assessment in order to shape why assessment should be done and how it can be done. According to the National Research Council (NRC, 2001), there are three elementary assessment purposes: (a) assisting student learning (formative assessment), (b) measuring individual success (summative assessment), and (c) program assessment. When we consider assessment in mathematical modeling for these purposes, we can say that formative assessment will contribute to the development of students' modeling competencies. Formative assessment provides information to be used as feedback to change teaching and learning activities (Asempapa & Foley, 2018; Black & William, 1998). In this vein, research on teachers using formative assessment emphasizes that there are changes that lead to increases in student achievement (Black et al., 2004). Thus, teachers and students can determine the level, type and amount of the individual's progress. In this context, feedback, which is one of the formative assessment types, stands out. Feedback is defined as information that aims to change the student's thinking or behavior in order to improve student learning, and is conveyed to the student accordingly (Shute, 2008). Due to the complex structure of model-eliciting activities and the high cognitive task demands expected from the student during the process, it is emphasized that students should be given formative feedback regarding their solutions both during and after the process (Asempapa & Foley, 2018; Besser et al., 2013; Besser et al., 2015; Diefes-Dux et al., 2012; Levy et al., 2016). In this sense, how feedback can be provided with systematic integrity during the modeling process and whether it contributes to the development of students' modeling competencies is an issue that needs to be investigated. In this regard, this study focuses on the inclusion of elaborated feedback, which is a formative assessment type, in the assessment process in order to improve the modeling competencies of an elementary school student.

PISA (Programme for International Student Assessment) applications, which aim to measure students' ability to relate mathematics to real life, in other words, their mathematical literacy skills, foreground mathematical models and modeling processes. According to the latest PISA 2022 results, the rate of students in our country at the "upper performance level (fifth and sixth competence levels)", where students create mathematical models and evaluate the results they obtain in the context of real life, is expressed as 5.4% (Organization for Economic Co-operation and Development [OECD], 2023a, 2023b). These rates appear to be below the OECD average (9%) for the top performance level (OECD, 2023a, 2023b). For this reason, the importance of exposing students to mathematical modeling activities that include real-life problem situations, starting from the elementary school period, becomes evident (Carlson et al., 2016; English, 2012; Watters et al., 2004). Although the elementary school mathematics course curriculum (Ministry of National Education [MNE], 2018) includes goals and achievements to improve students' mathematical literacy, most mathematics or elementary school teachers rarely try to relate mathematics lessons to students' daily lives (Steen et al., 2007). Thus, students cannot make connections between mathematics and daily life (Tran & Dougherty, 2014), and miss the opportunity to apply the knowledge they have learned to the problem situations they encounter (Verschaffel et al., 1999). In this context, mathematical modeling can improve mathematical literacy by helping students to see how mathematics supports their participation in and understanding of the world (Carlson et al., 2016; Şahin, 2019).

There have been a limited number of studies with a focus on the mathematical modeling competencies of elementary school children (Canbazoğlu & Tarım, 2021; Canbazoğlu Albayrak & Tarım, 2023; Şahin, 2019; Şahin & Eraslan, 2016, 2017; Ulu, 2017). To illustrate, in the study conducted by Canbazoğlu and Tarım (2021), a teaching process was put forward for the implementation of model-eliciting activities in an elementary school, and the implementation process of a model-eliciting activity was discussed. Additionally, in the studies conducted by Canbazoğlu Albayrak and Tarım (2023), Şahin (2019), Şahin and Eraslan (2016, 2017), and Ulu (2017), it was attempted to reveal the mathematical modeling processes and the difficulties of third and fourth-grade elementary school students working with the modeling activity. When the limited number of studies on the elementary school period are examined, it becomes clear that the focus of the studies is the modeling process and the difficulties experienced in this process. In the relevant studies (Canbazoğlu Albayrak & Tarım, 2023; Şahin, 2019; Şahin & Eraslan, 2016, 2017; Ulu, 2017), it was concluded that elementary school students had difficulties in understanding the problem, mathematizing, obtaining real results, interpreting and

validating it. As a result of these studies, although it was concluded that elementary school students had difficulties in mathematical modeling processes and competencies, it was revealed that whether elementary school students were aware of such difficulties, the reasons for their deficiencies and how to eliminate these deficiencies were not discussed. In other words, no studies have been found to improve the modeling competencies of elementary school students. In addition, although elaborated feedback has many effects on an individual's learning and performance, no study has been found in the national and international literature examining the effect of elaborated feedback on the development of mathematical modeling competencies of elementary school students. Considering this niche in the relevant, it is thought that an important gap in the literature will be filled by disseminating the application of mathematical modeling activities in the elementary school period, providing sample applications that elementary school teachers can use in the learning-teaching process, and conducting studies on the development of modeling competencies of elementary school students. Accordingly, this study aimed to examine the effect of the elaborated feedback on developing the mathematical modeling competencies of a fourth-grade student. To this end, the current study aims to answer the following research questions:

1. What is the impact of the elaborated feedback on developing the mathematical modeling competencies of a fourth-grade student?
2. What is the content of the elaborated feedback provided throughout the process?

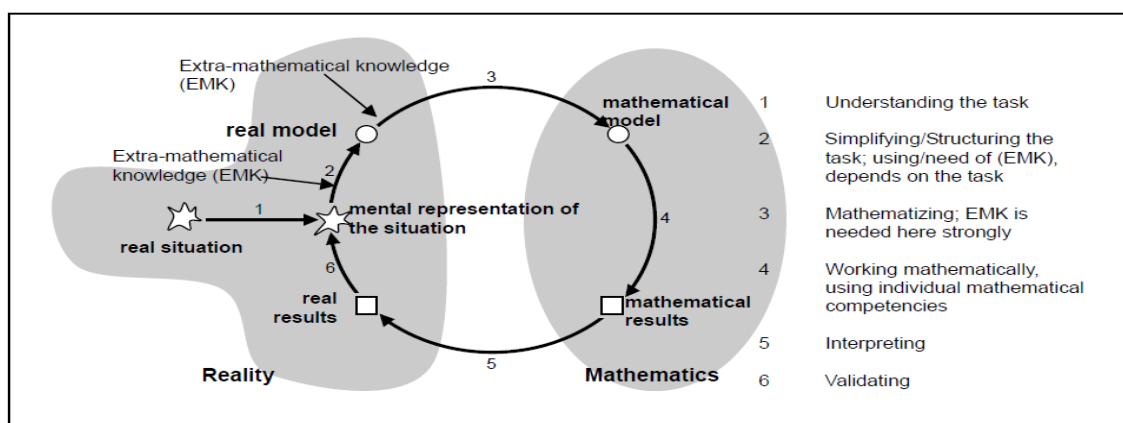
Theoretical Framework

Assessment of Cognitive Mathematical Modeling Competence

Cognitive modeling is one of the mathematical modeling perspectives that attempts to explain the cognitive structures and processes that occur in students' minds during the solution of mathematical modeling activities (Kaiser & Sriraman, 2006). Mathematical modeling competence is the ability of an individual to carry out all aspects of the mathematical modeling process independently and is internalized in a certain context (Blomhøj & Jensen, 2003). To determine mathematical modeling competencies, modeling cycles that explain the modeling process are considered (Blomhoj, 2011). In this study, Borromeo Ferri's (2006) mathematical modeling process was used to examine the mathematical modeling competencies of elementary school students (See Figure 1).

Figure 1

Modelling Cycle under a Cognitive Perspective (Borromeo Ferri, 2006)



In the modeling cycle, cognitive modeling competencies consist of understanding the task, simplifying the task, mathematizing, working mathematically, interpreting and validating. In the modeling process, students first make sense of the problem situation and construct a mental representation of the situation (Borromeo Ferri, 2006). In the transition from the mental representation of the situation to the real model, the given situation is simplified, structured, made clearer, and assumptions and requirements are made to solve the problem (Borromeo Ferri, 2006). The transition from the real model created based on students' verbal expressions to the mathematical model is called the mathematizing step (Borromeo Ferri, 2006). Students create mathematical model/s by creating their own representations through figures, graphs and equations (Borromeo Ferri, 2006). In the process of working mathematically (performing arithmetic operations, reading tables, etc.), students solve models using their modeling competencies, and obtain mathematical results (Borromeo Ferri, 2006). The process of interpreting the results requires moving from mathematical results to real results (Borromeo Ferri, 2006). After obtaining the real results, students benefit from real-life experiences and a validation process takes place in the context of checking the compatibility between the real results and their mental representations (Borromeo Ferri, 2006).

The actions taken by the student during the model-eliciting activity were evaluated according to these steps, and their competencies in this process were the focus of feedback. In other words, by giving elaborated feedback to the student during and after the process according to each competency step in the modeling cycle, efforts were made to help her become aware of her deficiencies in cognitive modeling competencies and improve these deficit areas. In this

regard, cognitive modeling competencies in the modeling cycle consist of understanding the task, simplifying, mathematizing, working mathematically, interpreting and validating.

Elaborated Feedback

Feedback, one of the formative assessment types, is defined as revealing information about the student's performance or understanding of student performance by the teacher (Hattie & Timperley, 2007). In this context, feedback is a result of the individual's performance (Diefes-Dux et al., 2012). It turns out that feedback plays an important role in the individual's learning process and performance (Besser et al., 2013; Besser et al., 2015; Greefrath and Vorhölter, 2016; Shute, 2008; Wake, 2010). The primary purpose of feedback is considered to be to increase student knowledge, skills, and understanding in mathematical content areas (e.g., numbers and operations, geometry, measurement, data manipulation) or general skills (e.g., problem solving, modeling, performing arithmetic operations) (Black & Wiliam, 1998).

In this vein, Kulhavy and Stock (1989) state that effective feedback provides two types of information to the student: validating and elaboration. *Verification* is the feedback given to the student about whether an answer is correct or not. *Elaboration*, on the other hand, emphasizes the informative aspect of the feedback while providing relevant clues to guide the student to find the correct answer. For example, elaborated feedback may include covering the topic, addressing the answer, discussing specific errors, providing previously studied examples, or providing guidance to the student (Shute, 2008). In addition, elaborated feedback generally provides explanations in line with the student's statements, actions and answers, and offers information to the student about how specific actions should be carried out. In this sense, there are a number of studies indicating that feedback specific to such discourses, actions and answers, increases student success, especially learning efficiency, more than validating feedback (Corbett & Anderson, 2001; Mory, 2004; Shute et al., 2007). In addition, targeted feedback increases students' learning and task performance (Asempapa & Foley, 2018; Diefes-Dux et al., 2012; Greefrath & Vorhölter, 2016; Shute, 2008; Wake, 2010). Accordingly, in this study, elaborated feedback was provided to the student according to her cognitive modeling competencies during and after the model-eliciting activity. This feedback was aimed at revealing and helping the student to gain proficiency in the relevant field when she did not demonstrate the cognitive modeling competence expected from her or did not demonstrate the relevant competence completely.

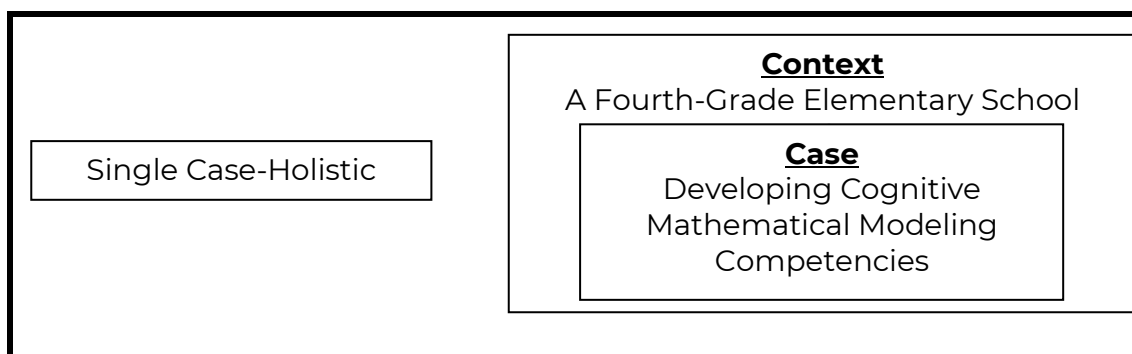
Method

Research Design

In the study, a single case-holistic design was adopted because the answer to the question of how the elaborated feedback affected the mathematical modeling competencies of a fourth-grade student was sought. Single case-holistic design, situations that no one has studied or reached before, can be studied using the single case-holistic design (Yin, 2017). It is important to study such situations in order to make a previously unknown subject visible to future researchers and form a basis or guide future research (Yıldırım & Şimşek, 2016). Since there was no previous study on the development of cognitive mathematical modeling competencies of elementary school students, the single case-holistic design was used in the research in order to provide guidance for further studies with the documents to be obtained. As seen in Figure 2, “a fourth-grade elementary school student” was used as the research context and “developing cognitive mathematical modeling competencies” was used as the case. In line with the ethical requirements of the research, the research was carried out with the permission of the ethics commission of the relevant university with the decision dated 13.07.2020 and numbered 16/1.

Figure 2

Single Case-Holistic Design Model of the Research (Adapted from Yin (2017, p. 8).



Participants

The research was conducted in the 2020-2021 academic year. The participant was a fourth-grade elementary school student studying at a public school in the south of Turkey, with a medium socio-economic level. Typical case sampling was used in the process of identifying the public school. In this way, an average, not extraordinary (Yamane, 2009), typical school was chosen. In addition, a criterion sampling method was employed to reach the participants. As a criterion in this study, a student who had no experience with model-eliciting activities was included in the study. The student's mathematics achievement

was at an average level. In this way, an attempt was made to reflect a general situation. The data collection process was carried out in 2020. During this period, due to the new emergence of the pandemic and the concerns of the other students about the face-to-face meeting process, a student and her parent, both of whom volunteered to participate in the study, were included in the study.

The letter “S” was used as a code name to ensure confidentiality of the participant. S was a 10-year-old female student. She received pre-school education and attended after-school study hours at her school. The purpose of attending after-school study was due to the fact that her parents could not pick her up from the school at as they worked. In other words, there was no course in which the student failed. The activities such as doing homework and reviewing lessons were mostly done during study hours. Finally, the student’s academic success in mathematics was at an acceptable level.

Data Collection Tools

In the study, the task-based interview method, which is used in qualitative research in mathematics education to obtain information about the current and developing mathematical knowledge and problem-solving behaviors of an individual or a group of students, was employed. Task-based interview, as a form of clinical interview, is designed in a way that the individual can interact with a task environment (Goldin, 2000). In this respect, in this study, the student was given model-eliciting activities and required to work on a task, and in this way the modeling competence and student progress was tried to be detected. In addition, all modeling processes of the student were recorded with a voice recorder and video camera. The reason for the video and audio recording was explained to the student in the first application, and the student was not negatively affected by the video.

During the task-based interview process, *Restaurant* (Doerr & English, 2003), *Apple Pie* (Tekin Dede, 2015) and *Time in School* (Maaß & Mischo, 2011) problems were used in the pre-measurement and post-measurement processes. In the actual application process, *Butter Beans* (English & Watters, 2005), *Fuel Station* (Tekin Dede, 2015) and *Straw Bale* (Tekin Dede, 2015) were used. The learning areas to which the mathematical modeling problems used are relevant (MNE, 2018) are presented in Table 1. Additionally, the applied mathematical modeling problems are presented in Appendix A.

Table 1*Learning Areas of Mathematical Modeling Problems*

Application Process	Mathematical Modeling Problems	Learning Areas
Pre- Measurement and Post-Measurement	Restaurant	Addition with Natural Numbers Data Collection and Evaluation
	Apple Pie	Addition and Multiplication with Natural Numbers
	Time in School	Time Measuring
Actual Application	Butter Butter Beans	Addition with Natural Numbers Data Collection and Evaluation
	Fuel Station	Addition and Multiplication with Natural Numbers
	Straw Bale	Multiplication with Natural Numbers Length Measuring

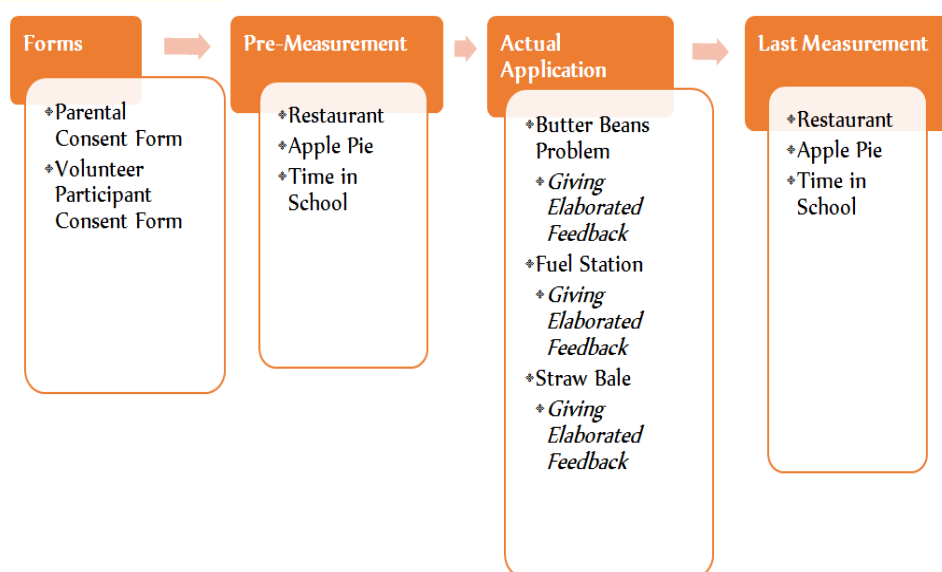
Data Collection Process

In order to reveal the development of mathematical modeling competencies of the fourth-grade elementary school student, three different model-eliciting activities (*Restaurant*, *Apple Pie* and *Time in School*) were used as pre-measurement and post-measurement at the beginning and at end of the process. During the pre-measurement and post-measurement processes, the student was asked to solve three different model-eliciting activities. After the pre-measurement process was completed, the actual application process started.

In other words, during the process of providing feedback to the student, the student was required to work on a model-eliciting activity every week, and the three-week actual application process was completed with three different model-eliciting activities (*Butter Beans*, *Fuel Station* and *Straw Bale*) in total (See Figure 3). The five-week data collection process was carried out by the first researcher as an extracurricular activity in the meeting room of Çukurova University's Faculty of Education. The student was asked to solve mathematical modeling problems without a time limit, as suggested by Carlson et al. (2003). Each activity took an average of 45-60 minutes.

Figure 3

Data Collection Process



During the application, according to the cognitive modeling cycle, the student was asked to express how she understood the problem, how she formed her assumptions, how she would create models and how she would solve the models she created, and how she would interpret and validate the result she found. Besides, elaborated feedback was given to the student on how she was progressing in line with her statements. Then, at the end of each process, after the student completed her solution, the written solution sheet was taken by the researchers. Then, the student's written solution paper was evaluated by the researchers according to the modeling process in Borromeo Ferri's (2006) study, and elaborated feedback was provided to the student by the first researcher two days before the next study cycle started. In this way, it was aimed to ensure that the student became aware of the modeling competencies during and after the process in line with the cognitive modeling competencies, and improved the modeling competency area for which feedback was provided. With the activities implemented in this way, the five-week data collection process was completed.

Data Analysis

The Rubric for the Assessment of Modeling Skills (RAMS) developed by Tekin Dede and Bukova Güzel (2018) was employed to detect the level of the fourth-grade elementary school student at both the beginning and end of the research, and to explain the progress of the student's modeling competencies throughout the research process. The dimensions of RAMS consist of the modeling competencies of

“understanding the problem, simplifying, mathematizing, working mathematically, interpreting, validating as in Borromeo Ferri’s (2006) study. While a maximum of 25 points can be obtained from the RAMS, the minimum point is 0. Accordingly, as a result of the assessment, student proficiency levels between 0-6 points are “*not having modeling competence*”; for scores between 7-12, “*have some degree of modeling competence*”; for scores between 13-21, “*have an acceptable level of modeling competence*” and for scores between 22-25 “*high level modeling competence*”, as evaluated by Tekin Dede and Bukova Güzel (2018). In addition, Miles and Huberman’s (2016) agreement percentage calculation was used for the validity and reliability of the RAMS. As a result of the validity and reliability analyses, it was found that the RAMS, whose agreement percentage was calculated as 88.8%, was valid and reliable.

While analyzing the data through the RAMS, the student’s problem-solving process, transcripts and solution papers were examined by the two researchers. During the data analysis process, the inter-coder reliability formula (Miles & Huberman, 2016) was used and the reliability between two coders was calculated as 91%. Miles and Huberman (1994) state that for good qualitative reliability, the reliability of coding should be at least 80% agreement level. In this context, it was found that the inter-coder reliability was high. In addition, the visuals illustrating the student’s written solution process papers and some of her direct quotes representing her opinions were also included.

Findings

Pre-Measurement Mathematical Modeling Competence

First, the student was given the *Restaurant*, *Apple Pie* and *Time in School* problems in written form, and she was asked to solve these problems, with the aim to detect her initial mathematical modeling competencies. The student’s initial mathematical modeling competencies are listed in Table 2.

Table 2

Pre-Measurement Mathematical Modeling Competency Level of the Student

Levels	Model Eliciting Activity		
	Restaurant	Apple Pie	Time in School
Understanding the Problem	2	0	1
Simplifying	1	2	1
Mathematizing	4	0	0
Working Mathematically	4	0	0
Interpreting	3	2	2
Validating	0	0	0
Total	14	4	4

When the pre-measurement cognitive modeling competence level of the fourth-grade elementary school student was evaluated, it was found that she received 14 points from the *Restaurant* problem, indicating an acceptable level of modeling competence. However, she received 4 points from the *Apple Pie* and *Time in School* problems, indicating not having modeling competence.

Mathematical Modeling Process with Elaborated Feedback

After the pre-measurement process, the progress of the student’s modeling proficiency was revealed, with elaborated feedback provided through the *Butter Butter Beans Problem*, *Fuel Station* and *Straw Bale* problems. In this regard, the student’s modeling competencies in each model-eliciting activity process were discussed separately and presented in a holistic manner.

Mathematical Modeling Competence Process: Butter Beans Problem

Table 3 indicates the student’s levels of mathematical modeling competencies in the *Butter Beans* problem, which was performed as the first activity, and provides the scores she received for these levels.

Table 3

Mathematical Modeling Competence Process: Butter Beans Problem

Levels	Butter Beans Problem	Butter Beans Problem
	Question 1	Question 2
Understanding the Problem	2	0
Simplifying	2	0
Mathematizing	2	0
Working Mathematically	4	0
Interpreting	3	0

Validating	0	0
Total	13	0

As seen in Table 3, when the scores are evaluated in the context of both problems, the student received a total of 13 points, implying “*not having modeling competence*”. In the first question of the Butter Beans Problem, it was found that the student included some expressions showing that she understood the problem, but these expressions also included some unnecessary variables in the process of detecting what was given and what was required. In the problem, instead of reaching the mathematical model by using only the data of the tenth week, the student tried to reach the mathematical model by using the data of three different weeks. It was observed that the student made a somewhat acceptable assumption by stating that there were two different bean growing conditions in the problem, and that she would solve the problem by using the weights of each week under these conditions.

Researcher: *What are you thinking?*

S: Now, there are two bean growing conditions. They are trying to grow the best beans using one of these. I'll try to find out which one is using the data.

Researcher: *What will you do now? What are you thinking?*

S: *Now, we are trying to figure out which one is heavier?*

Researcher: *What did it say in the question?*

S: *It says kg here, so I will find the weight since it says kilograms.*

Researcher: *How do you think you can find this?*

S: *Now, I will collect them all, each row one by one. I'm going to add up all the weights in row one, row two, row three, row four. Then, I will compare.*

It was observed that during the mathematizing process, the student created correct mathematical models based on acceptable assumptions to some extent, and reached the correct mathematical solution by using the mathematical models she created, thus, carrying out the mathematical working process. In this process, the student made calculations by adding up the weight of the beans for each week in daylight and shadow, and by comparison, stated that daylight yields more.

Researcher: *For which of these results are you obtaining?*

S: *In sunlight. Then, I will collect the data in the shadow and then make a comparison. Will I write it as a letter?*

Researcher: *What does the problem say?*

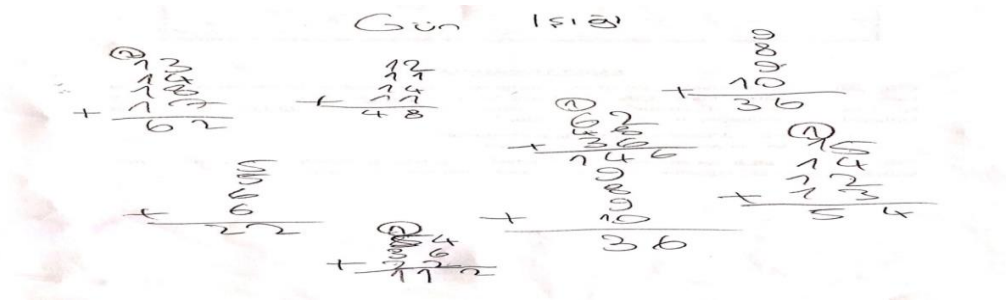
S: *As a letter. ... Now, I collected those that grow in the shadow in the same way. I did the same operations and compared them*

Researcher: *So, what did you find as a result of the comparison?*

S: *In my comparison, I found that daylight is bigger and heavier, and yields more products.*

Picture 1

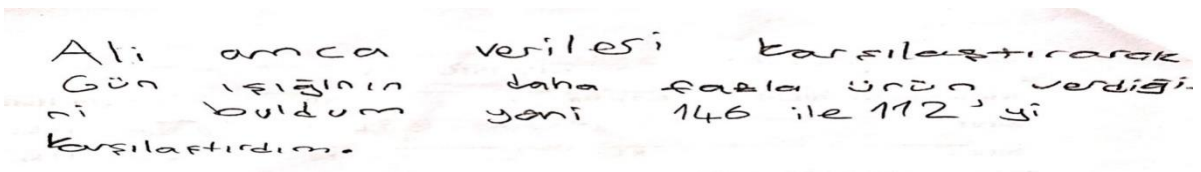
A Section from the Solution Paper on Mathematizing and Working Mathematically Processes



In terms of interpreting competence, it was found that the student reached the result only by comparing the weight sums in daylight and shadow, in other words, she interpreted the mathematical solution she obtained in an incomplete way in the context of real life because she only compared the numerical results. However, it was observed that the student did not take any validating approach.

Picture 2

A Section from the Solution Paper on the Interpreting Process



It was revealed that during the solution process of the second question of the Butter Beans Problem, the student made some statements showing that she did not understand the problem, made wrong assumptions, could not create a mathematical model, or could not fulfill any of the cognitive modeling competencies by not being able to put forward a mathematical solution approach. While the student was supposed to find a pattern in the problem based on the

weights between the weeks, it was observed that she tried to find a solution based on the difference between the twelfth week and the tenth week. However, the process was completed when the student realized that this difference was not valid for every week, and said that she could not solve the problem because she could not find how to solve it.

Researcher: *What does our second question say?*

S: *“Estimate the weight of the beans at the end of the 12th week in daylight and shade, and explain it in a letter to Uncle Ali about how you made this estimate.” Now my teacher, they are two different things. For example, if I add 2 to 13 in daylight, I can find Row 1.*

Researcher: *Why do you add 2 to 13?*

S: *Because that’s what happened at week 10. It asks us about the 12th week. Since the difference between 12 and 10 is 2, I add 2.*

Researcher: *Why did you think so?*

S: *Because My teacher, oh wow. No, it wasn’t like that.*

Researcher: *What’s not like that? What is not so?*

S: *Not all of them work like that. I don’t know how to find it. For example, my teacher, I add 2 to find 12 from the 10th week. Because the difference between 10 and 12 is 2, but here, although the difference between 8 and 10 is 2, it did not add 2.*

Researcher: *How many did it add?*

S: *All of them changes, teacher. Here it added 1, here it added 3.*

Researcher: *Then, how can you solve it?*

S: *I’m thinking. ... I couldn’t find, teacher.*

Mathematical Modeling Competence Process: Fuel Station

Table 4 shows the student’s levels of mathematical modeling competencies in the Fuel Station problem, which was performed as the second activity, and provides the scores she received for these levels.

Table 4*Mathematical Modeling Competence Process: Fuel Station*

Levels	Fuel Station
Understanding the Problem	2
Simplifying	2
Mathematizing	2
Working Mathematically	4
Interpreting	3
Validating	6
Total	19

As seen in Table 4, the student received 19 points from this problem and was evaluated as having acceptable level of modeling competence. In the Fuel Station Problem, it was found that the student included some expressions showing that she understood the problem, was able to determine what was given and perform what was required to some extent, but had difficulty in establishing a relationship between them. In the process of creating hypotheses to solve the problem, she tried to determine whether it would be more profitable to buy fuel from Çukurova, which was next to the house, or to go to Seyhan, which was 10 km away. While deciding on this issue, she experienced contradiction because she did not know how much fuel remained in the tank and made somewhat acceptable assumptions. The student chose the Hyundai i20 car and moved into the world of mathematics by assuming that since the amount of fuel consumed by the car in 10 km was 2 liters, the amount of fuel remaining in the tank of the car was 2 liters, in other words, there was enough fuel to go to the fuel station. However, during the validating process, she realized that she had made a mistake in this assumption and corrected her mistake.

Researcher: *What does it mean in the problem?*

S: *We're about to run out of gas. We needed to refuel immediately. We needed to find a fuel station. We couldn't decide which one to go to. There was a fuel station next to our house, and there was also a fuel station 10 km away from our house. Depending on the car we choose, which one will be more profitable?*

Researcher: *Which one would you like to choose?*

S: *Hyundai i20. 2 liters of gasoline. 45-liter fuel tank. ... there is a table. There are cars according to brands and models. These have the average amount of fuel consumed per 10 km. That is, the amount of fuel it will consume if he goes to the distant fuel station. There is 45 liters of gasoline in the fuel tank.*

Researcher: *Are you saying there are 45 liters of gasoline in the fuel tank of the car?*

S: *No. I say the total fuel tank is 45 liters. ... But it's about to run out of fuel. But it doesn't say how much it consumed.*

Researcher: *What did the question say?*

S: *We can't decide where to buy fuel to fill our tank completely. But we don't know how much is left.*

Researcher: *What was the Hyundai i20 powered by?*

S: *It runs on gasoline. If he goes to Seyhan, which is 10 km away, he will lose 2 liters of gasoline.*

Researcher: *Yes. What will you do then?*

S: *We need to fill it up.*

Researcher: *What did the question want from us?*

Q: *Filling our fuel tank completely. Our fuel tank is 45 liters. That's why there will be an additional price. That's why I think we can go to the one in Çukurova. But I don't know how much.*

Researcher: *You don't know how much of what?*

Q: *It says our car is about to run out of fuel. But it just says it's almost over. It doesn't say how much. ... Now can we do it like this? We can't just accept it as if it's completely over, can we?*

Researcher: *As you wish. What did the question say?*

S: *... It asks whether Çukurova or Seyhan is more profitable. ... I need to compare the two.*

Researcher: *What will you do to compare the two?*

S: *I will calculate both.*

Researcher: *Okay.*

S: *Now if he/she goes to Çukurova, he/she doesn't lose anything. But right now we don't know how much.*

Researcher: *What would you do if you knew how much? What would you do if you didn't know how much? You choose to hypothesize the solution. Okay, let's say we know how much it is. Couldn't this be your solution assumption?*

S: *Then, we have enough fuel to go. Now, let's have 2 liters. Let all two liters to go. Then, we need to fill all 45 liters. Since it was running on gasoline at that time, he now went to Seyhan.*

It has been found that in the mathematizing process, the student creates correct mathematical models based on acceptable assumptions to some extent, and reaches the correct mathematical solution by using correctly created mathematical models, thus carrying out the working mathematically process. In this process, the student created a mathematical model by multiplying the fuel tank amount of the vehicle, 45 liters, by the price of 1 liter of gasoline in Çukurova, 5 TL, in order to determine how much she would pay when she bought fuel from Çukurova. She created the same mathematical model by multiplying 45 liters by 4 TL, which is the price of 1 liter of gasoline in Seyhan, to determine how much she would pay when she bought fuel from Seyhan. At the end of the solution process of the mathematical models she created, she stated that she would pay 225 TL when she bought fuel from Çukurova, and 180 TL when she bought fuel from Seyhan. However, during the validating process, she realized that when she bought fuel from Seyhan, she also had to calculate the round-trip fuel. When she went to Seyhan, she determined that the average amount of fuel consumed per 10 km was 2 liters for the car she chose, the Hyundai i20, and stated that a total of 4 liters of gasoline would be consumed for the round trip. Therefore, to calculate the price of 4 liters of gasoline, she found the round-trip cost by multiplying 4 liters by the gasoline price in Seyhan, which is 4 TL. Then, in order to detect how much she would pay in total when she bought fuel from Seyhan, she added the total fuel tank cost of 180 TL and the round-trip cost of 16 TL, and showed that she would pay 196 TL.

S: We will multiply 45 by 4. We will find out how much TL we will give. ... I multiplied. 180 TL. We also need to find Çukurova. Let's say that gasoline will not be consumed in Çukurova. Now, then, we will multiply 45 by 5. 225 TL.

Researcher: Okay. Which one do you think is more profitable?

S: According to the calculations, Seyhan is more profitable.

Researcher: Okay, there is no problem with multiplication, what I don't understand is this. We have a house now. We want to fill the tank of our car. We have two options. One is in Çukurova, near our house, and the other is Seyhan, 10 km away. We also have some gasoline in our tank. We want to fill our entire fuel tank. I went to Seyhan. But my home is in Çukurova.

S: I have to return home from Seyhan. Oh yes, there will also be a round trip. Then, we need to calculate the round trip. Our journey will be 10 km and our return will be 10 km. Then, there will be 2 liters on the way out and 2 liters on the way

back. Then, since we want our tank to be completely full, we need to buy gasoline on the way back and forth to fill that gap. To calculate 4 liters, 4 TL in Seyhan, I will multiply 4 by 4. Then, I'll add 180.

Researcher: Okay. Do it.

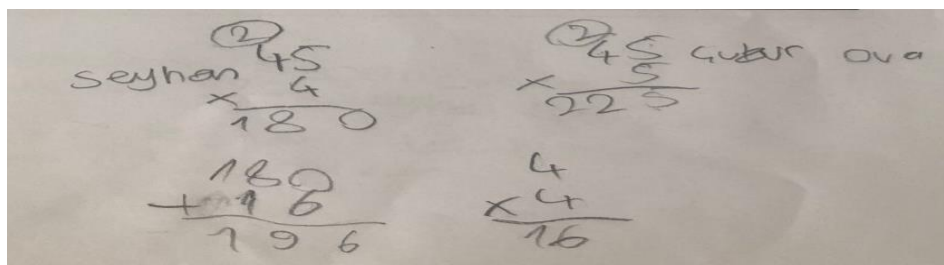
S: If we add 16 to 180, it is 196 TL.

Researcher: Yes. Then, do you think Seyhan or Çukurova is more profitable?

S: Still, Seyhan is more profitable now.

Picture 3

A Section from the Solution Paper on the Process of Mathematizing and Working Mathematically



In terms of interpreting competence, it was observed that the student interpreted the obtained correct mathematical solution incompletely in the context of real life. She approached the interpretation by comparing the student's payments for Seyhan and Çukurova, in other words, by comparing only the numerical results she obtained. In validating competence, she approached validation for the first time and determined that she made a mistake in her assumption, corrected her assumption and created new mathematical models. In her initial assumption, the student made the assumption that there was enough gasoline left in the fuel tank of the car to go to Seyhan and did not make the assumption that she needed to calculate the return fuel. However, during the process, in line with the feedback provided by the researcher to the student and the new solution assumptions and ideas made by the student, she realized that she had to calculate the round-trip cost when she bought fuel from Seyhan. Therefore, she corrected her initial assumption and made an assumption by realizing that she would consume fuel while going to Seyhan and returning from Seyhan, and therefore she needed to calculate the round-trip fuel amount in order to fill the car's fuel tank completely. Then, in line with the assumption she made, she created the necessary mathematical models to calculate the round-trip fuel cost and realized the mathematical solutions.

Researcher: *So, do you think your result is right or wrong?*

S: *Wait a minute, teacher. I will verify.*

Researcher: *OK, I'm waiting.*

S: *The problem was that whichever fuel station we choose; we can make more profit depending on the car we choose. Çukurova is near our house, Seyhan is 10 km away.*

Researcher: *Do you think we will consume gasoline or not when we go to Seyhan?*

S: *If we go to Seyhan, we will consume it.*

Researcher: *Then, do we fill the fuel tank completely?*

S: *Yes, we can fill it in, but the ones in Seyhan are 4 TL, the ones in Çukurova are 5 TL.*

Researcher: *OK, but how many kilometers away is Seyhan?*

S: *10.*

Researcher: *How do we get there? Where is the gasoline for ten kilometers?*

S: *2 liters of gasoline are required. Let's say we have two liters.*

Researcher: *Well, you made an assumption like that.*

S: *Yes. I multiplied accordingly and now I'm verifying.*

(Checking the multiplication.)

S: *I have to return home from Seyhan. Oh yes, there will also be a round trip. Then, we need to calculate the round trip. Our journey will be 10 km and our return will be 10 km. Then, there will be 2 liters on the way out and 2 liters on the way back. Then, since we want our tank to be completely full, we need to buy gasoline on the way back and forth to fill that gap. To calculate 4 liters, 4 TL in Seyhan, I will multiply 4 by 4. Then, I'll add 180.*

Researcher: *Can you summarize the process of solving the problem for me from the very beginning?*

S: *Now, there are two fuel stations we can go to. One is 10 km away from our house and consumes 2 liters. There is also another one next to our house. It asks us to calculate which one is more profitable according to the car we choose, but there is also a round trip to this. It expects us to calculate that, too. We will find out which one might be more profitable. So, I chose the Hyundai i20 car from here. I*

calculated Seyhan's cost first. Since it is gasoline, not diesel, gasoline costs 4 TL in Seyhan. Now, the total fuel tank of our car is 45 liters. That's why I multiplied 45 by 4 to get 180. However, there is also a way back from there. I calculated that and multiplied it by 4. Because it consumes 2 liters of gasoline while going and 2 liters on the way back. I multiplied 4 by 4 to get 16. I added it to 180. It became 196. Then, I calculated the one for Çukurova. I multiplied 45 by 5. I found 225. Seyhan turned out to be more profitable. At first, I didn't realize I had to make assumptions. Our car is about to run out of fuel, but I thought it should indicate how much, I didn't realize I had to make assumptions, but later I realized it, proceeded accordingly and solved the problem when I realized there was a way back, so I solved it again.

Mathematical Modeling Competence Process: Straw Bale

Table 5 indicates the student's levels of mathematical modeling competencies in the Straw Bale problem, which was performed as the third activity, and provides the scores she received for these levels.

Table 5

Mathematical Modeling Competence Process: Straw Bale

Levels	Straw Bale
Understanding the Problem	3
Simplifying	3
Mathematizing	4
Working Mathematically	4
Interpreting	3
Validating	6
Total	23

As seen in Table 5, the student was evaluated as having high level modeling competence by receiving a total of 23 points from this problem. In the Straw Bale Problem, it was found that the student could express the details given in the problem with her own words, show the issues given in the problem by drawing figures, and interpret what was asked in the problem based on these given details. Based on the person in the picture in the problem, she made a realistic assumption that she could calculate the height of the straw bales, in other words, by establishing a relationship between the height of the person in the picture and the height of the straw bales.

Researcher: *What does the problem tell us?*

S: *There are five straw bales at the bottom. When moving to the next row, one bale of hay was missing each time. At that time, there were 5, 4, 3, 2, 1 straw bales in a row from bottom to top. Accordingly, it asks for the height of the pile.*

(Drawing the shape of the straw bales.)

Researcher: *How many rows are there?*

S: *There are 5 rows. Now all of these must have a height. So now I'm going to make an assumption, teacher. But how will I be found? It didn't give any numbers.*

Researcher: *Look at the problem again. Examine everything given thoroughly.*

S: *OK. (Reading and examining the problem again.) ... there is someone in the picture. Standing in the hay.*

Researcher: *Yes.*

S: *Then... (Thinking.) For example, should I consider straw bales to be approximately the size of a person?*

Researcher: *You have to the solution of the problem. How you solve it.*

S: *Okay then. There is someone standing in the hay. It could be 1.50.*

Researcher: *What could 1.50 be? Why 1.50?*

S: *It was the height of a friend of mine.*

Researcher: *Did you think of the person in the picture as a child?*

S: *Actually, it is not the child in the picture, then it is the size of a person, even if the size of an adult is 1.70. So now let's think about it as an adult. This (woman) stood between. Then a straw bale is 1.70. I will think like this. I will start from the height of the woman in the picture.*

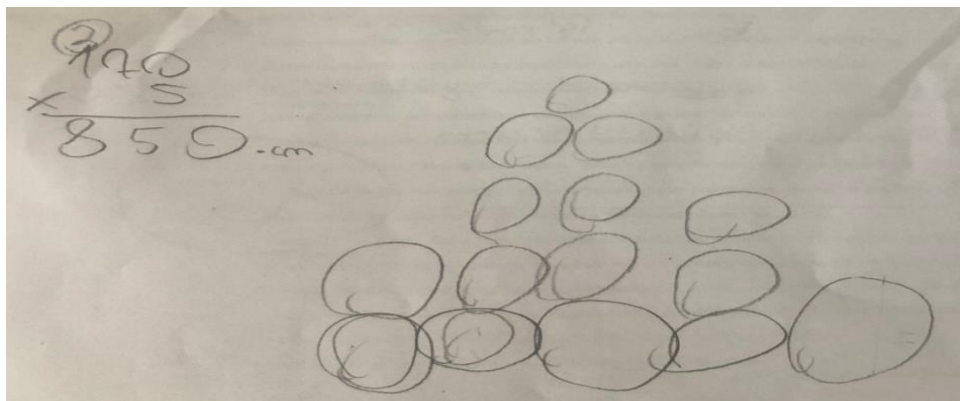
It was revealed that during the mathematizing process, the student created the correct mathematical models according to realistic assumptions and reached the correct mathematical solution by using the correctly created mathematical models, thus carrying out the mathematical working process. In this process, the student assumed that a person's height was 170 cm. Since the straw bales were placed in 5 rows from bottom to top, she calculated the height of the straw bales by multiplying 170 by 5. Thus, the student was considered to have solved the problem mathematically and found the real life result.

S: Then, if the height of a human being, the height of an adult, is 1.70. ... Then, a straw bale is 1.70 meters. I will think like this. I will start from the height of the woman in the

picture. There are 5 rows. Height of 5 rows of straw bales.
Then, I will multiply 170 by 5. And I found 850 cm.

Picture 5

A Section from the Solution Paper on the Process of Mathematizing and Working Mathematically



In terms of interpretation competence, it was observed that the student interpreted the obtained correct mathematical solution incompletely in the context of real life. Although the student was deemed to have partially found a real-life result in line with the mathematical solution she reached, she interpreted the result she obtained in an incomplete way in the context of real life, since she did not state that a collapse would occur with the increase in the pressure applied by the straw bales to each other from top to bottom, and therefore the height would be less than the height she found. In validating competence, the student has found validating competence by reviewing what she did from the very beginning of the process. In this context, the student reinterpreted the problem and expressed it verbally. Then, she evaluated the assumption she had created and rechecked her mathematical model and all the operations she performed. In addition, although the student was not asked to express the result she found in the problem in writing or in a letter, she requested to express her entire process in writing and expressed her entire modeling process in writing.

Researcher: *This is your result. What will you do now?*

Q: *Validation. (She expressed it out loud.)*

Researcher: *How will you perform the validation?*

Q: *I will solve it again. Now, I will tell you, teacher. Here in the figure it says that there are 5 straw bales in the bottom row. When moving to the next row, one straw bale is reduced each time, that is, 5, 4, 3, 2, 1 straw bale remains. Accordingly, it says, approximately calculate the height of the entire pile.*

After drawing the shape of this straw bale, I found that its height was 5 rows. I assigned the height for this woman. I associated this woman's height with the height of a straw bale. Then, I multiplied the two. Thus, 170 is the height of the woman and the height of the straw bale is 5 rows. Therefore, I found the height to be 5. And 850 cm.

Researcher: Do you think you solved it correctly?

Q: Yes.

Researcher: What is 850 cm you found?

Q: The length of the thing. The length of the straw bale, the entire stack. Am I going to express it in writing on the back now?

Researcher: As you wish.

Q: I will make another confirmation. I'll check the multiplication.

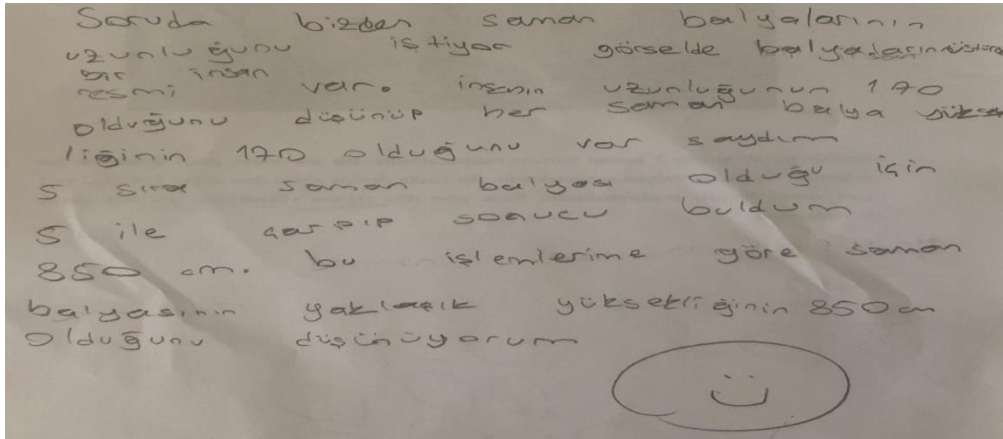
Researcher: Let's see.

Q: 7 times 5, 35. 5, 3 more 8. 850. OK, I got it right. I checked my process. Now, I will express it in writing on the back.

(She expresses her comment in writing.)

Picture 6

A Section from the Solution Paper on the Interpretation Process



Post-Measurement Mathematical Modeling Competence

Finally, the Restaurant, Apple Pie and Time at School problems were given to the student in written form, and the student was asked to solve these problems to determine her mathematical modeling competencies at the end of the process. The student's mathematical

modeling competencies at the end of the process are shown in Table 6.

Table 6

Post-Measurement Mathematical Modeling Competence

Levels	Model-Eliciting Activity		
	Restaurant	Apple Pie	Time in School
Understanding the Problem	4	4	3
Simplifying	3	3	2
Mathematizing	4	4	1
Working Mathematically	4	4	2
Interpreting	3	4	2
Validating	6	6	4
Total	24	25	14

When the post-measurement cognitive modeling competencies level of the fourth-grade elementary school student was evaluated, she received 24 points from the *Restaurant* problem and was deemed to have high level modeling competence; by getting 25 points from the *Apple Pie* problem, she was labelled as having high level modeling competence and by getting 14 points from the *Time in School* problem, she was labelled as *having an acceptable level of modeling competence*.

Content of Elaborated Feedback Provided Throughout the Process

By giving elaborated feedback to the fourth-grade elementary school student during and after the application process according to each competence step in the modeling cycle, an effort was made to help them to realize and develop their deficiencies in cognitive modeling competencies. The content of the elaborated feedback provided in this regard is presented separately for the three applications.

Butter Beans Problem (First App) Feedback

In the feedback given for the first question of the Butter Beans Problem, it was found that the student included some statements that showed that he/she understood the problem, but also included some unnecessary variables in the process of detecting what was given and what was requested. It was said that she handled the unnecessary variables because she started to create mathematical models with the data of the sixth, eighth and tenth weeks. It was also stated that in the process of understanding the problem, it was necessary to express in writing what was given and required in the problem as well as the relationships between them. Then, before moving on to the solution phase, it was stated that the student should create assumptions about how to solve the problem based on what was given and what was requested, thus, the process of simplifying

the problem would be carried out. Regarding her ability to simplify the problem, it was stated that she made a somewhat acceptable assumption because she stated that she would solve the problem by using the weights of each week under two different bean growing conditions. In the mathematizing competency, it was stated that the modeling process could actually be carried out by using only the tenth week data or by comparing weekly weight amounts in daylight and shadow, but there was no error in the mathematical models created. As for her working mathematically proficiency, it was stated that she solved the mathematical models she created correctly. It was stated that she only made numerical comparisons based on the results she obtained in terms of interpretation competence. Instead, it was stated that she should have expressed what numerical results she would find in the context of real life, so that she could interpret the mathematical solution she obtained in the context of real life. It was said that the correct interpretation of the mathematical solution she obtained in the context of real life could be as follows: *"The most suitable light condition is daylight. Because, for example, the weight of the first row plant in the sixth week in daylight is 9 kg and in the shadow it is 5 kg. In the eighth week, its weight in daylight is 12 kg and in the shadow, it is 9 kg. In the tenth week, its weight in daylight is 13 kg and in the shadow, it is 15 kg. When we examine this issue for plants in the other rows, the amount of weight gain is greater in daylight. Therefore, the most suitable light condition is daylight. Or, by determining how many beans there are each week, we can find that sunlight produces more crops. For example, daylight in the tenth week is $13+14+18+17=62$ kg; shadow tenth week $15+14+12+13=54$ kg."* In addition, it was explained how the task of writing a letter to Uncle Ali, which was requested in the problem, should be done. For this purpose, it was stated that he/she should start the letter by writing what was given and required in the problem, how she solved the problem from the variables she determined, why she chose this solution method and what the result she obtained means. Finally, it was stated that it did not show any approach to validating competence. In the validating process, it is necessary to check whether the problem is fully understood by determining what is given and required in the problem, the assumptions it has made, the mathematical models and the solution of mathematical models, whether the mathematical result obtained meets the desired answer in the problem, and what this result means in real life. If there is an error, it must be corrected and stated. Thus, explanations were made about how to approach validating in future problems.

In the feedback given for the second question of the Bean Problem, it was stated how the student should make sense of the problem since she could not solve it during the application process. For this purpose,

it was stated that the problem could be understood by stating that the weights of four different rows of dry bean plants were given weekly in daylight and shadow, and that the weight of the twelfth week was to be found according to these weights. Then, assumptions were made by the researcher to solve the problem regarding the ability to simplify the problem. In this regard, it was stated that a solution hypothesis could be created by looking at the change between the weights of the sixth, eighth and tenth weeks in daylight and shadow. In the mathematicization competency, the student was made aware that there was a pattern based on the weight variables between the weeks. The patterns were created based on the weight differences between the weeks, and the weight of the beans in daylight and shadow in the twelfth week was found, and working mathematically proficiency was achieved with the student. It was discussed how we could interpret the weights we found in interpretation competence in the context of real life. In the validating competency, the process was completed by checking whether we could correctly determine what was given and requested, our solution assumption, the patterns created, calculations and the interpretation of the mathematical result we obtained in the real life context.

Fuel Station Problem (Second Application) Feedback

In the fuel station problem, it was stated that the student included some expressions showing that she understood the problem, that she could determine what was given and what was required to some extent, however, she had difficulty in establishing a relationship between them. It was said that in the process of understanding the problem and creating hypotheses for its solution, she tried to determine whether it would be more profitable to buy fuel from Çukurova next to the house or to go to Seyhan, 10 km away, but she experienced contradiction and had difficulty because she did not know how much fuel was left in the tank. It was stated that she later corrected her mistake by creating realistic assumptions during the validating process. What the student took into consideration in order to make herself aware of the realistic assumptions she made was brought up for discussion again. For example, it was said that she made an assumption about how much gasoline was left in the fuel tank. It was stated that she first created the assumption *"Filling our fuel tank completely. Our fuel tank is 45 liters. Therefore, if it goes to Seyhan, there will be an additional price. I think we can go to the one in Çukurova."* and then started the mathematizing process by creating the assumption *"We have enough fuel to go"*. It was stated that she started the mathematizing process by creating the hypothesis. It was also said that in the process of mathematizing, the student created correct mathematical models according to somewhat acceptable assumptions. However, it was stated that in the first mathematical

model she created, she calculated how much she would pay when she bought fuel only from Çukurova and Seyhan, and ignored that the tank would be empty on the way to and from Seyhan; therefore, the fuel tank would not be completely filled. Because it was said that on the way to Seyhan and on the way back from Seyhan, the fuel tank would be emptied by a total of 4 liters per 10 km round trip- since the Hyundai i20 was chosen, that gap had to be filled. After realizing this situation, it was stated that the mathematical model she made was corrected. In terms of the interpretation competence, it was said that she interpreted the correct mathematical solution obtained in an incomplete way in the context of real life. It was stated that she only made the statement “*Seyhan was more profitable*” by making a numerical comparison and therefore made an incomplete interpretation. It is stated that the correct interpretation of the mathematical solution obtained in the context of real life should be as follows: “*It has been found that the payment we will make if we buy fuel from Çukurova is 225 TL, and if we buy fuel from Seyhan, the payment we will make is 196 TL. Accordingly, it would be more profitable for us to go to Seyhan and buy fuel. In addition, at this stage, we can re-interpret the solution obtained by taking into account additional factors such as time spent, air pollution, and weather conditions. Is going to a place 10 km away or even returning back worth the fatigue in this process, the gases released into the atmosphere, and the troubles that may occur if the weather is rainy?*” It was stated that when we think about it in this context, we will correctly interpret the solution we obtained in the context of real life. It was said that this time, unlike the previous problems, she was able to verify for the first time and reached the correct mathematical model and solution thanks to her validating qualification.

Straw Bale Problem (Third Application) Feedback

It was said that in the Straw Bale Problem, the student could express what was given in the problem with her own words, show what was given in the problem by drawing figures, and interpret what was wanted in the problem according to these given, thus making full sense of the problem. It was stated that she calculated the height of the straw bales based on the person in the picture in the problem, in other words, she made a realistic assumption by establishing a relationship between the height of the person in the picture and the height of the straw bales. It was said that in the mathematizing process, the student created the correct mathematical models according to realistic assumptions and reached the correct mathematical solution by using the correctly created mathematical models, thus carrying out the working mathematically process. In terms of interpretation competence, it was said that she interpreted the correct mathematical solution obtained in an incomplete way in

the context of real life. Although she was considered to have partially found a real-life result in line with the mathematical solution she reached, it was stated to the student that she interpreted the result obtained incompletely in the context of real life, since she did not state that a collapse would occur with the increase in the pressure applied by the straw bales to each other from top to bottom and therefore the height would be less than the height she found. Regarding validating competence, it was said that she reviewed what she did from the very beginning of the process, re-interpreted the problem and expressed it verbally, and re-checked her mathematical model and all the operations she performed by evaluating the assumption she had created. In addition, it was stated that although she was not asked to express the result she found in the problem in writing or in a letter, she expressed her entire process in writing, thus carrying out the interpretation process. Finally, Table 7 provides a general framework for how elaborated feedback was used in the application process.

Table 6

Use of The Elaborated Feedback in the Application Process

Criteria	Elaborated Feedback
Understanding the Problem	<ul style="list-style-type: none"> • In cases where the student does not understand the problem or understands it to some extent, or is unable to determine what is given and requested, or is unable to determine what is given or asked to some extent, and cannot establish a relationship between them/establishes a wrong relationship, the student is asked to read the problem again and express what she understands in her own words. Expressing how she should understand the problem if she cannot achieve this competence. • By including expressions that show that the problem is fully understood, determining what is given and what is required, and establishing a relationship between them, it is stated to the student that he/she understands the problem correctly and moves on to the next stage.
Simplifying	<ul style="list-style-type: none"> • In cases of not simplifying the problem or simplifying it to some extent, not determining the necessary/unnecessary variables or determining them to some extent and making wrong assumptions or acceptable assumptions to some extent, asking the student questions that will enable her to brainstorm according to the problem situation she is solving and ensuring that she makes realistic assumptions. Explaining how to make

	<p>realistic assumptions if she cannot achieve this competence.</p> <ul style="list-style-type: none"> • In cases of simplifying the problem, detecting necessary/unnecessary variables, and making realistic assumptions, informing the student that the assumption is valid for the solution of the problem and moving on to the next stage.
<p>Mathematizing</p>	<ul style="list-style-type: none"> • In cases of not creating a mathematical model/s or creating incomplete/erroneous mathematical model/s, asking the student some questions that will enable her to brainstorm whether the mathematical model she created is correct for the solution of the problem and ensuring that she creates the necessary mathematical model/s in a correct figure according to realistic assumptions. If she cannot achieve this competency, showing how she can create mathematical model(s) according to realistic assumptions. • In cases of creating the necessary mathematical model/s in a correct figure according to realistic assumptions, explaining the model/models and relating them to each other, it is stated to the student that the mathematical model she created is correct and she proceeds to the next stage.
<p>Working Mathematically</p>	<ul style="list-style-type: none"> • In cases where the student does not provide a mathematical solution, solves the mathematical models incorrectly, or tries to solve the wrong mathematical model, the student is asked some questions to revise the solution process, making her aware of her mistakes and ensuring that she can solve the mathematical model correctly. Demonstration of how the created mathematical model can be solved if this competence cannot be achieved. • In cases where the student reaches the correct mathematical solution by using correctly created mathematical model/s, it is stated to the student that the solution is correct and she proceeds to the next stage.
<p>Interpreting</p>	<ul style="list-style-type: none"> • In cases of misinterpreting the obtained mathematical solution in the context of real life or not interpreting it at all or interpreting the obtained correct mathematical solution in an incomplete figure in the context of real life, the student is asked how else she can interpret the figures in order to reveal her competence

in interpreting in the context of real life. If she cannot achieve this competence, explaining how she can interpret the correct mathematical solution obtained in the context of real life.

- In cases where the correct mathematical solution obtained is interpreted in a correct figure in the context of real life, the student is informed that his/her interpretation is in the context of real life and she proceeds to the next stage.

Validating

- In cases of not taking a validating approach or making false validating, taking a partial validating approach, not correcting the identified errors, or correcting the identified errors to some extent; trying to have the student find out and express how the validating approach is not correct and how it should be. Expressing how the validating approach should be taken if she cannot achieve this competence.
 - In cases of taking a validating approach and correcting identified errors, it is stated to the student that the validating approach is correct, and the process is completed.
-

Discussion and Conclusion

It has been observed that the student, in terms of the ability to *understand the problem*, directly makes the transitions to the world of mathematics in the first week, without making sense of the problem and without determining the necessary and unnecessary variables. However, thanks to the elaborated feedback provided for this competency, it was found that in the following weeks, the student was able to read and understand the problem, determine what was given and what was required, establish relationships between them, and express these thoughts in writing. Similarly, English and Watters' (2004) study claim that students in this age group have difficulty in understanding and interpreting data presented in various formats and representations. Relevant studies conducted with students in this age group (10 years old) also reveal that students have difficulty in making sense of the problem situation (Şahin, 2019; Şahin & Eraslan, 2016). Similarly, in this study, it was observed that although the student had difficulty in understanding the problem, she improved her competencies thanks to the elaborated feedback provided regarding her ability to understand the problem. Research conducted in this direction emphasizes that elaborated feedback provides effective

information to change teaching and learning activities (Asempapa & Foley, 2018). In parallel with this claim, it is stated that the modeling process information given to the student has a positive effect on the development of modeling competencies (Maaß, 2006; Kaiser et al., 2010).

A number of studies conducted with students from different age groups emphasize that students have difficulty in creating hypotheses appropriate to the problem situation and simplifying the problem (Blum, 2015; Chan et al., 2012; Haines & Crouch, 2007; Maaß, 2006). Similarly, in this study, it was observed that although the student had difficulty in the process of *simplifying the problem*, she displayed progress thanks to the elaborated feedback provided for this competence. There are also certain studies showing that elaborated feedback specific to such discourses, actions and answers, increases student success, especially learning efficiency (Corbett & Anderson, 2001; Mory, 2004; Shute et al., 2007). In other words, elaborated feedback regarding a specific purpose and target increases students' learning and task performance (Asempapa & Foley, 2018; Diefes-Dux et al., 2012; Greefrath & Vorhölter, 2016; Shute, 2008; Wake, 2010).

In terms of *mathematizing and working mathematically*, it was revealed that the student created correct mathematical models based on acceptable assumptions to some extent in the first weeks, and in the last weeks she created correct mathematical models based on realistic assumptions. In this vein, English (2007), in her modeling study with children aged 8-9, states that students in this age group can quantify qualitative data. Similarly, in this research, towards the end of the process, the student's verbal expressions became increasingly mathematical, and she created mathematical models that were in line with realistic assumptions. In this context, it is emphasized that students should be given formative feedback regarding their solutions both during and after the process, due to the complex structure of model-eliciting activities and the high cognitive task demands expected from the student during the process (Asempapa & Foley, 2018; Besser et al., 2013; Besser et al., 2015; Diefes-Dux et al., 2012; Levy et al., 2010). Feedback is defined as information that aims to change the student's thinking or behaviors in order to improve learning, and is conveyed to the student accordingly (Shute, 2008). It has been observed that feedback, as a support provided to the student during the modeling process, contributes to the development of modeling competencies. In this regard, thanks to the elaborated feedback provided to the student in the research, it was observed that in the following weeks, the student realized the mistakes she made in the solution process of the mathematical models she created, and in terms of validating competence, she corrected her mistakes and solved the models correctly.

The main purpose of feedback is to increase student knowledge, skills, and understanding in mathematical content areas (e.g., numbers and operations, geometry, measurement, data manipulation) or general skills (e.g., problem solving, modeling, performing arithmetic operations) (Besser et al., 2013; Besser et al., 2016; Shute, 2010). Feedback also provides information that can be useful to the student to correct inappropriate problem-solving strategies, operational errors or misconceptions (Mason & Bruning, 2001; Mory, 2004; Narciss & Huth, 2004). In this sense, in this study, modeling competencies were developed by providing elaborated feedback to the student in the areas she needed both during and at the end of the process (understanding the problem, creating hypotheses, determining problem-solving strategies, creating models, operation errors, misconceptions, interpretation, validating). In this vein, there are a number of studies indicating that feedback specific to target-oriented discourses, actions and answers, increases student success, especially learning (Corbett and Anderson, 2001; Mory, 2004; Shute et al., 2007). In addition, targeted feedback increases students' learning and task performance (Asempapa & Foley, 2018; Diefes-Dux et al., 2012; Greefrath & Vorhölter, 2016; Shute, 2008; Wake, 2010).

Although elaborated feedback was provided to the student regarding *interpreting* competence, it was observed that she still had difficulty in demonstrating this competence. However, in the process of expressing the process in writing, regarding the result evaluated within the scope of interpreting competence, it was observed that the student could not express the process in writing, regarding how she reached the mathematical solution she obtained in the first weeks, but in the problem situations in the following weeks, she spontaneously performed this action even though it was not requested. Similarly, in the studies conducted with this age group, it is stated that students have difficulties in converting the mathematical results they obtain into a written form (English, 2006; English & Watters, 2004, 2005; Şahin, 2019). Similar studies conducted in this context emphasize that while students work on modeling problems, environments where they can interpret their own models should be provided so that they can interpret their models with real-life situations (Blum & Borremeo Ferri, 2009; Haas et al., 2020; Suh et al., 2021). It is also emphasized that feedback reduces the cognitive load of low-ability students, especially those who have little experience on the subject being studied and who encounter a complex problem-solving task (Moreno, 2004; Paas et al., 2003).

In the *validating* competence, it was revealed that the student did not achieve this competency at all in the first weeks but developed her validating competency thanks to the elaborated feedback provided for this competency in the following weeks. Both during the

application process and at the end of the process, the researcher gave feedback to the student about the need to check not only the procedural errors but also whether she understood the problem correctly, the solution assumptions, the accuracy of the mathematical model she created, and whether she made any procedural errors in her mathematical solutions. Thanks to this feedback, it was found that the student's validating competence improved to some extent. It has also been observed that after the student acquires this competence, she realizes her mistakes and solves her mathematical models correctly by correcting these mistakes. There are also studies emphasizing that goal-oriented feedback provides students with useful information to correct inappropriate problem-solving strategies, operational errors and misconceptions (Mason & Bruning, 2001; Mory, 2004; Narciss & Huth, 2004). Because formative assessment not only reveals the development of the individual and whether there are aspects that still need to be improved in the process, but also supports the individual in understanding and gaining awareness about her current situation (Black et al., 2004).

Suggestions

In this study, it has been observed that the student's modeling competencies have displayed progress in the course of time thanks to the elaborated feedback provided to the fourth-grade elementary school student regarding each modeling competence. However, the results of this study are limited to one student and a five-week application as a single case-holistic design. Comparative studies can be carried out by conducting a similar study using experimental or other research methods. Also, model-eliciting activities and elaborated feedback employed in this study conducted with a fourth-grade elementary school student can be applied to different grade levels in elementary school, and comparative studies can be conducted. In this study, the assessment was performed within the scope of Borromeo Ferri's (2006) cognitive mathematical modeling competencies. In other studies, students' modeling competencies can be evaluated and improved by considering different modeling cycles. In addition, future studies can employ different teaching and learning methods that may be effective in developing mathematical modeling competencies.

Ethics Committee Approval: *This research was conducted with the permission of Dokuz Eylül University Social and Human Sciences Research and Publication Ethics Committee with the decision dated 13/07/2020 and numbered 16/1.*

Conflict of Interest: *The authors declare that they have no conflict of interest.*

Author Contribution: *The authors equally contributed to all parts of the study.*

References

- Asempapa, R. S., & Foley, G. D. (2018). Classroom assessment of mathematical modeling tasks. *Education Research Highlights in Mathematics, Science and Technology*, 6, 1-20.
- Besser, M., Blum, W., & Klimczak, M. (2013). Formative assessment in everyday teaching of mathematical modelling: implementation of written and oral feedback to competency-oriented tasks. G. Stillman, W. Blum, J. Brown ve G. Kaiser (Eds.), *Teaching mathematical modelling: Connecting to research and practice* (pp. 469-478) içinde. Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-6540-5_40
- Besser, M., Blum, W., & Leiss, D. (2015). How to support teachers to give feedback to modelling tasks effectively? Results from a teacher-training-study in the Co2CA project. In G. Stillman, W. Blum ve M. S. Biembengut (Eds.), *Mathematical modelling in education research and practice: Cultural, social and cognitive influences* (pp.151-160). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-18272-8>
- Black, P., & Wiliam, D. (1998). Inside the black box: Raising standards through classroom assessment. *Phi Delta Kappan* 80(2), 139-148.
- Black, P., Harrison, C., Lee, C., Marshall, B., & Wiliam, D. (2004). Working inside the black box: Assessment for learning in the classroom. *Phi Delta Kappan*, 86(1), 9-21.
- Bliss, K., & Libertini, J. (2016). What is mathematical modeling? In S. Garfunkel & M. Montgomery (Eds.), *GAIMME: Guidelines for assessment & instruction in mathematical modeling education* (pp. 7-21). Society for Industrial and Applied Mathematics SIAM.
- Blomhøj, M. (2011). Modelling competency: Teaching, learning and assessing competencies-Overview. In Kaiser, G., Blum, W., Borromeo Ferri, R., & Stillman, G. (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (pp. 343-347). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_34
- Blomhøj, M., & Jensen, T. H. (2003). Developing mathematical modelling competence: Conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and its Applications*, 22(3), 123-139. <https://doi.org/10.1093/teamat/22.3.123>
- Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? In S. J. Cho (Ed.), *Proceedings of the 12th international congress on mathematical education: Intellectual and attitudinal challenges* (pp. 73-96). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3>
- Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM*, 38(2), 86-95. <https://doi.org/10.1007/BF02655883>

- Blum, W., & Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt?. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(1), 45-58.
- Canbazoğlu, H. B., & Tarım, K. (2021). A teaching process for mathematical modeling in primary school. *The Journal of Buca Faculty of Education*, (51), 210-225. <https://doi.org/10.53444/deubefd.825361>
- Canbazoğlu Albayrak, H. B., & Tarım, K. (2023). Cognitive mathematical modelling competencies of elementary school students. *SDU International Journal of Educational Studies*, 10(1), 1-21. <https://doi.org/10.33710/sduijes.1191490>
- Carlson, M. A., Wickstrom, M. H., Burroughs, E. A., & Fulton, E. W. (2016). A case for mathematical modeling in the elementary school classroom. In C. R. Hirsch & A. R. McDuffie (Eds.), *Mathematical modeling and modeling mathematics* (pp. 121-129). National Council of Teachers of Mathematics.
- Carlson, M., Larsen, S., & Lesh, R. (2003). Integrating a models and modeling perspective with existing research and practices. In R. Lesh & H. Doerr (Eds), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 465-478). Lawrence Erlbaum Associates.
- Chan, C. M. E., Ng, K. E. D., Widjaja, W., & Seto, C. (2012). Assessment of primary 5 students' mathematical modelling competencies. *Journal of Science and Mathematics Education in Southeast Asia*, 35(2), 146-178.
- Corbett, A. T., & Anderson, J. R. (2001). Locus of feedback control in computer-based tutoring: Impact on learning rate, achievement and attitudes. In Jacko, J., Sears, A., Beaudouin-Lafon, M. & Jacob, R. (Eds.), *Proceedings of ACM CHI'2001 Conference on Human Factors in Computing Systems* (pp. 245-252). ACM Press. <https://doi.org/10.1145/365024.365111>
- Diefes-Dux, H. A., Zawojewski, J. S., Hjalmarson, M. A., & Cardella, M. E. (2012). A framework for analyzing feedback in a formative assessment system for mathematical modeling problems. *Journal of Engineering Education*, 101(2), 375-406. <https://doi.org/10.1002/j.2168-9830.2012.tb00054.x>
- Doerr, H. M., & English, L. D. (2003). A modeling perspective on students' mathematical reasoning about data. *Journal for Research in Mathematics Education*, 34(2), 110-136. <https://doi.org/10.2307/30034902>
- English, L. (2012). Data modelling with first-grade students. *Educational Studies in Mathematics*, 81(1), 15-30. <https://doi.org/10.1007/s10649-011-9377-3>
- English, L. D. (2006). Introducing young children to complex systems through modeling. In M. Chinnappan, P. Grootenboer & R. Zevenbergen (Eds.), *Proceedings of the 29th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 195-202). MERGA Inc.

- English, L. D. (2007). Interdisciplinary modelling in the primary mathematics curriculum. In J. Watson & K. Beswick (Eds.), *Mathematics: Essential Research, Essential Practice* (pp. 275-284). MERGA Inc.
- English, L. D., & Watters, J. J. (2004). Mathematical modelling with young children. *International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2*, 335-342.
- English, L. D., & Watters, J. J. (2005). Mathematical modeling in third-grade classrooms. *Mathematics Education Research Journal, 16*, 59-80. <https://doi.org/10.1007/BF03217401>
- Goldin, G. (2000). A scientific perspective on structures, task-based interviews in mathematics education research. In R. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 547-590). Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Publishers.
- Greefrath, G., & Vorhölter, K. (2016). *Teaching and learning mathematical modelling: Approaches and developments from German speaking countries*. Springer Nature. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-45004-9>
- Haas, B., Kreis, Y., & Lavicza, Z. (2020). Connecting the real world to mathematical models in elementary schools in Luxemburg. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 40*(2), 1-6.
- Haines C., & Crouch R. (2007). Mathematical modelling and applications: Ability and competence frameworks. In W. Blum, P. L. Galbraith, H. W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education* (pp. 417-424). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_46
- Hattie, J., & Timperley, H. (2007). The power of feedback. *Review of Educational Research, 77*(1), 81-112. <https://doi.org/10.3102/003465430298487>
- Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM, 38*(3), 302-310. <https://doi.org/10.1007/BF02652813>
- Kaiser, G., Schwarz, B., & Tiedemann, S. (2010). Future teachers' professional knowledge on modeling. In R. Lesh, P. L. Galbraith, C. R. Haines & A. Hurford (Eds.), *Modeling students' mathematical modeling competencies* (pp. 433-444). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0561-1_37
- Kulhavy, R. W., & Stock, W. (1989). Feedback in written instruction: The place of response certitude. *Educational Psychology Review, 1*(4), 279-308. <https://doi.org/10.1007/BF01320096>
- Lesh, R. A., & Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching and learning. In R. A. Lesh & H. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 3-34). Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

- Levy, R., Zbiek, R. M., Galluzzo, B., & Long, M. (2016). Mathematical modeling in the early and middle grades: Prekindergarten through grade 8. In S. Garfunkel & M. Montgomery (Eds.), *GAIMME: Guidelines for assessment & instruction in mathematical modeling education* (pp. 23-43). Society for Industrial and Applied Mathematics SIAM.
- Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM*, 38(2), 113-142. <https://doi.org/10.1007/BF02655885>
- Maaß, K., & Mischo, C. (2011). Implementing modelling into day-to-day teaching practice-The project STRATUM and its framework. *Journal Für Mathematik-Didaktik*, 1(32), 103-131. <https://doi.org/10.1007/s13138-010-0015-x>
- Mason, B. J., & Bruning, R. (2001). *Providing feedback in computer-based instruction: What the research tells us*. Center for Instructional Innovation, University of Nebraska-Lincoln.
- Miles, M. B., & Huberman, A. M. (2016). *Qualitative data analysis: An expanded sourcebook*. Sage Publications.
- Ministry of National Education [MNE]. (2018). *Elementary school mathematics (grades 1-4) curriculum*. Ankara: Talim Terbiye Başkanlığı Yayınları.
- Moreno, R. (2004). Decreasing cognitive load for novice students: Effects of explanatory versus corrective feedback in discovery-based multimedia. *Instructional Science*, 32, 99-113. <https://doi.org/10.1023/B:TRUC.0000021811.66966.1d>
- Mory, E. H. (2004). Feedback research review. In D. Jonassen (Ed.), *Handbook of research on educational communications and technology* (pp. 745-783). Lawrence Erlbaum.
- Narciss, S., & Huth, K. (2004). How to design informative tutoring feedback for multimedia learning. H. M. Niegemann, D. Leutner & R. Brunken (Eds.), *Instructional design for multimedia learning* (pp. 181-195). Waxmann.
- National Research Council [NRC] (2001). *Adding it Up: Helping Children Learn Mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.
- Organisation for Economic Co-operation and Development [OECD]. (2023a). *PISA 2022 assessment and analytical framework*. Paris: OECD Publishing.
- Organisation for Economic Co-operation and Development [OECD]. (2023b). *PISA 2022 results (Volume I): The state of learning and equity in education*. Paris: OECD Publishing.
- Paas, F., Renkl, A., & Sweller, J. (2003). Cognitive load theory and instructional design: Recent developments. *Educational Psychologist*, 38, 1-4. https://doi.org/10.1207/S15326985EP3801_1
- Shute, V. J. (2008). Focus on formative feedback. *Review of Educational Research*, 78(1), 153-189. <https://doi.org/10.3102/0034654307313795>

- Shute, V. J., Hansen, E. G., & Almond, R. G. (2007). An assessment for learning system called ACED: Designing for learning effectiveness and accessibility. *ETS Research Report Series*, 2007(2), i-45. <https://doi.org/10.1002/j.2333-8504.2007.tb02068.x>
- Steen, L. A., Turner, R., & Burkhardt, H. (2007). Developing mathematical literacy. *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study* (pp. 285-294). Springer US.
- Suh, J., Matson, K., Seshaiyer, P., Jamieson, S., & Tate, H. (2021). Mathematical modeling as a catalyst for equitable mathematics instruction: Preparing teachers and young learners with 21st century skills. *Mathematics*, 9(2), 162. <https://doi.org/10.3390/math9020162>
- Şahin, N. (2019). *Determining and evaluating of primary 4th-grade school students' cognitive modelling competencies*. [Doctoral dissertation, Ondokuz Mayıs University]. Ulusal Tez Merkezi.
- Şahin, N., & Eraslan, A. (2016). Modeling processes of primary school students: The crime problem. *Education and Science*, 41(183), 47-67. <http://dx.doi.org/10.15390/EB.2016.6011>
- Şahin, N., & Eraslan, A. (2017). Fourth-grade primary school students' thought processes and challenges encountered during the butter beans problem. *Educational Sciences: Theory & Practice*, 17(1), 105-127. <https://doi.org/10.12738/estp.2017.1.0038>
- Tekin Dede, A. (2015). *Developing students' modeling competencies in mathematics lessons: An action research study*. [Doctoral dissertation, Dokuz Eylül University]. Ulusal Tez Merkezi.
- Tekin-Dede, A., & Bukova-Güzel, E. (2018). A rubric development study for the assessment of modeling skills. *The Mathematics Educator*, 27(2), 33-72.
- Tran, D., & Dougherty, B. J. (2014). Authenticity of mathematical modeling. *The Mathematics Teacher*, 107(9), 672-678. <https://doi.org/10.5951/mathteacher.107.9.0672>
- Ulu, M. (2017). Examining the mathematical modeling processes of primary school 4th-grade students: Shopping problem. *Universal Journal of Educational Research*, 5(4), 561-580. <https://doi.org/10.13189/ujer.2017.050406>
- Verschaffel, L., De Corte, E., & Vierstraete, H. (1999). Upper elementary school pupils' difficulties in modeling and solving nonstandard additive word problems involving ordinal numbers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(3), 265-285. <https://doi.org/10.2307/749836>
- Wake, G. (2010). Modelling and formative assessment pedagogies mediating change in actions of teachers and learners in mathematics classrooms. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of CERME 6* (pp. 2086-2095). Institut Français de Éducation.

Watters, J. J., English, L. D., & Mahoney, S. (2004). Mathematical modeling in the elementary school. *American Educational Research Association Annual Meeting* (pp. 1-12). San Diego.

Yamane, T. (2009). *Temel örnekleme yöntemleri*. Literatür Yayıncılık.

Yıldırım, A., & Şimşek, H. (2016). *Qualitative research methods in social sciences*. (10. Baskı). Seçkin Yayıncılık.

Yin, R. K. (2017). *Applications of case study research*. Nobel Akademik Yayıncılık.

Appendix A. Mathematical Modeling Problems Applied

THE RESTAURANT PROBLEM

McDees surveyed 10 people to find out their top 5 reasons for coming to McDees. The following table shows the results of the survey. You are required to examine the following data and come up with a master list that orders the reasons from the most important to least important. You should explain to the manager of McDees how your system works.

	Fries	Burgers	Kids's meals	Quickness	Price
Customer 1	1	3	2	5	4
Customer 2	4	3	1	2	5
Customer 3	2	1	5	3	4
Customer 4	2	3	5	4	1
Customer 5	1	2	4	3	5
Customer 6	3	4	5	1	2
Customer 7	4	5	1	3	2
Customer 8	1	2	5	3	4
Customer 9	2	3	4	1	5
Customer 10	2	1	5	4	3

APPLE PIE PROBLEM

Sevinç invites some of her classmates to her house for the weekend and asks her mom to make her famous apple pie for her friends. Realizing that there are no apples left at home, her mother asks Sevinç to buy 3 kg of apples. Sevinç has two options to buy apples:

Option 1: Half a kg of apples is 1 TL in the greengrocer's shop right next to her house.

Option 2: 1 kg of apples is 1 TL in the market a little distance from her house. However, since the market is far away, she has to take any means of transportation (bus, minibus or metro).

Which option do you think it would be logical for Sevinç to choose? Explain your thoughts with reasons.

NOTE: If you take any means of transportation (bus, minibus or metro) in Adana;

In private public buses, boarding without a card is 4 TL.

Private public buses and minibuses with Kentkart, 3 TL for civilians.

Private public buses and minibuses with Kentkart, 2 TL for students.

Municipal buses and metro, 2 TL for civilians.

Municipal buses and metro, 1 TL for students.

TIME IN SCHOOL PROBLEM

Deniz thinks that he has spent a lot of time in school, and he says, "I do not understand how time passes in school! I spend most of the year at school." What do you think about this situation? Do you also think that you spend most of the year at school? Please do the necessary calculations to determine whether he is right or not.

BUTTER BEANS PROBLEM

Farmer Uncle Ali is trying to decide which light condition is better for growing beans. Uncle Farmer Ali visited the Farmers' Union, which grows the bean plant, because he thought it would help him to decide, and saw that they used two different light conditions. Two different light conditions are as follows;

- Growing the beans outdoors in daylight
- Growing beans only under shade

The Farmers' Union measured and recorded the weight of the beans after ten weeks. They grew four (4) rows of beans in daylight and shade.

	Sunlight			Shade			
Butter Bean Plants	Week 6	Week 8	Week 10	Butter Bean Plants	Week 6	Week 8	Week 10
Row 1	9 kg	12 kg	13 kg	Row 1	5 kg	9 kg	15 kg
Row 2	8 kg	11 kg	14 kg	Row 2	5 kg	8 kg	14 kg
Row 3	9 kg	14 kg	18 kg	Row 3	6 kg	9 kg	12 kg
Row 4	10 kg	11 kg	17 kg	Row 4	6 kg	10 kg	13 kg

YOUR TASK



- Using the data above, choose the most suitable light condition for growing beans in order to get the best yield, and explain it in a letter to Uncle Ali, regarding why you chose this condition.
- Estimate the weight of the beans at the end of week 12 in daylight and in shade and explain how you made this estimation in a letter to Uncle Ali.



FUEL STATION PROBLEM

Your car is about to run out of fuel and you can't decide where to buy fuel to fill your tank completely. Your house is in Çukurova and you have two options to buy fuel. The first option is a fuel station right next to your house, while the second option is a fuel station in Seyhan, 10 km away from your house. The prices of 1 liter of fuel at these two fuel stations are as follows:

	1 liter gasoline price	1 liter diesel price
Çukurova	5 TL	4 TL
Seyhan	4 TL	3 TL

Considering a car brand of your choice from the table below, decide whether it would be more profitable to buy fuel in Çukurova or Seyhan.

Model	Average Fuel Consumption per 10 km	Fuel Tank
 Toyota Yaris	3 liter (Gasoline)	42 liter
 Hyundai i20	2 liter (Gasoline)	45 liter

 Mini Cooper	4 liter (Gasoline)	40 liter
 Citroen C-Elysee	1 liter (Diesel)	50 liter

STRAW BALE PROBLEM



In the figure, there are 5 straw bales in the bottom row. When moving to the next row, there is one less straw bale each time. In other words, there are 5, 4, 3, 2 and 1 straw bales from bottom to top. Calculate the approximate height of the whole pile.