ISSN: 2146-8168 http://bilader.gop.edu.tr

Dergiye Geliş Tarihi: 27.01.2012 *Baş Editör*: Naim ÇAĞMAN
Yayına Kabul Tarihi: 03.02.2012 *Alan Editörü*: Ercan TUNÇ

Ahmet Çevik[1]

Hesaplanabilirlik kuramı ve Turing derecelerine giriş

Özet

Hesaplanabilirlik (Özyineleme) kuramı Gödel'in eksiklik teoremiyle başlamış, Alan Turing'in Turing makineleriyle biçimsel bir hale getirilmiş, Emil Post ve Stephen Kleene ile devam etmiş bir matematiksel mantık dalıdır. Bu makalede hesaplanabilirlik kuramına giriş yapacağız ve Turing dereceleriyle ilgili literatürde bilinen sonuçları vereceğiz.

Anahtar Kelimeler: *Matematiksel mantık, hesaplanabilirlik, özyineleme kuramı, Turing dereceleri, karar verilemezlik.*

Gaziosmanpaşa Journal of Scientific Research 1 (2012) 1-20

Introduction to computability theory and Turing degrees

Abstract

Computability (Recursion) Theory is a branch of mathematical logic which was begun with Gödel's incompleteness theorem, later formalized by Alan Turing, and succeeded by Emil Post and Stephen Kleene's work. In this survey paper, we introduce the reader recursion theory and give some of the known results in the theory of Turing degrees.

Keywords: *Mathematical logic, computability, recursion theory, Turing degrees, undecidability.*

Received: 27.01.2012, *Accepted*: 03.02.2012

[1]University of Leeds, School of Mathematics, Department of Pure Mathematics, Leeds, LS2 9JT Leeds, İngiltere (e-posta: mmac@leeds.ac.uk)

1 Giriş

Matematiksel mantık ve temeller dört ana alandan oluşur. Bu alanlar *modeller kuramı*, *kümeler kuramı*, *kanıt kuramı*, ve *hesaplanabilirlik kuramı* olarak belirtilir. Biz bu makalede hesaplanabilirlik kuramına ve Turing derecelerine giriş yapacağız.

Hesaplanabilirlik kuramının matematiğin bir dalı haline gelişi yakın geçmişte olmuştur. İlk kez Gödel'in eksiklik kuramında hesaplanabilir fonksiyonların ne olduğu biçimsel olarak yazılmıştır. Hesaplanabilir fonksiyonların ne olduğunu anlamak için önce algoritmaların ne olduğunu bilmek gerekir. Doğal sayılar kümesini ω ile ifade edelim. Sezgisel olarak tanımlamak gerekirse bir $f : \omega \to \omega$ fonksiyonu için olan bir algoritma, x girdisinde sonlu adımda bir $y = f(x)$ çıktısı veren sonlu sayıda olan komut kümesidir. Algoritmalar *kısmi* fonksiyon belirtirler. Örneğin, bir $p(x, y)$ polinomu için,

$$\psi(x) := \text{“}p(x, y) = 0 \text{ koşulunu sağlayan en küçük } y\text{”}$$

bir fonksiyon olsun. Görüleceği gibi ψ, her x değeri için tanımlı olmayabilir. Bu tip algoritmik kısmi fonksiyonlar eğer her argüman için tanımlıysa, yani *tam* fonksiyonsa, bu fonksiyonlara *hesaplanabilir* fonksiyon denir. Bir $A \subset \omega$ kümesi için, eğer her $n \in \omega$ için $n \in A$ veya $n \notin A$ ilişkisine karar veren bir algoritma varsa bu kümeye *hesaplanabilir küme* denir. Örneğin $\{i : i \text{ bir asal sayıdır}\}$ kümesi hesaplanabilir bir kümedir, çünkü verilen herhangi bir i doğal sayısı için i'nin asal sayı olup olmadığına algoritmik olarak karar verebiliriz. Bu demektir ki, verilen her i için, sonlu adımda i'nin bu kümenin elemanı olup olmadığına karar verilebilir. Fakat,

$$\text{S}=\{i : \text{Pi sayısının ondalık kesiminde arka arkaya } i \text{ tane 1 vardır}\}$$

kümesi hesaplanabilir değildir. Bilindiği gibi Pi sayısının ondalık kesimi sonsuzdur fakat bugün bile hesaplanmaya devam ediliyordur. Öyleyse eğer Pi sayısının ondalık kesiminde gerçekten i tane arka arkaya 1 varsa bu soruya cevap verebiliriz. Fakat yoksa “yoktur” deme şansımız olamaz çünkü henüz bakmadığımız sonsuz tane daha basamak vardır ondalık kesimde. O halde sonlu adımda buna karar veremeyiz. Pi sayısı belki de periyodik bir yapıya sahip olsaydı buna karar verme şansımız olurdu fakat bilindiği gibi bu sayı periyodik bir özelliğe sahip değildir.

Hesaplanabilir kısmi fonksiyonları daha matematiksel olarak göstermek için Turing makinelerini tanımlayalım. Turing makineleri 1936 yılında İngiliz matematikçi Alan Turing tarafından tanımlanmıştır. Bir *M Turing makinesi* hücrelere bölünmüş çift taraflı sonsuz bir banttan, sembollerden oluşan bir Σ kümesinden (alfabe), banttaki sembolleri okuyan ve sağ/sol hareketi yapan bir bant kafasından, sonlu bir Q durum kümesinden, ve δ geçiş fonksiyonundan meydana gelir. Geçiş fonksiyonu $\delta : Q \times \Sigma \to Q \times \Sigma \times \{R, L\}$ şeklinde tanımlanır. Yani geçiş fonksiyonu makinenin durumuna bakar, banttaki kafanın bulunduğu hücreden bir sembol okur ve buna göre makinenin durumunu değiştirir, okuduğu hücredeki sembolü değiştirebilir ve bant kafasını sağa veya sola götürür. Bu fonksiyon her argüman için tanımlı olmak zorunda değildir. Bir M Turing makinesi hesaplamasına q_s *başlangıç durumundan* başlar. Bantında girdi yazılıdır ve bant kafası girdinin başındaki sembolün başındadır. Geçiş fonksiyonunun tanımlanmasına göre hesaplama adım adım yapılır ve eğer makine herhangi bir q_f *durma durumuna* girerse M makinesi x girdisinde *sonlanır* denir ve makinenin çıktısı da bantta o anda yazılı olan dizidir.

Church-Turing Hipotezi Turing makinesi tarafından hesaplanan fonksiyonlar sınıfının algoritmik kısmi hesaplanabilir fonksiyonlar sınıfına eşit olduğunu söyler. Başka bir deyişle Turing hesaplanabilir fonksiyonlar=sezgisel olarak hesaplanabilir fonksiyonlar. Bu hipotez matematiksel bir önerme değildir. Çünkü, "algoritmik" yani "sezgisel" hesaplamanın matematiksel tanımı yoktur. Buna karşın Turing makinesi matematiksel bir tanımdır. O halde bu önerme felsefi bir önermedir. Kısaca Turing hesaplanabilir fonksiyonların kısmi hesaplanabilir fonksiyonlar olduğunu kabul ediyoruz. O halde bütün olası kısmi hesaplanabilir fonksiyonlar listelenebilir. Çünkü her Turing makinesinin geçiş fonksiyonu tanımı, alfabesi, durum kümesi gibi bileşenleri sonludur. Turing makinesi tanımı sonlu bir yapıdır. Bu yüzden Turing makinesi tanımlarını aslında algoritmalar olarak düşünebiliriz.

Notasyon

Doğal sayılar kümesini ω ile gösterelim. Küçük latin harfler doğal sayılar için değişken olarak kullanılsın. f, g, h gibi harfler, $n \geq 1$ olmak üzere, $\omega^n \to \omega$ üzerinde tanımlı tam fonksiyonları göstersin. Küçük ve büyük $\Phi, \Psi, \Theta, \varphi, \psi, \theta$ gibi bazı Yunan harfleri ω üstünde tanımlı kısmi hesaplanabilir fonksiyonları göstersin. Büyük latin harfleri de ω'nın alt kümeleri için kullanılsın. Bir A kümesinin χ_A *karakteristik fonksiyonu* $A(x) = 1$ eğer $x \in A$ ise; $A(x) = 0$ eğer $x \notin A$ ise olarak tanımlansın. $f \upharpoonright x$ f fonksiyonunun $y < x$ argümanları ile sınırlanmış hali olarak gösterilsin, ve benzer şekilde $A \upharpoonright x$ ifadesi $\chi_A \upharpoonright x$ anlamına gelsin. Kısmi hesaplanabilir fonksiyonların numaralandırılmasıyla ilgili olarak, n'inci kısmi hesaplanabilir fonksiyonu Ψ_n olarak gösterelim. $\Psi_n(x) \downarrow$ ifadesi Ψ_n'nin x girdisinde sonlandığını, yani tanımlı olduğunu belirtsin. $\Psi_n(x) \uparrow$ ifadesi ise bu fonksiyonun x girdisinde tanımsız olduğunu göstersin. $\overline{A}$ ifadesi A'nın tamlayanını göstersin. $|A|$ ifadesi A'nın kardinalini göstersin. $A \oplus B$, $\{2i : i \in A\} \cup \{2i+1 : i \in B\}$ kümesini göstersin ve buna A ve B'nin *katılımı* diyelim. $\langle x, y\rangle$ ifadesi (x,y) ikilisinin Cantor'un standart $\omega \times \omega \to \omega$ çiftleme fonksiyonu altındaki görüntüsünü belirtsin. Bir f fonksiyonunun tanım kümesi dom f olarak gösterilsin. A_s ifadesi s adımının sonunda A'da listelenmiş olan elemanlarını belirtsin.

ω^ω ifadesini ω'dan ω'ya olan fonksiyonların kümesini göstermek için kullanalım; 2^ω ise ω'nın kuvvet kümesini göstersin. $\omega^{<\omega}$ ifadesi ω üzerinde tanımlı olan sonlu dizileri göstersin. $2^{<\omega}$ ifadesi $\{0, 1\}$ üzerinde tanımlı sonlu dizileri göstersin. $\rho, \sigma, \tau, \upsilon$ gibi harfler $2^{<\omega}$ için değişken olarak kullanılsın. $|\sigma|$ ifadesi σ dizisinin uzunluğunu göstersin. Uzunluğu 0 olan *boş dizi* $\emptyset$ olarak ifade edilsin. $\sigma * \tau$ ifadesi σ dizisinin τ ile bitiştirilmesini göstersin. $\sigma \subset \tau$ ifadesi σ'nın τ dizisinin bir *başlangıç kesimi* olduğunu göstersin. Bu durumda τ dizisi σ dizisinin *uzantısı* olur. Eğer ne $\sigma \subset \tau$ ne de $\tau \subset \sigma$ ise bu dizilere *uyumsuz* denir. Aksi halde bu dizilere *uyumlu* denir.

2 Numaralandırılabilir Kümeler

Daha önceden de demiştik ki,

$$S = \{i : \text{Pi sayısının ondalık kesiminde arka arkaya } i \text{ tane 1 vardır}\}$$

hesaplanabilir bir küme değildir. Bu küme yarı hesaplanabilirdir. Bu bize yarı hesaplanabilirlik kavramını ortaya çıkarır.

Tanım 1. Bir A kümesi eğer kısmi hesaplanabilir bir fonksiyonun tanım kümesine eşitse A kümesine (çözümlü) *numaralandırılabilir* küme denir. e'inci numaralandırılabilir kümeyi W_e olarak gösterelim. Öyleyse $W_e = \text{dom } \varphi_e = \{x : \varphi_e(x) \downarrow\}$.

Her hesaplanabilir küme aynı zamanda bir numaralandırılabilir kümedir. Çünkü eğer A hesaplanabilir bir kümeyse, $\psi(x) = 1$ eğer $\chi_A(x) = 1$ ise; $\psi(x) \uparrow$ eğer $\chi_A(x) = 0$ ise, kuralı ile $A = \text{dom } \psi$ olarak yazılabilir.

Sezgisel olarak diyebiliriz ki, eğer bir kümenin elemanları algoritmik olarak listelenebiliyorsa bu kümeye numaralandırılabilir küme denir. Şimdi literatürde durma problemi olarak bilinen soruyu ele alacağız ve bunu gösteren kümenin hesaplanamaz olduğunu göstereceğiz. *Durma problemi* verilen bir algoritma ve x girdisi için o algoritmanın x girdisinde tanımlı olup olmadığı sorusudur. Yani, diğer bir deyişle, bir kısmi fonksiyon φ için, durma problemi verilen bir x girdisi için $\varphi(x) \downarrow$ olup olmadığına karar vermektir.

Tanım 2. $K = \{x : \varphi_x(x) \downarrow\}$ olsun.

Önerme 3. K numaralandırılabilir bir kümedir.

Kanıt. K aşağıdaki kısmi hesaplanabilir fonksiyonun tanım kümesidir

$$\psi(x) = \begin{cases} x & \text{eğer } \varphi_x(x) \downarrow \\ \text{tanımsız} & \text{aksi durumda.} \end{cases}$$

Burada Church-Turing hipotezini kullanarak, ψ'nin kısmi hesaplanabilir olduğunu gösterebiliriz. Önce x'inci kısmi hesaplanabilir fonksiyon bulunur ve x girdisinde φ fonksiyonumuzun görüntüsü eğer $\varphi_e(x) \downarrow$ ise x olarak tanımlanır. □

Önerme 4. K karar verilemez (hesaplanamaz) bir kümedir.

Kanıt. Eğer K'nın hesaplanabilir bir χ_K karakteristik fonksiyonu olsaydı, aşağıdaki fonksiyon da hesaplanabilir olurdu

$$f(x) = \begin{cases} \varphi_x(x) + 1 & \text{eğer } x \in K \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } x \notin K \text{ ise.} \end{cases}$$

Her x için $f \neq \varphi_x$ olacağından dolayı f hesaplanabilir olamaz. □

O zaman verilen herhangi x için $x \in K$ ilişkisine karar veren bir algoritma yoktur.

Teorem 5. Verilen bir A kümesi için, eğer hem A hem de $\overline{A}$ numaralandırılabilir ise, A hesaplanabilirdir.

Kanıt. Eğer hem A hem de $\overline{A}$ kümeleri numaralandırılabilir ise o zaman bu kümeler için elemanlarını listeleyen bir algoritma vardır. Bu kısmi hesaplanabilir fonksiyonlara φ ve ψ diyelim. Verilen bir $x \in \omega$ için, varsayalım ki $x \in A$; o zaman φ fonksiyonu x'i belli bir adım sonunda verecektir. Şimdi de $x \notin A$ olduğunu varsayalım. O zaman da ϕ fonksiyonu sonlu adımda x'i verecektir. Bu şekilde her x için $x \in A$ olup olmadığını hesaplanabilir bir şekilde bulabiliriz. □

Eksonuç 6. $\overline{K}$ numaralandırılabilir değildir.

3 Göreceli hesaplama ve Turing dereceleri

Göreceli hesaplamanın temel fikri bir kümeyi kullanarak başka bir kümeyi hesaplayabilmektir. Sezgisel olarak ana düşünce şudur: A ve B birer küme olsun. A'nın B'de hesaplanabilir olması için $n \in A$ ilişkisine, B'nin eleman bilgilerini algoritmik bir şekilde kullanarak, karar vermek durumundayız. Bunun için *bilge (oracle) Turing makinesi* kullanılır. Bir bilge Turing makinesi, çalışma bantın dışında bir de bilge bantına sahip bir Turing makinesidir. Bilge bantında verilen bir B kümesinin karakteristik fonksiyonu yazılıdır. Çalışma bantının aksine bilge bantına sembol yazılmaz, sadece okunur. O halde bilge Turing makinesi için geçiş fonksiyonu $\delta : Q \times \Sigma_1 \times \Sigma_2 \to Q \times \Sigma_2 \times \{R, L\}^2$ şeklinde bir kısmi eşleme olarak tanımlanır. Burada Σ_1 bilge alfabesini, Σ_2 ise çalışma alfabesini göstersin. Hesaplama sırasında bilge bantında verilen kümenin karakteristik bilgisi okunur ve buna göre hesaplama çalışma bantında gerçekleşir.

Hesaplama sırasında bilge bantında taranan boş olmayan hücrelerin toplam sayısı $y+1$ olsun. Bu durumda y sayısı B'nin eleman testinde kullanılan en büyük sayıdır diyebiliriz. O zaman $z \leq y$ elemanları *kullanılmıştır* diyebiliriz. Bunu ilerde daha iyi tanımlayacağız.

Önceden de belirtildiği gibi Turing makineleri tanımları, yani kısmi hesaplanabilir fonksiyonlar, listelenebilir. e'inci kısmi hesaplanabilir fonksiyonu (yani e'inci Turing makinesini) Ψ_e olarak göstermiştik. Burada herhangi bir bilge kullanımı söz konusu değil henüz. Eğer bu Turing makinesi A bilgesi kullanıyorsa bunu $\Psi_e(A)$ olarak ifade ederiz.

Tanım 7. Bir ψ kısmi fonksiyonu eğer bilge bantında A kümesinin karakteristik fonksiyonunun yazılı olduğu bir Ψ_e bilge Turing makinesi tarafından hesaplanabiliyorsa, yani her x, y için $\psi(x) = y \Leftrightarrow \Psi_e(x) = y \downarrow$ koşulu sağlanıyorsa, buna ψ *A'da hesaplanabilir* denir. Bir diğer deyişle ψ, *A-hesaplanabilirdir.* Bu ilişki $\psi \leq_T A$ olarak gösterilir. Ayrıca bu $\psi = \Psi_e(A)$ şeklinde ifade edilir.

0 ve 1'lerden oluşan $\sigma \in 2^{<\omega}$ dizileri, karakteristik fonksiyonların sonlu uzunluktaki başlangıç kesimleri olarak görülmelidir. Çünkü kümeler karakteristik fonksiyonlarıyla tanımlanır.

Tanım 8. $\Psi_{e,s}(A; x) \downarrow = y$ ifadesi A bilgesine sahip Ψ_e kısmi hesaplanabilir fonksiyonun x girdisinde s adım sonunda tanımlı olduğunu ve görüntüsünün y olduğunu göstersin.

Teorem 9. Aşağıdakiler, kısmi hesaplanabilir fonksiyonların tanımlı olma durumuyla ilgili bazı önemli özellikleridir.

(i) $\Psi_e(A; x) = y \Longrightarrow \exists s\ \exists \sigma \subset A\, [\Psi_{e,s}(\sigma; x) = y]$,

(ii) $\Psi_{e,s}(\sigma; x) = y \Longrightarrow \forall t \geq s\ \forall \tau \supset \sigma\, [\Psi_{e,t}(\tau; x) = y]$,

(iii) $\Psi_e(\sigma; x) = y \Longrightarrow \forall A \supset \sigma\, [\Psi_e(A; x) = y]$.

Daha önce verdiğimiz göreceli hesaplanabilir kavramının tanımını bu sefer kümeler için tekrar vereceğiz.

Tanım 10. (i) A ve B iki küme olsun. Eğer bir e için $B = \Psi_e(A)$ ise, B kümesi *A-hesaplanabilirdir* ve $B \leq_T A$ olarak gösterilir. $B <_T A$ ifadesi $B \leq_T A$ ve $A \not\leq_T B$ olduğunu göstersin.

(ii) $W_e(A)$ ifadesi dom $\psi_e(A)$ anlamına gelsin. Eğer bir e için $B = W_e(A)$ ise, B kümesi *A'da (çözümlü) numaralandırılabilirdir.*

Bir not olarak, $B \leq_T A \iff B$ ve $\overline{B}$ *A'da numaralandırılabilirdir* ifadesinin doğru olduğu akılda tutulmalıdır. Hem B hem de $\overline{B}$'nin numaralandırılabilir olduğu durumda aslında B'nin hesaplanabilir olduğunu hatırlarsak yukarıdaki önerme daha iyi anlaşılır.

Teorem 11. Aşağıdaki önermeler birbirine eşittir.

(i) B kümesi A'da numaralandırılabilir;

(ii) $B = \emptyset$ veya B kümesi A-hesaplanabilir bir tam fonksiyonun görüntüsüne eşittir.

Kanıtı burada vermeyeceğiz ancak merak eden okuyucular [10] s.51'e bakabilir. Şimdi Turing derecelerini ve zıplama işlecini inceleyeceğiz.

Tanım 12. Eğer hem $A \leq_T B$ hem de $B \leq_T A$ ise A ve B kümeleri *Turing denktir* ve bu $A \equiv_T B$ olarak gösterilir. Bir $A \subset \omega$ kümesinin *Turing derecesi* (çözülemezlik derecesi) $\deg(A) = \{B : B \equiv_T A\}$ olarak verilir. Ayrıca $\deg(A) \cup \deg(B) = \deg(A \oplus B)$ olarak tanımlanır.

Bundan sonra $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ gibi küçük ve kalın latin harflerini dereceler için kullanıp, $\mathbf{D}$ harfini tüm derecelerin sınıfı olarak göstereceğiz. $\mathbf{D}$ sınıfı $\deg(A) \leq \deg(B) \iff A \leq_T B$ ilişkisi altında yarı sıralı (partial order) bir küme oluşturur. Eğer $A <_T B$ (yani $A \leq_T B$ ve $B \not\leq_T A$) ise, $\deg(A) < \deg(B)$ doğrudur. Eğer bir $\mathbf{a}$ derecesi numaralandırılabilir bir küme içeriyorsa bu dereceye *numaralandırılabilir derece* diyoruz. $\mathbf{R}$ sınıfı bütün numaralandırılabilir dereceler olsun. Eğer bir $\mathbf{a}$ derecesinin içindeki A kümesi, $\mathbf{b}$ derecesinin içindeki B kümesinde numaralandırılabilirse $\mathbf{a}$ derecesi *$\mathbf{b}$'de numaralandırılabilirdir.*

İki kümenin derecelerinin eşit olması demek bu kümenin aynı zorlukta hesaplanabilir (veya hesaplanamaz) olması demektir. Fakat $\mathbf{a} < \mathbf{b}$ demek $\mathbf{b}$'deki kümeleri hesaplamak $\mathbf{a}$'daki kümeleri hesaplamaktan daha zor anlamına gelmektedir. Ayrıca $\deg(A \oplus B)$'nin $\deg(A)$ ve $\deg(B)$ için en küçük üst sınır belirlediği bilinmelidir. İki derecenin her zaman bir en küçük üst sınırı olmasına rağmen en büyük alt sınırı her zaman olmayabilir. Bu yüzden $(\mathbf{D}, \leq)$ yapısı bir *üst yarı örgü* (upper semi lattice) belirtir fakat ne $\mathbf{D}$ ne de $\mathbf{R}$ bir tam örgüdür. Bunu ilerde göstereceğiz.

K kümesinin hesaplanamaz olduğunu göstermiştik. Kanıtta kullanılan bu yönteme *köşegen* yöntemi diyoruz. Bu yöntemi bir A kümesine göre göreceli yaparsak K^A kümesini elde ederiz.

Tanım 13. $K^A = \{x : \Psi_x(A; x) \downarrow\} = \{x : x \in W_x(A)\}$ olsun. K^A kümesine A'nın *zıplaması* adı verilir ve bu A' şeklinde gösterilir. A'nın n'inci zıplaması $A^{(0)} = A$; $A^{n+1} = (A^{(n)})'$ olarak elde edilir.

Doğal olarak, $K^A = A'$, A'da numaralandırılabilirdir ve $A <_T K^A$ ilişkisi vardır.

Teorem 14 (Zıplama teoremi)**.** (i) $A' \not\leq_T A$.

(ii) Eğer A kümesi B'de numaralandırılabilir ise ve $B \leq_T C$ ise, A kümesi C kümesinde numaralandırılabilirdir.

(iii) $B \leq_T A \iff B' \leq_T A'$.

(iv) A B'de numaralandırılabilir $\iff$ A $\overline{B}$'de numaralandırılabilir.

Zıplama teoreminin kanıtı için [1] s.150'ye bakılabilir.

Teorem 15. (i) $\mathbf{D}$'nin en küçük elemanı vardır ve bu $\mathbf{0}$ ile gösterilir. $\mathbf{0}$ derecesi bütün hesaplanabilir kümeleri içerir.

(ii) Her $\mathbf{a}$ Turing derecesi sayılabilir sonsuzlukta eleman içerir. Yani $|\mathbf{a}| = \aleph_0$.

(iii) Verilen bir $\mathbf{a}$ derecesinden küçük en fazla sayılabilir sonsuz tane derece vardır. Yani $|\{\mathbf{b} : \mathbf{b} \leq \mathbf{a}\}| \leq \aleph_0$.

(iv) $\mathbf{D}$ sayılamaz sonsuz büyüklüğündedir. Daha açıkça, $|\mathbf{D}| = 2^{\aleph_0}$.

Kanıt. (i) $\emptyset$ karar verilebilir bir kümedir çünkü boştur ve derecesi $\mathbf{0}$ olarak tanımlanır.

(ii) $\mathbf{a} = \deg(A)$ bir Turing derecesi olsun. O zaman,

$$\mathbf{a} = \{X : X \equiv_T A\} \subset \{X : X \leq_T A\} \subset \{\Psi_i(A) : \Psi_i(A) \text{ tam bir fonksiyondur}\} \subset \{\Psi_i(A) : i \geq 0\}.$$

Bu durumda $\mathbf{a}$ sayılabilir bir kümenin alt kümesidir. Yani $\mathbf{a}$ sayılabilirdir.

$\mathbf{a}$'nın sonsuz olduğunu kanıtlamak için aşağıdaki kümeyi ele alalım

$$A_i = \begin{cases} A \cup \{i\} & \text{eğer } x \notin A \text{ ise} \\ A - \{i\} & \text{eğer } x \in A \text{ ise.} \end{cases}$$

Her $i \neq j$ için $A_i(i) \neq A_j(i)$ olduğunu görürüz. O halde $A_i \neq A_j$. Her i için $A_i \equiv_T A$ olduğu görülebilir. Yani $\mathbf{a}$ derecesi $A_0, A_1, \ldots$ gibi birbirinden farklı kümeleri içinde bulundurur.

(iii) Her A kümesi ve $B \leq_T A$ olmak üzere verilen her B kümesi için, $B = \Psi_e(A)$ koşulunu sağlayan bir $e \in \omega$ vardır. O zaman en fazla sayılabilir sonsuz tane A'da hesaplanabilir küme olmak zorundadır.

(iv) Kanıt iki aşamadan oluşuyor. İlk önce en fazla $2^{\aleph_0}$ derece olduğunu kanıtlamamız gerekir. Seçim beliti kullanırsak, derecelerden $\mathcal{P}(\omega)$'ya her dereceden bir küme seçen bir birebir fonksiyon tanımlanabilir. Bunun yanında B'den $A \oplus B$ kümesine olan bir eşleme, $\mathcal{P}(\omega)$'dan $\{X : A \leq_T X\}$ kümesine birebir fonksiyon tanımlar. Yani A'yı hesaplayan en az $2^{\aleph_0}$ kadar küme vardır demektir bu. Bu demektir ki kendinden büyük en az $2^{\aleph_0}$ kadar derece vardır. İki sonucu birleştirirsek tam olarak $2^{\aleph_0}$ derece olduğu ortaya çıkar.

□

Her $\mathbf{a}$ için, $\mathbf{a}' > \mathbf{a}$ ilişkisinin doğru olduğu ve $\mathbf{a}'$ derecesinin $\mathbf{a}$ derecesinde numaralandırılabilir olduğu görülebilir. $\mathbf{0}^{(n)} = \deg(\emptyset^{(n)})$ olarak tanımlarsak,

$$\mathbf{0} < \mathbf{0}' < \mathbf{0}'' < \cdots < \mathbf{0}^{(n)}$$

olduğu açıkça görülmektedir. Bu yüzden $\mathbf{D}$ yapısının minimum elemanı $\mathbf{0}$ olmakla birlikte maksimum elemanı yoktur. Burada $\mathbf{0}$ derecesinin bütün hesaplanabilir kümelerin kümesi olduğu tekrar not edilmelidir. $\mathbf{0}'$ derecesinin ise K kümesinin derecesi olduğu görülebilir.

4 Aritmetik hiyerarşi ve Δ_2^0 kümeleri

$\emptyset'$ kümesinde hesaplanabilen kümelerin nasıl sınıflandırılacağı da önemli bir konudur. Bu konuya geçmeden önce aritmetik hiyerarşiden bahsetmek daha doğru olur.

Tanım 16. (i) Her $x \in \omega$ için eğer $x \in A \iff \exists y R(x,y)$ koşulunu sağlayan hesaplanabilir bir R ilişkisi varsa, A bir Σ_1^0 kümesidir ve bu $A \in \Sigma_1^0$ olarak gösterilir.

(ii) Her $x \in \omega$ için eğer $x \in A \iff \forall y R(x,y)$ koşulunu sağlayan hesaplanabilir bir R ilişkisi varsa, A bir Π_1^0 kümesidir ve bu $A \in \Pi_1^0$ olarak gösterilir.

(iii) Eğer $A \in \Sigma_1^0 \cap \Pi_1^0$ ise, A bir Δ_1^0 kümesidir ve bu $A \in \Delta_1^0$ olarak gösterilir.

Şimdi daha genel bir tanım yapalım.

Tanım 17. (i) $\Sigma_0^0 = \Pi_0^0 = \Delta_0^0 =$ "bütün hesaplanabilir ilişkiler". Her $n \geq 0$ için:

(ii) $R \in \Pi_n^0$ olmak üzere, $\Sigma_{n+1}^0 = (\exists y_l)R(x_k, y_l)$ formundaki bütün ilişkiler.

(iii) $R \in \Sigma_n^0$ olmak üzere, $\Pi_{n+1}^0 = (\forall y_l)R(x_k, y_l)$ formundaki bütün ilişkiler.

(iv) $\Delta_{n+1}^0 = \Sigma_{n+1}^0 \cap \Pi_{n+1}^0$.

Örneğin, Tot $= \{i : \varphi_i$ bir tam fonksiyondur$\}$ bir Π_2^0 kümesidir. Çünkü,

$$\begin{aligned} i \in \text{Tot} &\iff (\forall n)\varphi_i(n)\downarrow \\ &\iff (\forall n)(\exists s)\varphi_{i,s}(n)\downarrow. \end{aligned}$$

Tot kümesinin aynı zamanda Δ_3^0 olduğunu da gösterebiliriz. Bu da,

$$\begin{aligned} i \in \text{Tot} &\iff (\exists m)(\forall n)\varphi_i(n)\downarrow \\ &\iff (\forall n)(\exists s)(\forall m)\varphi_{i,s}(n)\downarrow \end{aligned}$$

olduğundan dolayı Tot $\in \Sigma_3^0 \cap \Pi_3^0$ elde edilir. Görüldüğü gibi formülümüzde $\exists m$ veya $\forall m$ gibi gelişigüzel zararsız yüklemler yazabildiğimiz için

$$\Sigma_n^0, \Pi_n^0 \subset \Delta_{n+1}^0 \subset \Sigma_{n+1}^0, \Pi_{n+1}^0 \cdots$$

ilişkisi doğrudur diyebiliriz.

Σ_1^0 kümeleriyle numaralandırılabilir kümeler arasındaki ilişkiyi açıklamamız gerekir. Şöyle ki; A numaralandırılabilirdir $\iff A \in \Sigma_1^0$ ifadesi doğrudur. Kanıtı burada vermeyeceğiz fakat detaylar için [1] s.75'e bakılabilir. Ayrıca $A \in \Sigma_n^0 \iff \overline{A} \in \Pi_n^0$ önermesi de doğrudur. Yani Σ_n^0 ve Π_n^0 sınıfları birbirinin tamlayanıdır.

Eğer numaralandırılabilir bir A kümesi bütün numaralandırılabilir kümeleri hesaplayabiliyorsa, A kümesine Σ_1^0-*tam* denir. $\mathbf{0'}$ derecesi bilinen en büyük numaralandırılabilir derece olmakla beraber, K kümesinin Σ_1^0-tam olduğunu not etmeliyiz.

Şimdi aşağıdaki önermeyi verelim.

Önerme 18. $A \in \Delta_2^0 \iff A \leq_T K$.

Kanıt. Bilindiği gibi K kümesi Σ^0_1-tamdır. Bu yüzden her Σ^0_1 veya Π^0_1 kümesi K'da hesaplanabilirdir. Σ^0_1 veya Π^0_1 kümesinde hesaplanabilir olmak K'da hesaplanabilir olmaktır. □

Aşağıdaki önerme [8] çalışmasına aittir.

Önsav 19 (Limit önsavı)**.** Hesaplanabilir bir g fonksiyonu için, $A \in \Delta^0_2 \iff \chi_A(x) = \lim_{s\to\infty} g(x,s)$.

Kanıt. g fonksiyonunun verildiğini varsayalım. O halde,

$$\begin{aligned} x \in A &\iff (\forall s)(\exists t)(t \geq s \wedge g(x,t) = 1) \\ &\iff (\exists s)(\forall t)(t \geq s \rightarrow g(x,t) = 1), \end{aligned}$$

ve buradan $A \in \Delta^0_2$ olduğu sonucu çıkar.

Diğer tarafan, eğer $A \in \Delta^0_2$ ise $A \leq_T K$. $g(x,s) = \Psi_e(K_s)$ olmak üzere e, $\chi_A = \Psi_e(K)$ ifadesini sağlayan bir indis olsun. O halde χ_A, g fonksiyonunun limitidir. □

5 İnşa yöntemleri

Bu bölümde hesaplanabilirlik kuramında kullanılan inşa yöntemlerini farklı örneklerle göstereceğiz.

Sonlu uzantı yöntemi

Şimdi $\mathbf{D}$ yapısının düz sıralı olmadığını göstereceğiz. Yani öyle iki $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{D}$ dereceleri bulacağız ki ne $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ ne de $\mathbf{b} \leq \mathbf{a}$ doğru olacak. Böyle derecelere *karşılaştırılamaz* dereceler denir. Teoremi yazmadan önce birkaç tanım yapalım.

Sorulabilecek doğal bir soru, $\mathbf{0}$ ile $\mathbf{0}'$ arasında bir derece olup olmadığıdır. Kleene ve Post [4] iki tane $A, B \leq_T \emptyset'$ karşılaştırılamaz küme inşa ederek bu soruya olumlu cevap vermişlerdir. Temel düşünce, $A \not\leq_T B$ gibi bir zor koşul yerine sonsuz tane daha basit $\{R_e\}_{e\in\omega}$ koşul dizisi yazmaktır. Bu koşullara *gereksinim* denilir. Burada her R_e aslında $A \neq \Psi_e(B)$ anlamına geliyor. Kleene ve Post kanıtta bu kümelerin karakteristik fonksiyonlarını her adımda inşa ettiler. Her s adımında bir gereksinimi sağlayan σ_s ve τ_s kısmi fonksiyonları tanımlanır ve $A = \bigcup_s \sigma_s$, $B = \bigcup_s \tau_s$ kümeleri elde edilir. İnşada her s adımında σ_s nin inşası bir bilge kullanılarak gerçekleşecek. Göstereceğimiz teoremde bilge olarak $\emptyset'$ kullanılacaktır. Ayrıca her s için $\sigma_s \subset \sigma_{s+1}$ özelliği sağlanmaktadır. Eğer σ_{s+1} dizisi σ_s dizisinin sonlu uzantısıysa bu özelliği sağlayan yönteme *sonlu uzantı yöntemi* denir.

Teorem 20. İki tane karşılaştırılamaz derece vardır.

Kanıt. $A \not\leq_T B$ ve $B \not\leq_T A$ koşullarını sağlayan iki küme inşa edeceğiz. Bu iki büyük koşulu yukarıda değindiğimiz gibi sonsuz tane daha basit koşul dizilerine böleceğiz ve her birini inşamızın belli bir adımında sağlayacağız. Koşul dizilerimiz aşağıdaki gibi olacak.

$$\begin{aligned} R_{2e} &: A \neq \Psi_e(B) \\ R_{2e+1} &: B \neq \Psi_e(A) \end{aligned}$$

A ve B kümelerinin inşası için sonlu uzantı yöntemini kullanacağız. $A = \bigcup_{s\in\omega} \sigma_s$ ve $B = \bigcup_{s\in\omega} \tau_s$ olsun. Her adımda bir gereksinimi sağlayacağız ve bu gereksinim bir defa sağlandıktan sonra bir daha bozulmayacak. $\sigma_0 = \tau_0 = \emptyset$ ile başlansın. Varsayalım ki $s+1$ adımında σ_s ve τ_s verilsin.

Eğer $s = 2e$ ise, R_{2e} gereksinimini sağlayacağız. $x \in \omega$, $\sigma_s(x)$'in tanımsız olduğu ilk eleman olsun. Bu demektir ki henüz x'in A kümesinin içinde olup olmaması gerektiğine karar vermiş değiliz. Buna şimdi karar vereceğiz ve x'i $A \neq \Psi_e(B)$ sağlamakta kullanacağız. Kısaca, $A(x) \neq \Psi_e(B; x)$ ilişkisini sağlayacağız. Bu durumda köşegen yöntemini kullanmamız gerekir. Yani A'yı x argümanında $\Psi_e(B)$'den farklı yapmak. Henüz B kümesini tanımlamadığımız için $\Psi_e(B; x)$'in tanımlı olduğunu bilemeyiz. Bildiğimiz bir şey var ki, eğer tanımlıysa bir $\tau \subset B$ için $\Psi_e(\tau, x)$'in de tanımlı olduğunu görebiliriz. İnşamızdan dolayı $\tau_s \subset B$ olduğu için, eğer böyle bir τ varsa biliyoruz ki τ_s ile uyumlu olacak çünkü B her iki dizinin de uzantısıdır. τ'nun τ_s'nin uzantısı olduğunu da varsayabiliriz. Bu durumda $\Psi_e(B; x)$'in tanımlı olduğu bir $\tau \supset \tau_s$ bulacağız.

Eğer böyle bir τ dizisi yoksa o halde $\Psi_e(B; x)$ tanımsız olacak ve $A(x)$ tanımlı olacağı için (tam fonksiyon olmasından dolayı), ne yapacağımızın bir önemi yok. Otomatik olarak gereksinim sağlanmış olacak. Bu durumda σ_{s+1} dizisi σ_s'nin sonlu bir uzantısı olsun x argümanında tanımlı. B kümesi içinse, $\tau_{s+1} = \tau_s$ olarak yazabiliriz.

Öte yandan eğer τ dizisi varsa o halde $\Psi_e(B; x)$ tanımlı olabilir. Bu durumda B'nin τ'nun uzantısı olacak şekilde düzenleme yapmalıyız ki $\Psi_e(B; x) = \Psi_e(\tau; x)$ sağlansın. $\tau_{s+1} = \tau$ yazarsak bu yeterli olacaktır. Fakat bir nokta daha var dikkat etmemiz gereken. $\Psi_e(B; x)$ tanımlı olduğuna göre bunun $A(x)$'ten farklı olması gerekir. O halde σ_{s+1} dizisi $\sigma_{s+1}(x) = 1 - \Psi_e(B; x)$ koşulunu sağlayan σ_s'nin en küçük uzantısı olsun.

Eğer $s = 2e+1$ ise, inşamız aynı olacaktır fakat sadece A ile B'nin rolleri değişecektir. □

Eksonuç 21. $\mathbf{0}'$ derecesinin altında karşılaştırılamaz dereceler vardır.

Kanıt. Bunun için A ve B kümelerinin $\emptyset'$ kümesinde (yani K kümesinde) hesaplanabilir olduğunu göstermemiz gerekir. İnşada hesaplanabilir olmayan tek adım "Verilen bir x ve σ için $\Psi_e(\sigma'; x)\downarrow$ olmasını sağlayan ve σ dizisinin uzantısı olan bir σ' var mıdır?" sorusunun sorulmasıdır. Bunun numaralandırılabilir, yani yarı karar verilebilir, olduğu görülebilir. Bunun için σ'nın uzantısı olan bütün σ' dizileri için $\Psi_e(\sigma'; x)$'i sırayla ve her adımda birer basamak hesaplamaktır (dovetailing). K'nın derecesinin (yani $\mathbf{0}'$) en büyük numaralandırılabilir derece olduğunu biliyoruz ve her numaralandırılabilir derecenin $\mathbf{0}'$ derecesinde hesaplanabilir olduğu bilinmektedir. Bu yüzden kanıttaki inşa $\emptyset'$-hesaplanabilirdir. □

Sonsuzlu uzantı yöntemi

Bu bölümde okuyucuya sonlu uzantı yönteminden daha güçlü bir yöntem göstereceğiz. Bu yöntemde kümeleri inşa ederken uzantısının sonlu değil, sonsuz olduğunu sağlıyoruz. Bu yöntemi bir örnekle göstereceğiz. Daha önce $\mathbf{D}$ yapısının bir tam örgü olmadığını söylemiştik. Şimdi bunu bahsettiğimiz yöntemle kanıtlayacağız. Önce birkaç tanım yapalım.

Tanım 22. $\mathcal{P}$ bir yarı sıralı küme olsun. Eğer her $x, y \in \mathcal{P}$ için x ve y'nin üstünde en küçük bir derece varsa, bu $x \vee y$ ile gösterilsin, o zaman $\mathcal{P}$'ye *yarı üst örgü* denir. Burada $x \vee y$ ifadesine x ve y'nin *katılımı* denir.

Eğer $\mathcal{P}$ hem bir üst yarı örgü ise hem de her $x, y \in \mathcal{P}$ için x ve y'nin altında en büyük bir derece varsa, $x \wedge y$ olarak gösterilsin, o zaman $\mathcal{P}$'ye *tam örgü* denir. Burada $x \wedge y$ ifadesine x ve y'nin *tanışımı* denir.

Bir noktayı tekrar etmekte fayda var. Eğer bir küme hem A hem de B'yi hesaplayabiliyorsa, $A \oplus B$'yi de hesaplayabilir. Bu yüzden Turing dereceleri bir üst yarı örgüdür. Tam örgü olmadıklarını göstermek için derecelerin sayılabilir özleklerini (countable ideals) göz önünde bulundurmamız gerekir.

Tanım 23. Eğer $\mathcal{P}$ bir üst yarı örgü ise, $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}$ aşağıdaki koşulları sağlaması durumda bir *özlektir*.

1. Eğer $x, y \in \mathcal{I}$ ise, $x \vee y \in \mathcal{I}$;
2. Eğer $x \in \mathcal{I}$ ve $y \leq x$ ise, $y \in \mathcal{I}$.

Bir $\mathbf{E}$ Turing dereceleri kümesi, eğer sonlu bir $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ Turing dereceleri kümesi varsa ve her $\mathbf{a} \in \mathbf{E}$ için $\mathbf{a} \in \mathbf{E} \Leftrightarrow F(\mathbf{a}, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$ koşulunu doğru kılan yarı sıralı kümelerin dilinde bir $F(x_0, \ldots, x_k)$ formülü varsa, o zaman $\mathbf{E}$ kümesine *parametrelerle tanımlı* deriz. Aşağıdaki teorem Turing derecelerinde her sayılabilir özleğin parametrelerle tanımlı olduğunu söyler. Bunun için son bir tanım yapalım.

Tanım 24. Eğer $\mathcal{P}$ bir yarı sıralı kümeyse ve $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}$ ise, o zaman her $z \in \mathcal{P}$ için $z \in \mathcal{I} \Leftrightarrow z \leq x$ ve $z \leq y$ koşulunu sağlayan (x, y) ikilisine $\mathcal{I}$ için *sağıl ikili* denir.

Aşağıdaki teorem [11] çalışmasına aittir.

Teorem 25. Turing derecelerindeki her sayılabilir özleğin bir sağıl ikilisi vardır.

Eksonuç 26. Turing dereceleri tam örgü değildir.

Kanıt. $\{\mathbf{x}_i\}_{i \in \omega}$ tekdüze olarak artan dereceler dizisi olsun (örn. bu $\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i'$ şeklinde belirlenebilir). $\mathcal{I}$, bu dizi tarafından üretilen bir özlek olsun. Yani $\mathbf{c} \in \mathcal{I} \Leftrightarrow \exists \mathbf{x}_i \geq \mathbf{c}$. $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, $\mathcal{I}$ için bir sağıl ikili olsun. Eğer $\mathbf{c} \leq \mathbf{a}$ ve $\mathbf{c} \leq \mathbf{b}$ ise $\mathbf{c} \in \mathcal{I}$ elde ederiz ve böylece bir $\mathbf{x}_i \geq \mathbf{c}_i$ vardır. O zaman $\mathbf{x}_{i+1}$ derecesi $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{b}$'nin altında, $\mathbf{c}$'nin ise kesin olarak üstündedir. Öyleyse $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{b}$'nin en büyük alt sınırı yoktur. □

Şimdi teoremin kendisini kanıtlayacağız.

Kanıt. Dereceleri $\mathcal{I}$'nın içinde olan $\{X_s\}_{x \in \omega}$ kümeler dizisi verilsin. Aşağıdaki gereksinimleri sağlayan A ve B kümeleri inşa edeceğiz.

$\mathcal{P}_s : X_s \leq_T A$ ve $X_s \leq_T B$;

$\mathcal{Q}_s : s = \langle i, j \rangle$ olsun. $\Psi_i(A) = \Psi_j(B) = C \Longrightarrow (\exists k)(C = X_k)$.

$\mathcal{P}$ gereksinimleri, özlekteki her derecenin $\mathbf{a} = \deg(A)$ ve $\mathbf{b} = \deg(B)$ derecelerinin altında olmasını sağlar. $\mathcal{Q}$ gereksinimleri ise A ve B kümelerinde hesaplanabilir olan kümelerin derecelerinin özleğin içinde olduğunu sağlar. Bu gereksinimleri sağlamak teoremi kanıtlamak için yeterlidir.

Bu kez kanıtta sonlu uzantı yöntemini kullanmayacağız. *Sonsuzlu uzantı yöntemi* ile kanıtlayacağız. Bu yöntemin ana fikri her adımda A ve B kümelerini sonsuz tane argümanda tanımlamak, ama aynı zamanda sonsuz tane argümanda tanımsız bırakmaktır.

Her X_s'nin hem A hem de B kümesinde hesaplanabilir olması için X_s'yi *sütünlara* böleceğiz. Böylece s'inci sütün $\langle s, j\rangle$ formundaki bütün sayıları belirtecektir. Eğer her j için $A(\langle s, j\rangle) = X_s(j)$ ise A kümesi X_s kümesini hesaplayacaktır. Aynısı B için de geçerlidir. Aslında bundan daha zayıf bir koşul yeterlidir. O da her s için, *sonlu sayıda j hariç olmak üzere*, $A(\langle s, j\rangle) = X_s(j)$ sağlanıyorsa bu A'nın her X_s'yi hesaplaması için yetmesidir. Her $s+1$ adımında X_s'yi A'nın ve B'nin s'inci sütununa aşağıda anlatacağımız şekilde kodlayarak, $X_s \leq_T A$ ve $X_s \leq_T B$ ifadelerini sağlamalıyız.

s'inci adımın sonunda X_k'nin, A ve B kümelerinin k'inci sütunlarına, $k < s$ olmak üzere, kodlanmış olduğunu varsayalım. Ayrıca aşağıdaki varsayımı da ele alalım

(*)Kodlama için kullanmış olduğumuz sonlu sayıda sütunun dışında A ve B'nin sadece sonlu sayıda argümanına karar verdiğimizi kabul edelim.

$s+1$'inci adımda $\mathcal{Q}_s$'yi sağlayacağız. α_s, karar vermiş olduğumuz argümanları üzerinde A'yı ifade eden kısmi fonksiyon olsun. β_s ise benzer şekilde B'yi ifade etsin. $s = 0$ olmadığı sürece, α_s ve β_s sonlu uzunlukta dizi olmayacaktır. Aksine, sonsuz argüman üzerinde tanımlı olmakla beraber sonsuz argüman üzerinde de tanımsız olacaktır. $s = \langle i, j\rangle$ olmak üzere, $\Psi_i(\alpha)$ ve $\Psi_j(\beta)$'yı uyumsuz yapan $\alpha \supset \alpha_s$ ve $\beta \supset \beta_s$ uzantıları olup olmadığına bakalım.

Eğer varsa, bu koşulu sağlayan sonlu sayıda uzantı vardır. Bu uzantıları alıp X_s'yi A ve B'nin s'inci sütununda geri kalan boşluklara kodlarız. Bu şekilde (*) koşulunu koruruz.

Eğer yoksa, o halde eğer $\Psi_i(A) = \Psi_j(B)$ ise ve tamsa, bu, A'nın ve B'nin belirlediğimiz sütunlarında hesaplanabilir. Sonlu sayıdaki bu sütunlar derecesi özleğin içinde olan sonlu sayıdaki kümelerin katılımıdır.

Şimdi inşayı daha açık şekilde gösterelim.

$s = 0$ adımında; $\alpha_0 = \beta_0 = \emptyset$ olsun.

$s + 1$ adımında; $s = \langle i, j\rangle$ olsun. $\Psi_i(\alpha)$ ve $\Psi_j(\beta)$'yı birbiriyle uyumsuz yapan $\alpha \supset \alpha_s$ ve $\beta \supset \beta_s$ uzantıları var mıdır sorusunu soralım.

Eğer varsa α ve β, α_s ve β_s'nin bu koşulu sağlayan uzantıları olsun. Eğer yoksa, $\alpha = \alpha_s$ ve $\beta = \beta_s$ olsun. α_{s+1} dizisi α dizisinin uzantısı olsun ve α'nın tanımsız olduğu yerlerde $\langle s, j\rangle$ formundaki bütün argümanlar için $X_s(j)$'ye eşit olsun. β_{s+1} de aynı şekilde tanımlansın.

İnşa burada bitiyor. Şimdi de inşanın koşulları gerçekten sağladığına bakalım. Bunun için $s + 1$ adımında uzantıların olmadığı durumunu incelemek gerekir. Bu durumda eğer $\Psi_i(\alpha)$ ve $\Psi_j(\beta)$ tamsa ve birbirine eşitse, bu ortak değer $D = \oplus_{k=0}^{s-1} X_k$ kümesinde hesaplanabilirdir ve bu yüzden özlecin içindeki derecelerde hesaplanabilirdir. D kümesi α_s ve β_s'nin hangi argümanlarda tanımlı olduğuna karar verebilir ve bu argümanlarda α_s veya β_s'nin değerlerini bulabilir. Eğer $\Psi_i(A) = \Psi_j(B)$ ve tamsa, $\Psi_i(A; n)$'yi hesaplamak için D bilgesi şu şekilde işleyecektir: $\Psi_i(\alpha; n)$'yi tanımlı kılan bir $\alpha \supset \alpha_s$ bul. Böyle bir α olmak zorunda çünkü $A \supset \alpha_s$ ve $\Psi_i(A; n)\downarrow$ olduğunu biliyoruz. O halde $\Psi_i(\alpha; n) = \Psi_i(A; n)$ doğru olmalı. Varsayalım ki bu yanlış. O zaman β, $\Psi_j(\beta; n)\downarrow$ ifadesini sağlayan ve B ile uyumlu olan, β_s'nin sonlu bir uzantısı olsun. $\Psi_i(A) = \Psi_j(B)$ olduğu için $\Psi_i(\alpha; n) \neq \Psi_j(\beta; n)$ olurdu. Bu da varsayımımızla çelişirdi. □

Zıplama işlecinin görüntüsü ve ters zıplama

Şimdi $\mathbf{D}'$ yapısını inceleyeceğiz. Bunun için zıplama işlecinin görüntüsüne bakmamız gerekir. $\mathbf{0}$ derecesinin zıplamasının $\mathbf{0}'$ olduğunu biliyoruz. Bu yüzden $\mathbf{0}'$ zıplanabilecek en küçük derecedir. Yani zıplama işlecinin görüntüsü $D(\geq \mathbf{0}')$ olarak tanımlanabilir. Yani $\mathbf{0}'$ derecesine eşit veya ondan büyük bütün dereceler sınıfı.

Her $\mathbf{a}$ için, $\mathbf{a}' \geq \mathbf{0}'$ olduğunu biliyoruz. Zıplama işlecinin görüntüsünün $D(\geq \mathbf{0}')$ sınıfı olduğunu göstermeden önce işlecin birebir bir fonksiyon olup olmadığına bakalım. Birebir olmadığı [11] çalışmasında kanıtlanmıştır. Aşağıda bunu gösterelim.

Teorem 27. Zıplama işleci birebir değildir.

Kanıt. Bunun için $\mathbf{a}' = \mathbf{0}'$ eşitliğini sağlayan bir $\mathbf{a} > \mathbf{0}$ derecesi işna edeceğiz. A kümesinin hesaplanamaz olması için köşegen yöntemini kullanacağız hesaplanabilir fonksiyonlara karşı. $A' \leq_T K$ koşulunu sağlamak için, her e için $\Psi_e(A; e) \downarrow$ olup olmadığına karar vermek durumundayız. Gereksinimlerimiz aşağıdadır.

$$\begin{array}{lcl} R_{2e} & : & A \neq \Psi_e \\ R_{2e+1} & : & \Psi_e(A; e) \downarrow \text{ olup olmadığına karar ver.} \end{array}$$

Burada $K \leq_T A'$ koşulunu düşünmemiz gerekmiyor. Bu otomatik olarak sağlanıyor. Çünkü $\emptyset \leq_T A$ olduğu için $K = \emptyset' \leq_T A'$ elde ederiz. A kümesini sonlu uzantı ile inşa edeceğiz. İlk başta $\sigma_0 = \emptyset$ olsun. $s + 1$'inci adımda σ_s verilsin.

Eğer $s = 2e$ ise, R_{2e} gereksinimini sağlayacağız. $x \in \omega$, $\sigma_s(x)$'in tanımlı olmadığı en küçük değer olsun. Ayrıca σ_{s+1}, σ_s'nin en küçük uzantısı olsun ve

$$\sigma_{s+1}(x) = \begin{cases} 1 - \Psi_e(x) & \text{eğer } \Psi_e(x) \downarrow \text{ ise} \\ 0 & \text{aksi durumda.} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

Eğer $s = 2e + 1$ ise R_{2e+1} gereksinimini sağlayacağız. Bunun için $\Psi_e(\sigma; e) \downarrow$ ifadesini sağlamak koşuluyla σ_s dizisinin bir σ uzantısı olup olmadığına bakılsın. Eğer varsa, σ bu koşulu sağlayan en küçük dizi olsun ve $\sigma_{s+1} = \sigma$ diyelim. Yoksa $\sigma_{s+1} = \sigma_s$ olsun.

İnşamızdan dolayı A kümesi hesaplanabilir değildir. Dahası,

$$e \in A' \Leftrightarrow \Psi_e(A; e) \downarrow \Leftrightarrow \Psi_e(\sigma_{2e+2}; e) \downarrow$$

ifadesinin doğru olduğu görülebilir. İnşamız K kümesinde hesaplanabilir olduğu için, $A' \leq_T K$ sonucunu elde ederiz. □

Aşağıdaki teorem [2] çalışmasında kanıtlanmıştır.

Teorem 28. Zıplama işlecinin görüntüsü $D(\geq \mathbf{0}')$ konisidir.

Kanıt. Her $\mathbf{a}$ için $\mathbf{a}' \geq \mathbf{0}'$ olduğunu biliyoruz. Şimdi de ters zıplamayı gösterelim. Yani her $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}'$ için $\mathbf{a}' = \mathbf{b}$ eşitliğini sağlayan bir $\mathbf{a}$ derecesi vardır. Öylese C, $K \leq_T C$ olmak üzere, bir küme olsun. $A' \equiv_T C$ denkliğini sağlayan bir A kümesi elde etmek istiyoruz. Son yazdığımız denklik $A' \leq_T C$ ve $C \leq_T A'$ şeklinde iki ayrı koşula ayrılabilir. $A' \leq_T C$ koşulunu bir önceki kanıttaki yöntemi kullanarak sağlayacağız. İkinci koşulu ise C kümesini A kümesinin içine kodlama yaparak sağlayacağız.

A kümesini yine sonlu uzantı ile inşa edeceğiz. $\sigma_0 = \emptyset$ olsun. $s+1$ adımında σ_s verilsin.

Eğer $s = 2e$ ise, $\Psi_e(\sigma; e) \downarrow$ ifadesini sağlayan bir $\sigma \supset \sigma_s$ dizisi var mı diye bakalım. Varsa, en küçük σ için $\sigma_{s+1} = \sigma$ olsun. Yoksa, $\sigma_{s+1} = \sigma_s$ olsun.

Eğer $s = 2e+1$ ise, C kümesinin e'inci elemanını A kümesinin içine kodlama yapacağız. Bunu da

$$\sigma_{s+1} = \sigma_s * \langle C(e) \rangle$$

şeklinde yapalım.

İnşamız C-hesaplanabilirdir. Çünkü ilk adım K-hesaplanabilirdir ve en başta $K \leq_T C$ olduğunu varsaydığımız için $\leq_T$ indirgeme ilişkisinin geçişme (transitivity) özelliğinden dolayı C-hesaplanabilir bir inşa elde ederiz. İkinci adımda ise C kümesinin kendisini kullanıyoruz. Bu durumda $e \in A' \Leftrightarrow \Psi_e(\sigma_{2e+1}; e) \downarrow$ doğru olduğundan $A' \leq_T C$ koşulu sağlanmaktadır.

İnşamız aynı zamanda $K \oplus A$ kümesinde hesaplanabilirdir. Çünkü ikinci adım A kümesinin bir sonraki tanımsız olan elemanını göstermektedir. Bu eleman $|\sigma_{2e+1}|$ pozisyonunda bulunur. $e \in C \Leftrightarrow \sigma_{2e+2}(|\sigma_{2e+1}|) = 1$ ifadesi doğru olduğu için $C \leq_T A \oplus K$ koşulu sağlanır. Fakat $A \leq_T A'$ ve $K \leq_T A'$ ifadeleri de doğrudur. Buradan $A \oplus K \leq_T A'$ ifadesinin doğru olduğu sonucuna varırız. Hem $C \leq_T A \oplus K$ hem de $A \oplus K \leq_T A'$ doğru olduğu için $C \leq_T A'$. □

Asgari dereceler

$\mathbf{D}$ yapısını biraz daha fazla inceleyeceğiz. Bu yapının yoğun (dense) olup olmadığı sorusu sorulabilir. $\mathbf{D}$ yapısının yoğun olmadığını gösteriple kalmayıp aynı zamanda asgari elemanları olduğunu da göstereceğiz. Fakat bunu sonlu uzantı yöntemiyle gösteremeyiz. Sonlu uzantı yönteminin ana düşüncesi, büyüyen σ_n dizileri inşa etmekti ve sonunda bunların birleşimini $\bigcup_{n\in\omega} \sigma_n$ şeklinde almaktı. Bu işlem gittikçe büzülen (veya azalan) $T_n = \{X : X \supset \sigma_n\}$ açık kümeler inşa edip bunların $\bigcap_{n\in\omega} T_n$ şeklinde birleşimini almak gibi görülebilir. Bu bize daha genel T_n kümeleri tanımlamamıza olanak sunuyor.

Tanım 29. $T : 2^{<\omega} \to 2^{<\omega}$ fonksiyonlarına *ağaç* denir. Ağaçlar aşağıdaki koşulları sağlamak zorundadır.

(i) Eğer $T(\sigma) \downarrow \wedge \tau \subset \sigma \Rightarrow T(\tau) \downarrow \wedge T(\tau) \subset T(\sigma)$

(ii) Eğer $T(\sigma * 0)$ veya $T(\sigma * 1)$ değerlerinden bir tanesi tanımlıysa, diğeri de tanımlıdır ve bunlar birbirleriyle uyumsuzdur.

$T(\sigma * 1)$

$T(\sigma * 0)$

$T(\sigma)$

Ağaçları bir fonksiyon gibi düşünmek kolaylık sağlamaktadır fakat burada bizim için önemli olan şey T ağacının görüntü kümesidir. Bir tam fonksiyon olarak çalışan ağaçlara *tam ağaç* denir. Eğer sonsuz tane σ için $T(\sigma) \subset A$ ise, A kümesi T'nin *üstündedir* denir. Başka bir isimle buna A T'nin bir *dalıdır* denir. Bir σ dizisinin T'nin görüntü kümesinin içindeyse bu ilişki $\sigma \in T$ şeklinde ifade edilebilir. Eğer T^* ağacındaki her σ dizisi T'nin de içindeyse, T^* ağacına T'nin *altağacı* denir ve bu $T^* \subset T$ olarak gösterilir. Eğer T^* ağacı σ dizisinin T'deki uzantılarını içeriyorsa, T^* ağacı T'nin *σ'nın üstündeki bütün altağacıdır.* Ağaçlar için olan altağaç kavramı, diziler için olan uzantı kavramı ile aynıdır diyebiliriz. Sonlu uzantı yönteminde gittikçe büzüşen $\{T_n\}_{n\in\omega}$ ağaçları inşa edilir. Başlangıc ağacı olan T_0 *birim ağaç* olarak inşa edilir. Birim ağaç kısaca bütün 0-1 dizilerinden meydana gelen ağaçtır. İnşada her zaman T_{n+1}'in T_n'nin bütün altağacı olduğu koşulu korunur. Tanımladığımız bu ağaç yöntemi daha geneldir çünkü inşa sırasında T_{n+1}'in, T_n'nin herhangi bir altağacı olarak tanımlamamıza olanak sunar. Bu yöntemle kullanılan ağaçlar genelde *hesaplanabilir ağaçlardır.* $\sigma \in T$ olup olmadığını hesaplayan bir algoritma varsa bu ağaç hesaplanabilir bir ağaçtır deriz.

Tanım 30. $\mathbf{a} > \mathbf{0}$ olmak üzere, eğer $\mathbf{0}$ ile $\mathbf{a}$ arasında bir derece yoksa, $\mathbf{a}$ derecesine *asgari derece* denir. Daha biçimsel bir şekilde, $(\forall \mathbf{c})(\mathbf{c} \leq \mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{c} = \mathbf{0} \vee \mathbf{c} = \mathbf{a})$.

Asgari derecelerin varlığını göstermek için önce gerekli bilgileri verelim.

Önsav 31 (Köşegen önsavı)**.** Verilen bir $e \in \omega$ ve hesaplanabilir T ağacı için, her $A \in Q$ için $A \neq \Psi_e$ ifadesini sağlayan hesaplanabilir bir $Q \subset T$ ağacı vardır.

Kanıt. $T(0)$ ve $T(1)$ birbirleriyle uyumsuz olduğu için en az bir tanesi $\Psi_e(x)$'e eşit olmamalıdır. Eğer bu $T(i)$ ise, Q ağacı T'nin $T(i)$'nin üstündeki bütün altağacı olsun. □

Asgari derece inşa etmek için öyle bir A kümesi inşa etmemiz gerekir ki,

$$C \leq_T A \Rightarrow C \textit{ hesaplanabilir bir kümedir} \text{ veya } A \leq_T C$$

koşulunu sağlasın. Vereceğimiz basitleştirilmiş kanıt [9] çalışmasına aittir. Kanıtın kullandığı yöntemin adı literatürde e-yarılan yöntemi (e-splitting) olarak geçer. Bunun için önce e-yarılma kavramını sonra da e-yarılan ağaç tanımını yapacağız. Temel fikir, eğer e-yarılma yoksa o zaman hesaplanabilir küme elde ederiz. Varsa yarılan taraflardan birini tutup diğerine karşı köşegen yöntemini kullanırız.

Tanım 32. σ_1 ve σ_2 birer dizi olsun. Eğer $\Psi_e(\sigma;x)\downarrow\neq\Psi_e(\sigma_2;x)\downarrow$ olmasını sağlayan bir x varsa bu dizilere *e-yarılan* denir. Bu durumda σ_1 ve σ_2 x'de *e-yarılır* denir.

Tanım 33. Eğer her σ için $T(\sigma*0)$ ve $T(\sigma*1)$ e-yarılıyorsa, T'ye *e-yarılan ağaç* denir.

Şimdi [11] çalışmasına ait olan önsavı aşağıda verelim.

Önsav 34. Verilen bir e, hesaplanabilir bir T ağacı, ve T'nin üstünde bir A kümesi için; eğer $\Psi_e(A)$ tam ise

1. eğer T'de bir e-yarılma yoksa, $\Psi_e(A)$ hesaplanabilir bir fonksiyondur
2. eğer T e-yarılıyorsa, $A\leq_T\Psi_e(A)$.

Kanıt. $\Psi_e(A)$ tam olduğu için verilen herhangi bir x için $\Psi_e(A;x)\downarrow$ olduğunu biliyoruz. Bu demektir ki, $\Psi_e(\sigma;x)\downarrow$ olmasını sağlayan bir $\sigma\subset A$ vardır ve bize doğru değeri verir. A kümesi T'nin üstünde olduğu için $\sigma\in T$ olduğunu kabul edebiliriz. Eğer T'de e-yarılma yoksa, $\Psi_e(A;x)$'i hesaplamak için $\Psi_e(\tau;x)\downarrow$ ifadesini sağlayan T'de bir τ dizisi bulmak yeterlidir. $\Psi_e(\tau;x)\downarrow=\Psi_e(\sigma;x)\downarrow=\Psi_e(A;x)\downarrow$ olacaktır. Aksi halde τ ve σ x'de e-yarılırdı.

Şimdi de T'nin e-yarılan olduğunu varsayalım. A'nın kesin büyüyen başlangıç kesimlerini $\Psi_e(A)$'da hesaplanabilir bir şekilde bulacağız. $T(\sigma)\subset A$ verilmiş olsun. A kümesi T'nin üstünde olduğu için $T(\sigma*0)$ veya $T(\sigma*1)$ A'nın içinde olacaktır. Hangisinin olduğuna karar vermemiz gerekiyor. T'nin e-yarılan ise

$$\Psi_e(T(\sigma*0);x)\downarrow\neq\Psi_e(T(\sigma*1);x)\downarrow$$

ifadesini sağlayan bir x vardır. O halde sadece bir tanesi $\Psi_e(A;x)$ ile aynı değeri verebilir. Bu işlem hangi dizinin A'nın içinde olduğuna karar verir. Yani eğer $\Psi_e(T(\sigma*i);x)\downarrow=\Psi_e(A;x)\downarrow$ ise $T(\sigma*i)\subset A$. □

Yine aynı çalışmada bulunan başka bir önerme verelim.

Önsav 35 (Asgari önsavı)**.** Verilen bir e, hesaplanabilir bir T ağacı için alttakilerden birini sağlayan hesaplanabilir bir $Q\subset T$ vardır.

1. Q'nun üstündeki her A için; eğer $\Psi_e(A)$ tam ise $\Psi_e(A)$ hesaplanabilirdir.
2. Q'nun üstündeki her A için; eğer $\Psi_e(A)$ tam ise $A\leq_T\Psi_e(A)$.

Kanıt. Bu önsavın kanıtı bir önceki kanıtı kullanır. Q ağacını e-yarılan ya da hiçbir e-yarılma olmayan ağaç olarak inşa edeceğiz.

Eğer T'de bir σ dizisi varsa ve bu dizinin uzantıları e-yarılan değilse, Q ağacını σ'nın üstündeki bütün ağaç olarak alırız. Bu durumda Q'da hiçbir e-yarılma yoktur.

Eğer T'de herhangi bir dizinin iki uzantısı e-yarılıyorsa, tümevarım kullanarak Q ağacını T'nin e-yarılan altağacı şeklinde tanımlayabiliriz. $Q(\sigma)$ dizisinin verildiğini kabul edelim. Öyleyse $Q(\sigma*0)$ ve $Q(\sigma*1)$ T'deki dizinin e-yarılan iki uzantısı olacaktır. □

Son olarak aynı çalışmanın ana teoremini verelim.

Teorem 36. Asgari derece vardır.

Kanıt. Aşağıdaki gereksinimleri sağlayacağız.

$$\begin{array}{lcl} R_{2e} & : & A \neq \Psi_e \\ R_{2e+1} & : & C \leq_T A \Rightarrow C \textit{ hesaplanabilir bir kümedir} \text{ veya } A \leq_T C \end{array}$$

Aşağıdaki gibi hesaplanabilir ağaç dizileri inşa edeceğiz.

$$\begin{array}{lcl} T_0 & = & \text{birim ağaç} \\ T_{2e+1} & = & T = T_{2e} \text{ için, köşegen önsavındaki } Q \text{ ağacı} \\ T_{2e+2} & = & T = T_{2e+1} \text{ için, asgari önsavındaki } Q \text{ ağacı.} \end{array}$$

Öyleyse $A = \bigcup_{n \in \omega} T_n(\emptyset)$ yukarıda verilen gereksinimleri sağlayacaktır. □

Bir önemli nokta, bu inşanın $\emptyset''$-hesaplanabilir olmasıdır. Asgari önsavında ilk koşulda sorduğumuz soruyu hatırlayalım. "T'de, uzantıları e-yarılan olmayan bir σ dizisi var mıdır" sorusuna ancak bir $\emptyset''$-bilge kullanılarak karar verilebilir. Bu yüzden teorem, $\mathbf{0}''$ derecesinin altında bir asgari derece olduğunu söyler. Aslında benzer bir yöntemle tam ağaç yerine kısmi ağaç kullanarak $\mathbf{0}'$ derecesinin altında asgari derecenin varlığı kanıtlanmıştır [6]. Fakat bunu yazımızda göstermeyeceğiz.

$\mathbf{0}'$ derecesinin altındaki her derece numaralandırılabilir derece değildir. Asgari derecelerin varlığını göstererek $\mathbf{D}$ yapısının yoğun olmadığını gösterdik. Fakat ilginç olan sonuç, $\mathbf{R}$ sınıfının yoğun olmasıdır [7]. O halde her numaralandırılabilir $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{b}$ dereceleri için her zaman $\mathbf{a} < \mathbf{c} < \mathbf{b}$ koşulunu sağlayan numaralandırılabilir bir $\mathbf{c}$ derecesi vardır. Bu demektir ki asgari dereceler numaralandırılabilir olamaz.

Zıplama sınıfları

Bu bölümde Post'un orjinal sorusuna cevap vereceğiz. Emil Post, $\mathbf{0} < \mathbf{a} < \mathbf{0}'$ koşulunu sağlayan numaralandırılabilir bir $\mathbf{a}$ derecesi olup olmadığını sormuştur. Bu soru hesaplanabilirlik kuramının ilk çalışmalarından biridir. Cevabı [3] ve [5] tarafından verilmiştir ama biz onların kanıtını vermeyeceğiz. Bunun yerine zıplama sınıflarını ilgilendiren ama aynı zamanda Post'un sorusunu da çözen başka bir teorem vereceğiz. $\mathbf{0}'$ derecesinin altındaki zıplama sınıflarından bahsedelim. Böylece derecelerin $\mathbf{0}$ veya $\mathbf{0}'$ derecesine yakınlığını bulmuş olacağız. Teoremde kullanacağımız kanıt, *sonlu yaralama öncelik yöntemi* (finite injury priority method) denilen yeni bir yöntemle çözülecek.

Tanım 37. $\mathbf{a} \leq \mathbf{0}'$ olmak üzere, eğer $\mathbf{a}' = \mathbf{0}'$ ise bu dereceye *düşük* derece denir. Eğer $\mathbf{a}' = \mathbf{0}''$ ise bu dereceye *yüksek* derece denir.

Teorem 38. Hesaplanamaz düşük bir numaralandırılabilir derece vardır.

Kanıt. $\mathbf{0}'$ derecesinin altında hesaplanamayan derece inşa etmek kolay bir işlemdir. Sonlu uzantı yöntemiyle bir $\emptyset'$ bilgesi kullandığımız zaman böyle bir küme elde ederiz. Fakat biz sonlu yaralama yöntemiyle hesaplanamayan numaralandırılabilir düşük derece inşa edeceğiz. Numaralandırılabilir kümelerin inşaları *tam yaklaştırma* yöntemiyle yapılır. Bu yöntemde herhangi bir bilge kullanılmaz ve inşanın kendisi hesaplanabilir bir tarzda yapılır.

Numaralandırılabilir kümeler zaten algoritmik olarak elemanlarının listelenmesi ile elde edilir.

Önce kümemizin hesaplanamaz olmasını sağlayan gereksinimlere bakalım. A'nın hesaplanamaz olması için aşağıdaki gereksinimlerin

$$\mathcal{P}_e : |W_e| = \aleph_0 \Longrightarrow W_e \cap A \neq \emptyset.$$

sağlanmasıyla beraber $\overline{A}$'nın sonsuz olması yeterli olacaktır. Burada $\aleph_0$ doğal sayılar kümesinin kardinalidir. Yukarıda verdiğimiz koşul yeterli olacaktır çünkü

$$A \text{ hesaplanabilir bir kümedir} \Leftrightarrow A \text{ ve } \overline{A} \text{ numaralandırılabilir}$$

ifadesi doğrudur. Bu gereksinimler $\overline{A}$'nın hiçbir e için W_e'ye eşit olmadığını sağlayacaktır.

Şimdi de derecenin düşük olmasını nasıl sağlayacağımıza bakalım. Bunun için aşağıdaki gereksinimleri sağlayacağız.

$$\mathcal{N}_e : (\exists^\infty s)\,[\Psi_e(A_s; e)\,[s] \downarrow] \Longrightarrow \Psi_e(A; e) \downarrow.$$

Burada $(\exists^\infty s)$ ifadesi "$Q(s)$ önermesini sağlayan sonsuz tane s vardır" anlamındadır. A_s ifadesi s adımının sonunda A'da listelenmiş olan elemanları belirtir ve $A = \bigcup_s A_s$ olarak ifade edilir. $\mathcal{N}_e$'nin sağlanmasıyla düşük derece elde edilir. Bunu görmek için bir g fonksiyonu ele alalım ve bu fonksiyonu şu şekilde tanımlayalım. Eğer $\Psi_e(A_s; e)\,[s] \downarrow$ ise $g(e, s) = 1$ olsun; aksi durumda $g(e, s) = 0$ olsun. $g^*(e) = \lim_{s\to\infty} g(e, s)$ olsun. $\mathcal{N}_e$'nin sağlanması demek bu limit vardır demektir. O halde g^* fonksiyonu A' nın karakteristik fonksiyonudur çünkü g fonksiyonu hesaplanabilir olduğu için, g^* bir $\emptyset'$ bilgesi verildiğinde hesaplanabilir olur.

Tanım 39. *Kullanım fonksiyonu*

$$u(B; e, x, s) = 1 + \text{"}\Psi_e(B; x)\,[s] \text{ hesaplamasında bilgede kullanılan maksimum eleman"}$$

olarak tanımlansın. $\Psi_e(B; x)\,[s] \uparrow$ ise $u(B; e, x, s) = 0$ olsun.

$\mathcal{N}_e$ gereksinimlerini sağlamak için *kısıtlama* fonksiyonunu tanımlayacağız. Her e için,

$$r_e(s) = u(A_s; e, e, s)$$

olarak tanımlansın.

İnşanın $s+1$'inci adımında eğer $n < r_e(s)$ değeri A kümesinin içine katılırsa (yani numaralandırılırsa) o zaman r_e fonksiyonu *yaralanır*. Burada fonksiyonla ilgili olarak önemli olan nokta, eğer r_e'nin bir daha yaralanmadığı bir adım varsa inşada o zaman $\mathcal{N}_e$ sağlanır ve $\lim_{s\to\infty} r_e(s)$ tanımlı olur. Bunun doğru olduğunu görmek için, r_e'nin hiçbir $\geq s_0$ adımında yaralanmadığını varsayalım. Eğer $\Psi_e(A_t; e)\,[t] \downarrow$ ifadesini sağlayan bir $t \geq s_0$ adımı yoksa, $\mathcal{N}_e$ sağlanır ve $\lim_{s\to\infty} r_e(s) = 0$ olur. Varsa, o zaman t böyle bir adım olsun. t adımından sonra A'ya $u(A_t; e, e, t)$'den küçük bir değer katmadığımız için bu hesaplama $\Psi_e(A; e) \downarrow$ ve her $s \geq t$ için $r_e(s) = r_e(t)$ olarak korunacaktır.

Bütün gereksinimleri sağlamak için, bu gereksinimlere öncelik vermeliyiz. Bu öncelik $\mathcal{N}_0$ en büyük öncelik olmak üzere, $\mathcal{N}_0, \mathcal{P}_0, \mathcal{N}_1, \mathcal{P}_1, \ldots$ şeklinde olsun. Burada hiçbir $\mathcal{P}_e$

gereksiniminin kendinden büyük bir $\mathcal{N}_i$ gereksinimini yaralamasına izin vermiyoruz. $\mathcal{P}_e$ A'ya bir eleman kattığı zaman bu gereksinim sürekli sağlanmış kalacaktır. Bu yüzden her $\mathcal{P}_e$ gereksinimi en fazla bir eleman katacaktır A kümesine.

Her $\mathcal{N}_i$ gereksinimi için, kendinden daha büyük önceliğe sahip sonlu sayıda $\mathcal{P}_e$ gereksinimi vardır. Bu demektir ki belli bir adımdan sonra $\mathcal{N}_i$ artık yaralanmayacaktır ve bundan sonra sürekli sağlanmış olarak kalıp $\lim_{s\to\infty} r_i(s)$ tanımlı olacaktır. Öyleyse bütün $\mathcal{P}_e$ gereksinimlerini sağlayabiliriz. Eğer W_e sonsuzsa, bu kümede daha büyük öncelikli gereksinimlere ait bütün kısıtlama fonksiyonlarının limit değerlerinden büyük bir değer olacaktır. İşte bu değeri A'ya katarak bu gereksinimi sağlamış oluruz. Şimdi inşayı açık şekilde verelim.

$s = 0$ adımında $A_0 = \emptyset$ olsun.

$s + 1$ adımında A_s verilsin. $W_{i,s} \cap A_s = \emptyset$ ifadesini ve

$$\exists s\,[x \in W_{i,s} \wedge x > 2i \wedge (\forall e \leq i)\,[r_e(s) < x]]$$

ifadesini sağlayan en küçük $i \leq s$ değerini (eğer varsa) buluruz. Burada $W_{i,s}$, $\Psi_i\,[s]$ fonksiyonunun tanım kümesidir.

Eğer böyle bir i varsa, ikinci ifadeyi sağlayan en küçük x'i A'nın içine katalım. Yani $A_{s+1} = A_s \cup \{x\}$. Eğer i yoksa, birşey yapmayacağız yani $A_{s+1} = A_s$ olarak kalacaktır.

İnşa burada bitiyor. Şimdi inşanın sağlamasını yapalım. $\overline{A}$'nın sonsuz olması $\mathcal{P}_e$'nin A'ya en fazla bir $x \in \omega$ katmasından dolayıdır. Eğer x elemanı A'ya katılırsa $x > 2e$ olur. Her gereksinimin sağlanması da yukarıda verilen öncelik tanımına dayanmaktadır. □

Kaynaklar

[1] S. B. Cooper: Computability Theory. Chapman & Hall/CRC Mathematics (2004).

[2] R. M. Friedberg: A criterion for completeness of degrees of unsolvability. Journal of Symbolic Logic 22 (1957) 159-160.

[3] R. M. Friedberg: Two recursively enumerable sets of incomparable degrees of unsolvability. Proc. Natl. Acad. Sci. USA 43 (1957) 236-238.

[4] S. C. Kleene, E.L.Post: The uppersemilatice of degrees of recursive unsolvability, Ann. Math. 59 (1954) 379-407.

[5] A. A. Muchnik: On the unsolvability of the problem of reducibility in the theory of algorithms. Dokl. Akad. Nauk SSSR, N.S. 108 (1956) 194-197 (Rusça).

[6] G. E. Sacks: A minimal degree less than $\mathbf{0}'$. Bull. Amer. Math. Soc. 67 (1961) 416-419.

[7] G. E. Sacks: The recursively enumerable degrees are dense. Ann. of Math. (2) 80 (1964) 300-312.

[8] J. R. Shoenfield: On degrees of unsolvability. Ann. Math. 69 (1959) 644-653.

[9] J. R. Shoenfield: A theorem on minimal degrees. Journal of Symbolic Logic 31 (1966) 539-544.

[10] R. Soare: Recursively Enumerable Sets and Degrees. Perspectives in Mathematical Logic. Springer-Verlag, Berlin (1987).

[11] C. Spector: On the degrees of recursive unsolvabilityy, Ann. Math. 64 (1956) 581-592.