ISSN: 2146-8168 Sayı:**2**, Yıl: **2013**, Sayfa:**35-40** **http://bilader.gop.edu.tr**

Gaziosmanpaşa Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Gaziosmanpaşa Bilimsel Araştırma Dergisi

Dergiye Geliş Tarihi: 03.01.2013 *Baş Editör*: Naim Çağman
Yayına Kabul Tarihi: 09.01.2013 *Alan Editörü*: Ercan Tunç

Esnek Gruplar Üzerinde Bazı Cebirsel Uygulamalar

Hacı AKTAŞ[a,1] (haktas@nevsehir.edu.tr)
Kıymet ÇAKIR[b] (kiymetckr@gmail.com)

[a,b]Nevşehir Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 50350 Nevşehir

Özet – Esnek küme kavramı Molodtsov tarafından 1999 yılında tanımlandı. Molodtsov belirsizliği modellemede tamamen yeni bir yaklaşım olan esnek küme kavramını ileri sürdü. 2007 yılında, Aktaş ve Çağman esnek kümeler üzerinde esnek grup, esnek alt grup, esnek normal alt grup ve esnek homomorfizma gibi cebirsel kavramları tanımladılar. Bu çalışmada esnek grup kavramı kullanılarak kısıtlanmış esnek gruplar tanıtıldı ve çeşitli özellikleri çalışıldı.

Anahtar Kelimeler –
Esnek Küme, Esnek Grup, Kısıtlanmış Esnek Grup.

Gaziosmanpaşa Journal of Scientific Research 2 (2013) 35-40

Some Algebraic Applications on Soft Groups

Abstract – The concept of soft set theory is introduced by Molodtsov in 1999. Molodsov initiated a novel concept of soft set theory, which is a completely new approach for modeling vagueness and uncertainty. In 2007, Aktaş and Çağman defined and studied the concept of soft groups, soft subgroups, normal soft subgroups and soft homomorphisms. In this study, by using notion of soft group, reduced soft groups are defined and their some properties are studied.

Keywords -
Soft sets, Soft groups, reduced soft groups.

Received: 03.01.2013 *Accepted*: 09.01.2013

1. Giriş

Molodtsov [6] matematikteki bazı belirsizlikleri gidermek için 1999 yılında esnek küme kavramını tanımladı ve ilk sonuçlarını içeren bir çalışma yayımladı. Son zamanlarda

---
[1] **Baş Yazar**

ekonomi, sosyal bilimler, mühendislik, tıp gibi pek çok alanda esnek küme teorisinin çeşitli uygulamaları çalışılmıştır [4,7, 8, 5].

P.K Maji [5] de esnek küme teorisi üzerinde çalışmış ve daha geniş bir kavram olan bulanık esnek küme kavramını tanıttı. Bu kavram bulanık ve esnek kümenin kombinasyonundan oluşmaktadır. Son yıllarda da Z. Kong[8] karar verme problemlerinde esnek küme teorik yaklaşımını uyguladı. Majumdar ve Samanta [7] da esnek küme ile bulanık esnek küme arasındaki benzerlikler üzerinde çalıştı.

Aktaş ve Çağman [2] 2007 yılında daha çok cebirsel yapı içeren esnek grup kavramını tanıttı. Esnek gruplar çalışmasını takip eden bir çok araştırmacı esnek cebirsel yapılar üzerine çeşitli çalışmalar yapmışlardır [1, 3, 9].

Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır.Birinci bölümde esnek kümeler ve esnek gruplar üzerine yapılan çalışmaların kısa bir literatür özeti verilmiştir. İkinci bölüm temel kavramlardan oluşmaktadır. Son bölümde ise esnek grupların bir kısıtlaması olan bir grup yapısı tanımlanmış ve temel bazı özellikleri verilerek ispatlanmıştır.

2. Temel Kavramlar

Tanım 1.1 [1] U evrensel küme ve E parametre kümesi olsun. F, E den U kümesinin kuvvet kümelerine tanımlı bir dönüşüm olmak üzere (F, E) ikilisine U üzerinde esnek küme denir.

Başka bir ifadeyle, bir esnek küme U kümesinin alt kümelerinin parametrize edilmiş bir ailesidir. $\varepsilon \in E$ için $F(\varepsilon)$ kümesi (F, E) esnek kümesinin ε-elemanlarının kümesi olarak yada esnek kümenin ε-yaklaşımlı elemanlarının kümesi olarak göz önüne alınabilir.

Örnek 1.2 [1] (F, E) esnek kümesi Bay X in satın alacağı evlerin parametrize edilmiş şekli olarak tanımlansın.

U- göz önüne alınan tüm evlerin kümesi

E- parametre kümesi (her bir parametre kelime veya cümle olabilir)

$E = \{$ pahalı, güzel, ahşap, ucuz, çevre düzenlemesi yapılmış, modern, iyi durumda, kötü durumda$\}$

Bu durumda esnek kümeyi tanımlamak pahalı evleri, güzel evleri ve diğerlerini göstermek anlamına gelir. $F(\varepsilon)$ kümeleri keyfi olabilir.

Tanım 1.3 [2] U üzerinde (F, A) ve (G, B) esnek kümelerinin birleşimi (H, C) olur. Burada $C = A \cup B$ ve $e \in C$ için

$$H(e) = \begin{cases} F(e) & , \quad eğer \ e \in A - B \\ G(e) & , \quad eğer \ e \in B - A \\ F(e) \cup G(e) & , \quad eğer \ e \in A \cap B \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır ve $(F,A) \tilde{\cup} (G,B) = (H,C)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 1.4 [2] U üzerinde tanımlı (F,A) ve (G,B) iki esnek kümenin keşişimi (H,C) olur. Burada $C = A \cap B$ ve her $e \in C$ için $H(e) = F(e)$ veya $G(e)$ (her ikisinde aynı küme ise) şeklinde tanımlanır ve $(F,A) \tilde{\cap} (G,B) = (H,C)$ ile gösterilir.

Tanım 1.5 [2] U evrensel kümesi üzerinde (F,A) ve (G,B) esnek kümeleri için eğer;

1. $A \subset B$
2. $\forall \varepsilon \in A$ için $F(\varepsilon)$ ve $G(\varepsilon)$ özdeş yaklaşımlar ise

(F,A) , (G,B) nin esnek alt kümesidir denir ve $(F,A) \tilde{\subset} (G,B)$ ile gösterilir.

Tanım1.6 [2] Eğer (F,A) ve (G,B) iki esnek küme ise $(F,A) \wedge (G,B)$ ile gösterilen "$(F,A)\ VE\ (G,B)$" işlemi

$$(F,A) \wedge (G,B) = (H, A \times B) \ , \ \forall(\alpha,\beta) \in A \times B \text{ için } H(\alpha,\beta) = F(\alpha) \cap G(\beta)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.7 [2] Eğer (F,A) ve (G,B) iki esnek küme ise $(F,A) \vee (G,B)$ ile gösterilen "$(F,A)\ VEYA\ (G,B)$" işlemi $(F,A) \vee (G,B) = (O, A \times B)$, $\forall(\alpha,\beta) \in A \times B$ için $O(\alpha,\beta) = F(\alpha) \cup G(\beta)$ şeklinde tanımlanır

Esnek kümenin tanımından sonra esnek küme teorisinin cebirsel yapılar üzerine uygulanmasından biri olan esnek grup kavramını tanımlayacağız. G bir grup H de G nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer H kümesi G de tanımlanan grup işlemi ile bir grup oluyorsa H ye G nin bir alt grubu denir ve $H < G$ şeklinde gösterilir.

Tanım 1.8 [3] (F,A) , G üzerinde esnek küme olsun. $\forall x \in A$ için $F(x) < G$ olmak üzere (F,A) çiftine G üzerinde bir esnek grup denir.

Örnek 1.9 [3] $G = A = S_3 = \{e,(12),(13),(23),(123),(132)\}$ olsun ve $F: S_3 \rightarrow S_3$ fonksiyonunun değer kümesi $F(x) = \{y \in G : xRy \Leftrightarrow y = x^n, n \in N\}$ şeklinde tanımlansın. (F,A) esnek grubunun alt kümeleri $\{F(x) : x \in A\}$ şeklinde parametrize edilen bir ailedir. Bu bize G nin alt gruplarının koleksiyonunu verir. Yukarıda tanımlanan özel F dönüşümü için $F(x)$ değeri G nin bir alt grubudur. Bu durumda (F,A) esnek grubunu G nin alt gruplarının koleksiyonu olarak alabiliriz.

$F(e) = \{e\}$, $F(12) = \{e,(12)\}$, $F(13) = \{e,(13)\}$, $F(23) = \{e,(23)\}$,
$F(123) = F(132) = \{e,(123),(132)\}$

3. Kısıtlanmış Esnek Gruplar

Bu bölüm boyunca A bir parametre kümesi ve G bir grup olarak alınacaktır.

Tanım 2.1 (F,A) , G üzerinde tanımlı bir esnek grup olsun. Eğer her $x,y \in A$ için $F(x) \cap F(y) \in (F,A)$ ise (F,A) ya bir kısıtlanmış esnek grup denir.

Her kısıtlanmış esnek grup, esnek gruptur fakat her esnek grup, kısıtlanmış esnek grup değildir. Bunu aşağıdaki örnekle gösterelim.

Örnek 2.2 $A = \{e_1, e_2, e_3\}$, $G = D_4$ olsun. G üzerinde tanımlanan (F,A) esnek grubu $(F,A) = \{F(e_1) = \{e, a, a^2, a^3\}, F(e_2) = \{e, a^2, b, a^2b\}, F(e_3) = \{e, ab, a^2, a^3b\}\}$ şeklinde tanımlansın.

$e_1, e_2 \in A$ için $F(e_1) \cap F(e_2) \notin (F,A)$ olduğundan G üzerindeki (F,A) esnek grubu bir kısıtlanmış esnek grup değildir.

Teorem 2.3 (F,A) ve (K,B) bir kısıtlanmış esnek grup ise $(F,A) \tilde{\cap} (G,B)$ de bir kısıtlanmış esnek gruptur.

İspat: Tanım1.4 den $(F,A) \tilde{\cap} (K,B) = (H,C)$ ve $A \cap B = C$ olmak üzere her $x \in C$ için $H(x) = F(x)$ veya $K(x)$ (her ikiside aynı) şeklinde tanımlanır.

$\forall x, y \in C$ için $H(x) \cap H(y) = F(x) \cap F(y) \in (F,A)$ olduğundan $H(x) \cap H(y) \in (F,A)$ olur.

Her $x, y \in C$ için $H(x) \cap H(y) = K(x) \cap K(y) \in (K,B)$ olduğundan $H(x) \cap H(y) \in (K,B)$ olur.

Bundan dolayı $(F,A) \tilde{\cap} (K,B)$ bir kısıtlanmış esnek gruptur.

Teorem 2.4 (F,A) ve (K,B) birer kısıtlanmış esnek grup ve $A \cap B = \emptyset$ ise $(F,A) \tilde{\cup} (K,B)$ de kısıtlanmış esnek gruptur.

İspat: Tanım1.3 den $(F,A) \tilde{\cup} (K,B) = (H,C)$, $C = A \cup B$ ve $A \cap B = \emptyset$ olmak üzere $\forall e \in C$ için

$$H(e) = \begin{cases} F(e) & , \quad e \in A - B \\ K(e) & , \quad e \in B - A \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır.

Eğer her $x, y \in A - B$ ise $H(x) \cap H(y) = F(x) \cap F(y) \in (F,A)$ olduğundan $H(x) \cap H(y) \in (F,A)$ olur.

Eğer her $x, y \in B - A$ ise $H(x) \cap H(y) = K(x) \cap K(y) \in (K,B)$ olduğundan

$H(x) \cap H(y) \in (K, B)$ olur. Dolayısıyla $A \cap B = \emptyset$ olmak şartıyla ise $(F, A) \tilde{\cup} (K, B)$ bir kısıtlanmış esnek gruptur.

Teorem 2.5 (F, A) ve (K, B) birer kısıtlanmış esnek grup ise $(F, A) \wedge (K, B)$ de bir kısıtlanmış esnek gruptur.

İspat: Tanım1.6 dan $(F, A) \wedge (K, B) = (H, A \times B)$,

Her $(\alpha, \beta) \in A \times B$ için $H(\alpha, \beta) = F(\alpha) \cap K(\beta)$ şeklinde tanımlanır.

Her $(\alpha, \beta), (x, y) \in A \times B$ için

$$H(\alpha, \beta) \cap H(x, y) = \big(F(\alpha) \cap K(\beta)\big) \cap \big(F(x) \cap K(y)\big)$$
$$= \big(F(\alpha) \cap F(x)\big) \cap \big(K(\beta) \cap K(y)\big) \text{ olur.}$$

(F, A) bir kısıtlanmış esnek grup olduğundan $F(\alpha) \cap F(x) = F(u)$ ve (K, B) kısıtlanmış esnek grup olduğundan $K(\beta) \cap K(y) = K(v)$ olacak şekilde $(u, v) \in A \times B$ vardır. O halde $F(u) \cap K(v) = H(u, v)$ olur. $(H, A \times B)$ bir esnek grup olduğundan $H(u, v) \in (H, A \times B)$ olur. Dolayısıyla $(F, A) \wedge (K, B)$ de bir kısıtlanmış esnek gruptur.

Teorem 2.6 Eğer (F, A) birim esnek grup ise aynı zamanda kısıtlanmış esnek gruptur.

İspat: Birim esnek grubun tanımından her $x \in A$ için $F(x) = \{\, e \,\}$ olur.

Her $x, y \in A$ için $F(x) \cap F(y) = \{\, e \,\} \cap \{\, e \,\} = \{\, e \,\} \in (F, A)$

olduğundan birim esnek grup kısıtlanmış esnek gruptur.$\boxdot$

(F, A) G üzerinde bir esnek grup, $f: G \to K$ ya tanımlı bir homomorfizma olsun. $kerf = \{\, g \in G : f(g) = e_k \,\}$ olmak üzere eğer $\forall x \in A$ için

$F(x) = kerf$ ise $(f(F),\, A)$ ya K üzerinde birim esnek gruptur. $(f(F),\, A)$ birim esnek grup olduğundan aynı zamanda bir kısıtlanmış esnek gruptur.

Teorem 2.7 Eğer (F, A) mutlak esnek grup ise aynı zamanda bir kısıtlanmış esnek gruptur.

İspat: Mutlak esnek grup tanımından her $x \in A$ için $F(x) = G$ olur.

Her $x, y \in A$ için $F(x) \cap F(y) = G \cap G = G \in (F, A)$ olduğundan, (F, A) aynı zamanda kısıtlanmış esnek gruptur.$\boxdot$

(F, A), G üzerinde mutlak esnek grup, $f: G \to K$ bir homomorfizma olsun. O halde $(f(F),\, A)$ K üzerinde mutlak esnek gruptur. $(f(F), A)$ mutlak esnek grup olduğundan aynı zamanda bir kısıtlanmış esnek gruptur.

Tanım 2.8: (F, A) ve (H, K), G üzerinde kısıtlanmış esnek grup olsun. Eğer

1. $K \subset A$
2. $\forall x \in K$ için $H(x) < F(x)$

ise (H,K) ya (F,A) kısıtlanmış esnek alt grubu denir.

Örnek 2.9 $A = \{e_1, e_2, e_3\}$, $K = \{e_1, e_2\}$ ve $G = S_3$ olsun. (F,A) ve (H,K), G üzerinde aşağıdaki gibi tanımlı kısıtlanmış esnek gruplar olsun.

$F(e_1) = \{e, x\}$, $F(e_2) = \{e, x, y^2\}$, $F(e_3) = \{e, x, y\}$ ve
$H(e_1) = \{e\}$, $H(e_2) = \{e, y^2\}$ şeklinde tanımlansın. $K \subset A$ ve her $x \in K$ için $H(x) < F(x)$ şartları sağlandığından (H,K) , (F,A) nın kısıtlanmış esnek alt grubudur.

Kaynaklar

1. Acar, U., Koyuncu, F. Tanay, B., Soft Sets and Soft Rings, Computers and Mathematics with Applications 59 (2010) 3458-3463.
2. Aktaş, H., Çağman, N., Soft Set and Soft Groups, Information Science 177 (2007) 2726-2735.
3. Babitha, K.V., Sunil, J.J., Soft Set Relations and Functions, Computers and Mathematics with Applications 60 (2010) 1840-1849.
4. Gong, K., Wang, P. and Xiao, Z., Bijective soft set decision system based parameters reduction under fuzzy environments, Applied Mathematical Modelling, http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2012.09.067.
5. Maji, P.K., Biswas, R., Roy, A.R., Soft Set Theory, Computers and Mathematics with Applications 45 (2003) 555-562.
6. Molodtsov, D., Soft Set Theory-First Results, Computers and Mathematics with Applications 37 (1999) 19-31.
7. Majumdar, P. and Samanta, S.K., Similarity measure of soft set, New Mathematics &Natural Computation 4(1)(2008) 1-12.
8. Kong, Z., Gao, L. and Wang, L., Comment on “A fuzzy soft set theoretic approach to decision making problems”, Journal of Computational and Applied Mathematics 223 (2009) 540-542.
9. Shao, Y. and Qin, K,. The lattice structure of the soft groups, Procedia Engineering 15 (2011) 3621-3625.