



Gaziosmanpaşa Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü

## Gaziosmanpaşa Bilimsel Araştırma Dergisi

Dergiye Geliş Tarihi: 30.05.2013

Yayına Kabul Tarihi: 05.07.2013

Baş Editör: Naim Çağman

Danışman Editör: Mehmet Güngör

### Farklı Boyutlu Tutarlı Sistemlerin Sistem İmzası ile Karşılaştırılması

Yunus BULUT<sup>a,1</sup> ([ybulut79@gmail.com](mailto:ybulut79@gmail.com))

Hikmet YAMAN<sup>b</sup> ([hikmetyaman35@hotmail.com](mailto:hikmetyaman35@hotmail.com))

<sup>a</sup>Bingöl Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 12000, Bingöl

<sup>b</sup>Çine Anadolu Öğretmen Lisesi, Çine, 09500, Aydın

**Özet** –Bu çalışmada, aynı dağılımlı ve bağımsız bileşenlere sahip farklı  $n$  ve  $m$  boyutlu tutarlı sistemlerin sistem imzaları ile stokastik ve sağkalım hız sıralaması anlamında nasıl karşılaştırıldıklarını inceledik.

**Anahtar Kelimeler-**  
Tutarlı sistemler,  
sistem imzası, sıralı  
istatistikler, stokastik  
sıralama, sağkalım hız  
sıralaması.

Gaziosmanpaşa Journal of Scientific Research 6 (2013) 85-102

### Comparing Coherent Systems of Different Sizes via System Signature

**Abstract** – In this study, we examined how to compare the coherent systems of different sizes  $n$  and  $m$  whose components have independent and identically distributed (iid) lifetimes through their system signatures in terms of stochastic ordering (st) and hazard rate ordering (hr).

**Keywords–**  
Coherent systems,  
system signature,  
order statistics,  
stochastic ordering,  
hazard rate ordering.

Received: 30.05.2013

Accepted: 05.07.2013

<sup>1</sup>Sorumlu Yazar

## 1. Giriş

Günlük hayatımızda, belirli bir t zamanından sonra ürünün yaşam kalitesi veya t zamanda kalan ömrü istatistiksel olarak önem arz etmekte ve bu tür durumlar sistem güvenilirliği ile ölçülmektedir. Sistem güvenilirliği ile ilgili çalışmalar 2. Dünya Savaşı'ndan sonra daha da bir önem kazanmıştır. Belli bir çalışma sahasındaki sistemlerden hangisinin daha kullanışlı ve durumu daha iyi ifade edebilirliği sistemlerin karşılaştırılması ile belirlenebilir. Bu çalışmada, Samaniego (1985)'in tanımladığı sistem imzası ile farklı boyutlu sistemlerin nasıl karşılaştırıldığını inceledik [10].

## 2. Tutarlı Sistemler

Güvenilirlik teorisinde çoğu uygulama tutarlı sistemlerin dizaynı ve performansı üzerine yapılmaktadır. Öncelikle, tutarlı sistemlerin oluşturulması için gerekli bazı temel kavramları vereceğiz.

**Tanım 2.1.**  $i \in [n] = \{1, 2, \dots, n\}$  için  $i$ . bileşenin durumu

$$x_i = \begin{cases} 1, & i. \text{ bileşen } t \text{ anında çalışıyorsa} \\ 0, & i. \text{ bileşen } t \text{ anında çalışmıyorsa} \end{cases}$$

dönüşümü ile tanımlanır. Burada n, sistemdeki bileşenlerin sayısıdır.  $x_i$  dönüşümü bir Bernoulli değişkenidir ve  $P(x_i = 1) = p_i$  ile gösterilir. Ayrıca, i. bileşenin  $T_i$  yaşam süresinin, herhangi bir t anından büyük olma olasılığına *bileşen güvenilirliği* denir ve  $i \in [n]$  için  $P(T_i > t) = p_i$  dir. Benzer şekilde, *sistemin durumu*

$$\phi = \begin{cases} 1, & \text{sistem } t \text{ anında çalışıyorsa} \\ 0, & \text{sistem } t \text{ anında çalışmıyorsa} \end{cases}$$

dönüşümü ile tanımlanır.  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n$  olmak üzere,  $\phi(\mathbf{x})$  fonksiyonu, *yapı fonksiyonu* olarak adlandırılır. Sistemdeki bileşen sayısı olan n, *sistemin boyutudur* [2],[8],[9].

**Tanım 2.2.** Sistemin t anında çalışıyor olma olasılığına, yani  $\phi(\mathbf{x}) = 1$  olma olasılığına *sistem güvenilirliği* denir. Sistemin güvenilirliği,  $h(\mathbf{p}) = P(\phi(\mathbf{x}) = 1) = E\phi(\mathbf{x})$  eşitliği ile hesaplanır. Burada  $\mathbf{p}=(p_1, p_2, \dots, p_n)$  dir [2],[8],[9].

**Tanım 2.3.** Bir sistem, a)  $\phi(\mathbf{x})$  yapı fonksiyonu, her bir bileşen için monoton azalmayan ise ve b) sistem sadece ilişkili bileşenlerden oluşuyor ise *tutarlı sistem* adını alır. Tutarlı sistemlerde, başarısız bir bileşen yerine çalışan bir bileşen yerleştirildiğinde sistem performansı etkilenir. Ayrıca, her bir bileşen sistemin başarısını veya başarısızlığını etkiler. i. bileşenin *ilişkili bileşen* olması, her  $i \in [n]$  için

$$\phi(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}, x_n) \neq \phi(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}, x_n)$$

önermesi ile ifade edilir [2],[8],[9].

Bir sistemin yapı fonksiyonu belirlenirken, sistemin başarı yol kümeleri ve kesen kümelerinden faydalanılmaktadır.

**Tanım 2.4.** P, bir sistemin bir kısım bileşenlerinden oluşan bir küme olsun. P kümesindeki bütün bileşenler çalıştığında sistem de çalışıyorsa, P'ye *başarı yol kümesi* denir. Başka bir başarı yol kümesini kapsamayan başarı yol kümesine, *minimal başarı yol kümesi* denir [2],[8],[9].

**Tanım 2.5.** K, bir sistemin bir kısım bileşenlerinden oluşan bir küme olsun. K kümesindeki bütün bileşenler başarısız olduğunda sistem de başarısız oluyorsa, K'ya *kesen küme* denir. Başka bir kesen kümeyi kapsamayan kesen kümeye, *minimal kesen küme* denir [2],[8],[9].

$\{P_1, P_2, \dots, P_r\}$  ve  $\{K_1, K_2, \dots, K_s\}$  kümeleri sırasıyla sistemin minimal başarı yol ve minimal kesen kümeleri kümesi olsun. O zaman, sistemin yapı fonksiyonu,

$$\phi(x) = \underset{(1 \leq i \leq r)}{\text{maksmin}} \{x_j\} = \prod_{i=1}^r \prod_{j \in P_i} x_j$$

veya

$$\phi(x) = \underset{(1 \leq i \leq s)}{\text{minmaks}} \{x_j\} = \prod_{i=1}^s \prod_{j \in K_i} x_j$$

operatörleri ile belirlenebilir [2],[8],[9].

**Örnek 2.1.** *minmaks* operatörü yardımıyla, n boyutlu bir seri sistemin yapı fonksiyonu ve güvenilirliği, sırasıyla,

$$\phi_s(x) = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n \text{ ve } h_s(p) = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n$$

olarak elde edilir.

Eğer sistem bileşenleri özdeş ise (yani,  $i \in [n]$  için  $x = x_i$  ve  $P(x_i = 1) = p$  ise), seri sistemin yapı fonksiyonu ve güvenilirliği, sırasıyla,

$$\phi_s(x) = x^n \text{ ve } h_s(p) = p^n$$

ile ifade edilir.

**Örnek 2.2.** *minmaks* operatörü yardımıyla, n boyutlu bir paralel sistemin yapı fonksiyonu ve güvenilirliği, sırasıyla,

$$\phi_p(\mathbf{x}) = 1 - (1 - x_1)(1 - x_2) \cdots (1 - x_n)$$

ve

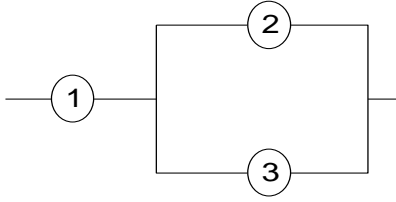
$$h_p(\mathbf{p}) = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2) \cdots (1 - p_n)$$

olarak elde edilir.

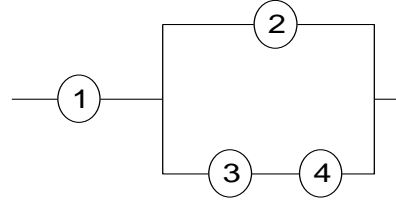
Eğer sistem bileşenleri özdeş ise paralel sistemin yapı fonksiyonu ve güvenilirliği, sırasıyla,

$$\phi_p(x) = 1 - (1 - x)^n \text{ ve } h_p(p) = 1 - (1 - p)^n$$

ile ifade edilir.



Şekil 1.



Şekil 2.

**Örnek 2.3.** Şekil 1'de verilen 3 boyutlu sistemin minimal başarı yol kümeleri  $\{1,2\}$  ve  $\{1,3\}$  olduğundan *maksmin* operatörü yardımıyla, sistemin yapı fonksiyonu ve güvenilirliği, sırasıyla,

$$\phi_1(\mathbf{x}) = x_1\{1 - (1 - x_2)(1 - x_3)\} \text{ ve } h_1(\mathbf{p}) = p_1\{1 - (1 - p_2)(1 - p_3)\}$$

olarak elde edilir.

Eğer sistem bileşenleri özdeş ise sistemin yapı fonksiyonu ve güvenilirliği, sırasıyla,

$$\phi_1(x) = x \cdot \{1 - (1 - x)^2\} \text{ ve } h_1(p) = p\{1 - (1 - p)^2\}$$

ile ifade edilir.

**Örnek 2.4.** Şekil 2'de verilen 4 boyutlu sistemin minimal kesen kümeleri  $\{1\}$ ,  $\{2,3\}$  ve  $\{2,4\}$  olduğundan *minmaks* operatörü yardımıyla yapı fonksiyonu ve güvenilirliği, sırasıyla,

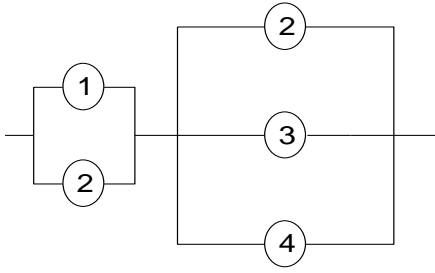
$$\phi_2(\mathbf{x}) = x_1\{1 - (1 - x_2)(1 - x_3x_4)\} \text{ ve } h_2(\mathbf{p}) = p_1\{1 - (1 - p_2)(1 - p_3p_4)\}$$

olarak elde edilir.

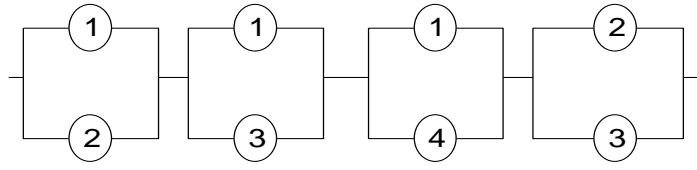
Eğer sistem bileşenleri özdeş ise yapı fonksiyonu ve güvenilirliği, sırasıyla,

$$\phi_2(x) = x\{1 - (1 - x)(1 - x^2)\} \text{ ve } h_2(p) = p\{1 - (1 - p)(1 - p^2)\}$$

ile ifade edilir.



Şekil 3.



Şekil 4.

**Örnek 2.5.** Şekil 3'te verilen 4 boyutlu sistemin, minimal başarı yol kümeleri  $\{1,2\}$ ,  $\{1,3\}$ ,  $\{1,4\}$ ,  $\{2,3\}$  ve  $\{2,4\}$  olduğundan *maksmin* operatörü yardımıyla, sistemin yapı fonksiyonu ve güvenilirliği, sırasıyla,

$$\phi_3(\mathbf{x}) = \{1 - (1 - x_1)(1 - x_2)\}\{1 - (1 - x_2)(1 - x_3)(1 - x_4)\}$$

ve

$$h_3(\mathbf{p}) = \{1 - (1 - p_1)(1 - p_2)\}\{1 - (1 - p_2)(1 - p_3)(1 - p_4)\}$$

olarak elde edilir.

Eğer sistem bileşenleri özdeş ise sistemin yapı fonksiyonu ve güvenilirliği, sırasıyla,

$$\phi_3(x) = \{1 - (1 - x)^2\}\{1 - (1 - x)^3\} \text{ ve } h_3(p) = \{1 - (1 - p)^2\}\{1 - (1 - p)^3\}$$

ile ifade edilir.

**Örnek 2.6.** Şekil 4'te verilen 4 boyutlu sistemin, minimal kesen kümeleri  $\{1,2\}$ ,  $\{1,3\}$ ,  $\{1,4\}$  ve  $\{2,3\}$  olduğundan, *maksmin* operatörü yardımıyla, sistemin yapı fonksiyonu ve güvenilirliği, sırasıyla,

$$\phi_4(\mathbf{x}) = \{1 - (1 - x_1)(1 - x_2)\}\{1 - (1 - x_1)(1 - x_3)\}\{1 - (1 - x_1)(1 - x_4)\}$$

$$\{1 - (1 - x_2)(1 - x_3)\}$$

ve

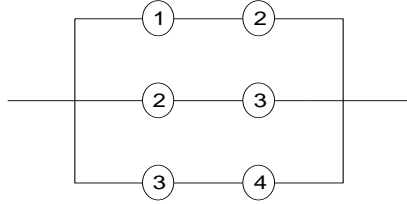
$$h_4(\mathbf{p}) = \{1 - (1 - p_1)(1 - p_2)\}\{1 - (1 - p_1)(1 - p_3)\}\{1 - (1 - p_1)(1 - p_4)\}\{1 - (1 - p_2)(1 - p_3)\}$$

olarak elde edilir.

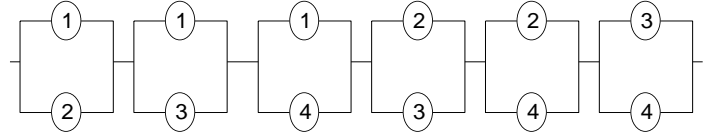
Eğer sistem bileşenleri özdeş ise sistemin yapı fonksiyonu ve güvenilirliği, sırasıyla,

$$\phi_4(x) = \{1 - (1 - x)^2\}^4 \text{ ve } h_4(p) = \{1 - (1 - p)^2\}^4$$

ile ifade edilir.



Şekil 5. 4'den ardıl 2 çıkışlı: G Sistem



Şekil 6. 4'den 2 çıkışlı Sistem

**Örnek 2.7.** Şekil 5'deki 4 boyutlu sistem, herhangi iki ardıl bileşeni çalıştığında, çalışan bir sistemdir<sup>2</sup>. Bu sistem, 4'den ardıl 2 çıkışlı: G Sistem olarak adlandırılır. Bu sistemin minimal başarı yol kümeleri  $\{1,2\}$ ,  $\{2,3\}$  ve  $\{3,4\}$  olduğundan, *maksmin* operatörü yardımıyla, sistemin yapı fonksiyonu ve güvenilirliği, sırasıyla,

$$\phi_{2;4;G}(x) = 1 - (1 - x_1x_2)(1 - x_2x_3)(1 - x_3x_4)$$

ve

$$h_{2;4;G}(p) = 1 - (1 - p_1p_2)(1 - p_2p_3)(1 - p_3p_4)$$

olarak elde edilir.

Eğer sistem bileşenleri özdeş ise sistemin yapı fonksiyonu ve güvenilirliği, sırasıyla,

$$\phi_{2;4;G}(x) = 1 - (1 - x^2)^3 \text{ ve } h_{2;4;G}(p) = 1 - (1 - p^2)^3$$

ile ifade edilir.

<sup>2</sup> Bu tür sistemlere, genel olarak n'den ardıl k çıkışlı: G Sistem denir [11].

**Örnek 2.8.** Şekil 6’da verilen 4 boyutlu sistem, 4’den 2 çıkışlı Sistem olarak adlandırılır. Bu sistemin, minimal kesen kümeleri  $\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}$  ve  $\{3,4\}$  olduğundan *minmaks* operatörü yardımıyla sistemin yapı fonksiyonu ve güvenilirliği, sırasıyla,

$$\phi_{2;4}(\mathbf{x}) = \{1 - (1 - x_1)(1 - x_2)\}\{1 - (1 - x_1)(1 - x_3)\}\{1 - (1 - x_1)(1 - x_4)\} \\ \{1 - (1 - x_2)(1 - x_3)\}\{1 - (1 - x_2)(1 - x_4)\}\{1 - (1 - x_3)(1 - x_4)\}$$

ve

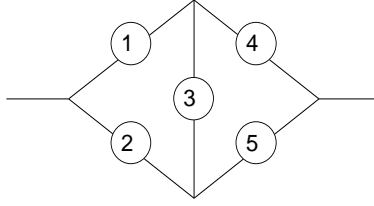
$$h_{2;4}(\mathbf{p}) = \{1 - (1 - p_1)(1 - p_2)\}\{1 - (1 - p_1)(1 - p_3)\}\{1 - (1 - p_1)(1 - p_4)\} \\ \{1 - (1 - p_2)(1 - p_3)\}\{1 - (1 - p_2)(1 - p_4)\}\{1 - (1 - p_3)(1 - p_4)\}$$

olarak elde edilir.

Eğer sistem bileşenleri özdeş ise sistemin yapı fonksiyonu ve güvenilirliği, sırasıyla,

$$\phi_{2;4}(x) = \{1 - (1 - x)^2\}^6 \text{ ve } h_{2;4}(p) = \{1 - (1 - p)^2\}^6$$

ile ifade edilir.



Şekil 7. Köprü Sistemi

**Örnek 2.9.** Şekil 7’de verilen 5 boyutlu sistem, Köprü Sistemi (KS) olarak adlandırılmaktadır. Bu sistemin minimal başarı yol kümeleri  $\{1,4\}, \{2,5\}, \{1,3,5\}$  ve  $\{2,3,4\}$  olduğundan *maksmin* operatörü yardımıyla sistemin yapı fonksiyonu ve güvenilirliği, sırasıyla,

$$\phi_{KS}(\mathbf{x}) = 1 - (1 - x_1x_4)(1 - x_2x_5)(1 - x_1x_3x_5)(1 - x_2x_3x_4)$$

ve

$$h_{KS}(\mathbf{p}) = 1 - (1 - p_1p_4)(1 - p_2p_5)(1 - p_1p_3p_5)(1 - p_2p_3p_4)$$

olarak elde edilir.

Eğer sistem bileşenleri özdeş ise sistemin yapı fonksiyonu ve güvenilirliği, sırasıyla,

$$\phi_{KS}(x) = 1 - (1 - x^2)^2(1 - x^3)^2 \text{ ve } h_{KS}(p) = 1 - (1 - p^2)^2(1 - p^3)^2$$

ile ifade edilir.

### 3. Sistem İmzası ve Özellikleri

$n$  bileşenli bir sistemin bileşen yaşam süreleri  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , bu yaşam sürelerinin sıralı istatistikleri  $X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n}$  ve sistemin yaşam süresi  $T$  olsun. O zaman, sistemin  $T$  yaşam süresi,  $X_{i:n}$  sıralı istatistiği ile ilişkili olacaktır. Samaniego (1985), bu ilişkiyi temel alarak sistem imzasını tanımlamıştır. Aynı makalede, sistem imzası bilinen sistemlerin, sistem imzaları ile sistemlerin yaşam süreleri arasındaki ilişkiyi vermiştir [10]. Bu çalışma, tutarlı sistemlerin sistem imzası üzerine kurulmuştur.

**Tanım 3.1.**  $F, (0, \infty)$  aralığında sürekli bir fonksiyon olsun. Aynı  $F$  dağılımlı ve bağımsız bileşenden oluşan tutarlı bir sistemin bileşenleri  $X_1, X_2, \dots, X_n$  olmak üzere  $i$ . bileşeni  $s_i = P(T = X_{i:n})$  olan  $s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in [0, 1]^n$  vektörüne *sistem imzası* denir. Burada  $\sum_{i=1}^n s_i = 1$  dir [10],[11].

Sistem imzası vektörü, yalnızca sistemin dizaynına bağlıdır ve sistemin bileşenlerinin yaşam sürelerinin dağılımından bağımsızdır, bu yüzden, sistemlerin karşılaştırılmasında önemli bir ölçümdür. Eğer iki sistem aynı sistem imzasına sahipse sistemlerin yaşamlarının stokastik davranışları özdeştir. Sistem imzası, bileşen sayısı az olan sistemlerde *minmaks* operatörü yardımıyla kolaylıkla bulunabilir. *Da et al.* (2012), bileşen sayısı fazla olan sistemlerin imzasını, sistemleri altsistemlere ayırarak hesaplamıştır [4].

**Örnek 3.1.** Şekil 2'deki 4 boyutlu  $\phi_2$  sistemini gözönüne alalım. Bu sistemin, minimal başarı yol kümeleri kümesi  $P = \{\{1,2\}, \{1,3,4\}\}$  olduğundan yapı fonksiyonu

$$\phi_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = \max_{1 \leq i \leq 2, P_i \in P} \min P_i$$

$$= \max\{\min\{x_1, x_2\}, \min\{x_1, x_3, x_4\}\} \quad (3.1)$$

$$= \max\{x_1 x_2, x_1 x_3 x_4\}$$

$$= 1 - (1 - x_1 x_2) \cdot (1 - x_1 x_3 x_4)$$

$$= x_1 \{x_2 + x_3 x_4 - x_2 x_3 x_4\}$$

$$= x_1 \{1 - (1 - x_2) + x_3 x_4 (1 - x_2)\}$$

$$= x_1 \{1 - (1 - x_2)(1 - x_3 x_4)\}$$

$$= \min\{x_1, \max\{x_2, \min\{x_3, x_4\}\}\} \quad (3.2)$$

olarak elde edilir. Bu sistemin yaşam süresi  $T$  olmak üzere, (3.1) veya (3.2) özdeşlikleri kullanılarak  $T$ 'nin hangi sıralı istatistiğe eşit olduğu, Tablo 1'de elde edilmiştir.



Tablo 1.

$X_{i_1} < X_{i_2} < X_{i_3} < X_{i_4}$	$T = X_{i:4}$
$X_1 < X_2 < X_3 < X_4$	$X_1 = X_{1:4}$
$X_1 < X_2 < X_4 < X_3$	$X_1 = X_{1:4}$
$X_1 < X_3 < X_2 < X_4$	$X_1 = X_{1:4}$
$X_1 < X_3 < X_4 < X_2$	$X_1 = X_{1:4}$
$X_1 < X_4 < X_2 < X_3$	$X_1 = X_{1:4}$
$X_1 < X_4 < X_3 < X_2$	$X_1 = X_{1:4}$
$X_2 < X_1 < X_3 < X_4$	$X_1 = X_{2:4}$
$X_2 < X_1 < X_4 < X_3$	$X_1 = X_{2:4}$
$X_2 < X_3 < X_1 < X_4$	$X_3 = X_{2:4}$
$X_2 < X_3 < X_4 < X_1$	$X_3 = X_{2:4}$
$X_2 < X_4 < X_1 < X_3$	$X_4 = X_{2:4}$
$X_2 < X_4 < X_3 < X_1$	$X_4 = X_{2:4}$
$X_3 < X_1 < X_2 < X_4$	$X_1 = X_{2:4}$
$X_3 < X_1 < X_4 < X_2$	$X_1 = X_{2:4}$
$X_3 < X_2 < X_1 < X_4$	$X_2 = X_{2:4}$
$X_3 < X_2 < X_4 < X_1$	$X_2 = X_{2:4}$
$X_3 < X_4 < X_1 < X_2$	$X_1 = X_{3:4}$
$X_3 < X_4 < X_2 < X_1$	$X_2 = X_{3:4}$
$X_4 < X_1 < X_2 < X_3$	$X_1 = X_{2:4}$
$X_4 < X_1 < X_3 < X_2$	$X_1 = X_{2:4}$
$X_4 < X_2 < X_1 < X_3$	$X_2 = X_{2:4}$
$X_4 < X_2 < X_3 < X_1$	$X_2 = X_{2:4}$
$X_4 < X_3 < X_1 < X_2$	$X_1 = X_{3:4}$
$X_4 < X_3 < X_2 < X_1$	$X_2 = X_{3:4}$

Tablo 1'den

$$P(T = X_{1:4}) = \frac{n(T = X_{1:4})}{4!} = \frac{6}{24}$$

$$P(T = X_{2:4}) = \frac{n(T = X_{2:4})}{4!} = \frac{14}{24}$$

$$P(T = X_{3:4}) = \frac{n(T = X_{3:4})}{4!} = \frac{4}{24}$$

$$P(T = X_{4:4}) = \frac{n(T = X_{4:4})}{4!} = \frac{0}{24}$$

ve dolayısıyla,  $\phi_2$  sisteminin imzası,  $\mathbf{s}_2 = (\frac{1}{4}, \frac{7}{12}, \frac{1}{6}, 0)$  olarak elde edilir.

**Örnek 3.2.** Genel olarak  $n$  boyutlu seri sistemlerin imzasının  $\mathbf{s}_s = (1,0, \dots, 0)$ , paralel sistemlerin imzasının  $\mathbf{s}_p = (0,0, \dots, 1)$  ve  $n$ 'den  $k$  çıkışlı Sistemlerin imzasının  $(0, \dots, 1_k, \dots, 0)$  olduğu, Örnek 3.1'de  $\mathbf{s}_2$ 'in elde edilmesi gibi kolaylıkla elde edilebilir. Ayrıca; 3 boyutlu  $\phi_1$  sistemi için  $\mathbf{s}_1 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$  ve 4 boyutlu  $\phi_3, \phi_4, \phi_{2;4;G}$  ve  $\phi_{2;4}$  sistemleri için sırasıyla,  $\mathbf{s}_3 = (0, \frac{1}{6}, \frac{7}{12}, \frac{1}{4})$ ,  $\mathbf{s}_4 = (0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$ ,  $\mathbf{s}_{2;4;G} = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$  ve  $\mathbf{s}_{2;4} = (0, 1, 0, 0)$  ve 5 boyutlu  $\phi_5$  sistemi için  $\mathbf{s}_{KS} = (0, \frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}, 0)$  elde edilir.

**Teorem 3.1.**  $X_1, X_2, \dots, X_n$  tesadüfi değişkenleri,  $n$  boyutlu tutarlı bir sistemin aynı  $F$  dağılımlı ve bağımsız bileşen yaşam süreleri olsun.  $T$  sistemin yaşam süresi ve  $\mathbf{s} \in [0,1]^n$  sistem imzası olmak üzere, sistemin  $t$  anındaki güvenilirliği

$$\bar{F}_T(t) = P(T > t) = \sum_{i=1}^n s_i \sum_{j=0}^{i-1} \binom{n}{j} \{1-p\}^j \{p\}^{n-j} \quad (3.3)$$

eşitliği ile verilebilir [7],[10],[11].

**Sonuç 3.1.** Teorem 3.1'den  $P(T > t) = \sum_{i=1}^n s_i P(X_{im} > t)$  ve  $E(T) = \sum_{i=1}^n s_i E(X_{im})$  eşitlikleri elde edilebilir [12].

**Örnek 3.3.**  $\phi_s, \phi_p, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_{2;4;G}, \phi_{2;4}$  ve  $\phi_{KS}$  sistemlerinin Örnek 3.2'de bulunan imzaları (3.3)'de yazılırsa, bu sistemlerin bileşenleri özdeş olmak üzere, sırasıyla,  $h_s, h_p, h_1, h_2, h_3, h_4, h_{2;4;G}, h_{2;4}$  ve  $h_{KS}$  güvenilirlikleri bulunur.

#### 4. Farklı Boyutlu Tutarlı Sistemlerin Sistem İmzası ile Karşılaştırılması

Literatürde,  $X$  ve  $Y$  tesadüfi değişkenlerinin  $X \leq_{st} Y$  ve  $X \leq_{hr} Y$  sıralamaları ile ilgili çeşitli çalışmalar yapılmıştır [1,3,5,13,14]. Kochar et al. (1999), aynı boyutlu iid bileşenli tutarlı sistemlerin, sistem imzası ile nasıl karşılaştırıldığını göstermiştir [7]. iid varsayımı, sistemlerin aynı çalışma sahasına indirgenmesinde önemli bir rol oynamaktadır [12]. Bu yüzden çalışmamızda, sistemi oluşturan bileşenlerin iid olduğunu kabul edeceğiz. Bu çalışmada, sistem imzası, vektörel olarak ifade edildiğinden stokastik ve sağkalım hız sıralamasını sadece iki sistem imzası arasında tanımlayacağız.

**Tanım 4.1.** Bir  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in [0,1]^n$  olasılık vektörünün *kuyruk olasılık vektörü*,  $j \in [n]$  için  $v_j = \sum_{i=j}^n a_i$  olmak üzere  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in [0,1]^n$  vektörü ile tanımlanır. Burada,  $v_1 = \sum_{i=1}^n a_i = 1$  dir.

**Tanım 4.2.** *Stokastik sıralama*, iki sistem imzası arasında aşağıdaki şekilde tanımlanabilir;  $\phi_1(\mathbf{x})$  ve  $\phi_2(\mathbf{x})$  sistemlerinin imzaları sırasıyla,  $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \in [0,1]^n$  ve bu sistem imzalarına karşılık gelen kuyruk olasılık vektörleri, sırasıyla,  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in [0,1]^n$  olsun. O zaman,

$$\mathbf{s}_1 \leq_{st} \mathbf{s}_2 \Leftrightarrow \mathbf{v}_1 \leq \mathbf{v}_2 \quad (4.1)$$

önermesi doğrudur<sup>3</sup> [7].

**Tanım 4.3.** Sağkalım hız sıralama, iki sistem imzası arasında aşağıdaki şekilde tanımlanabilir;  $\phi_1(\mathbf{x})$  ve  $\phi_2(\mathbf{x})$  sistemlerinin imzaları sırasıyla,  $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \in [0,1]^n$  ve bu sistem imzalarına karşılık gelen kuyruk olasılık vektörleri, sırasıyla,  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in [0,1]^n$  olsun. O zaman

$$\mathbf{s}_1 \leq_{hr} \mathbf{s}_2 \Leftrightarrow \frac{\mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_1} \text{ oran vektörü azalmayıdır.} \quad (4.2)$$

önermesi doğrudur<sup>4</sup> [7].

**Lemma 4.1.**  $X \leq_{hr} Y \Rightarrow X \leq_{st} Y$  önermesi sağlanır [5].

Kocher et al. (1999), sistem imzası yardımıyla, sistemlerin yaşam sürelerinin, stokastik sıralama ve sağkalım hız sıralama anlamında nasıl sıralandıklarını gösteren aşağıdaki teoremi vermiştir.

**Teorem 4.1.** n boyutlu iid bileşenli iki tutarlı sistemin sistem imzaları sırasıyla,  $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \in [0,1]^n$  olsun. Bu sistemlerin yaşam süreleri sırasıyla,  $T_1$  ve  $T_2$  olmak üzere,

- i.  $\mathbf{s}_1 \leq_{st} \mathbf{s}_2 \Rightarrow T_1 \leq_{st} T_2$
- ii.  $\mathbf{s}_1 \leq_{hr} \mathbf{s}_2 \Rightarrow T_1 \leq_{hr} T_2$

önermeleri sağlanır [7].

Aynı boyutlu tutarlı sistemlerin sistem imzası ile stokastik ve sağkalım hız sıralamaları anlamında karşılaştırılabilirliği gayet kolaydır [7]. Fakat, günlük hayatta karşılaştırılan sistemler farklı boyutlarda olabilir. Farklı boyutlu sistemlerin karşılaştırılabilirliği için sistem imzalarının boyutlarının eşitlenmesi gerekir. Hollander ve Samaniego (2008, s.132, Teorem 2), farklı boyutlu tutarlı sistemlerin yaşam süreleri ile sistem imzaları arasındaki ilişkiyi vermiştir [6]. Çalışmamızda, iid varsayımı altında, 3 ve 4 boyutlu sistem imzalarının 5 boyutlu sistem imzalarına nasıl dönüştürüldüğünü ve bu sistem imzalarının nasıl karşılaştırıldığını inceleyeceğiz. Samaniego (2007),  $[0,1]^n$  olasılık uzayındaki bir sistem imzasının,  $[0,1]^{n+1}$  olasılık uzayındaki karşılığının nasıl bulunduğunu aşağıdaki Teorem ile ifade etmiştir.

<sup>3</sup>  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n), \mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$  ve her  $i \in [n]$  için  $a_i \leq b_i \Leftrightarrow \mathbf{a} \leq \mathbf{b}$  dir .

<sup>4</sup>  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n), \mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$  vektörlerinin oran vektörü  $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \left( \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \frac{a_n}{b_n} \right)$  ile tanımlanır.

**Teorem 4.2.** Aynı F dağılımlı ve bağımsız n bileşenden oluşan tutarlı bir sistemin sistem imzası,  $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in [0,1]^n$  olmak üzere,

$$\mathbf{s}^{[1]} = \left( \frac{n}{n+1} s_1, \frac{1}{n+1} s_1 + \frac{n-1}{n+1} s_2, \dots, \frac{n-1}{n+1} s_{n-1} + \frac{1}{n+1} s_n, \frac{n}{n+1} s_n \right) \quad (4.3)$$

vektörü, aynı F dağılımlı ve bağımsız n+1 bileşenden oluşan tutarlı bir sistemin sistem imzası vektörüdür.  $\mathbf{s}^{[1]}$  sistem imzasına sahip n+1 boyutlu sistem ile  $\mathbf{s}$  sistem imzasına sahip n boyutlu sistemin yaşam sürelerinin dağılımları aynıdır [11].

n>m olmak üzere, m boyutlu bir tutarlı sistemin imzasına, (4.3) eşitliği n-m defa uygulanarak, n boyutlu bir tutarlı sistemin imzası elde edilebilir. Böylece, farklı n ve m boyutlu iki tutarlı sistem stokastik ve sağkalım hız sıralamaları anlamında karşılaştırılabilir. (4.3) dönüşümü, s sistem imzasına k kere uygulandığında elde edilen yeni sistem imzasını  $\mathbf{s}^{[k]}$  ile göstereceğiz.

**Örnek 4.1.** (4.3) ifadesi, 3 boyutlu  $\phi_s$ ,  $\phi_p$  ve  $\phi_1$  sistemlerinin imzalarına iki kere ve 4 boyutlu  $\phi_2$ ,  $\phi_3$ ,  $\phi_4$ ,  $\phi_{2:4;G}$  ve  $\phi_{2:4}$  sistemlerinin imzalarına bir kere uygulanarak, 5 boyutlu sistem imzaları elde edilebilir (Bkz. Tablo 2).

Tablo 2.

	3 boyutlu sistem imzaları	4 boyutlu sistem imzaları	5 boyutlu sistem imzaları
$\phi_s$	$\mathbf{s}_s = (1,0,0)$	$\mathbf{s}_s^{[1]} = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0,0\right)$	$\mathbf{s}_s^{[2]} = \left(\frac{3}{5}, \frac{3}{10}, \frac{1}{10}, 0,0\right)$
$\phi_p$	$\mathbf{s}_p = (0,0,1)$	$\mathbf{s}_p^{[1]} = \left(0,0,\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)$	$\mathbf{s}_p^{[2]} = \left(0,0,\frac{1}{10},\frac{3}{10},\frac{3}{5}\right)$
$\phi_1$	$\mathbf{s}_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)$	$\mathbf{s}_1^{[1]} = \left(\frac{1}{4}, \frac{5}{12}, \frac{1}{3}, 0\right)$	$\mathbf{s}_1^{[2]} = \left(\frac{1}{5}, \frac{3}{10}, \frac{3}{10}, \frac{1}{5}, 0\right)$
$\phi_2$		$\mathbf{s}_2 = \left(\frac{1}{4}, \frac{7}{12}, \frac{1}{6}, 0\right)$	$\mathbf{s}_2^{[1]} = \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{1}{10}, 0\right)$
$\phi_3$		$\mathbf{s}_3 = \left(0, \frac{1}{6}, \frac{7}{12}, \frac{1}{4}\right)$	$\mathbf{s}_3^{[1]} = \left(0, \frac{1}{10}, \frac{3}{10}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$
$\phi_4$		$\mathbf{s}_4 = \left(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$	$\mathbf{s}_4^{[1]} = \left(0, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}, 0\right)$
$\phi_{2:4;G}$		$\mathbf{s}_{2:4;G} = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$	$\mathbf{s}_{2:4;G}^{[1]} = \left(0, \frac{3}{10}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, 0\right)$
$\phi_{2:4}$		$\mathbf{s}_{2:4} = (0,1,0,0)$	$\mathbf{s}_{2:4}^{[1]} = \left(0, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}, 0,0\right)$

Tablo 2’de elde edilen sistem imzalarından 4 boyutlular kendi aralarında ve 5 boyutlular kendi aralarında ve ayrıca, 5 boyutlu Köprü Sistemi ile  $\phi_s$ ,  $\phi_p$ ,  $\phi_1$ ,  $\phi_2$ ,  $\phi_3$ ,  $\phi_4$ ,  $\phi_{2:4;G}$  ve

$\Phi_{2;4}$  sistemleri karşılaştırılabilir. Çalışmamızda yer alan 4 ve 5 boyutlu sistemlerin imzalarına karşılık gelen kuyruk olasılık vektörleri Tablo 3’de verilmiştir.

**Tablo 3.** Sistem İmzalarına Karşılık Gelen Kuyruk Vektörleri

4 boyutlu sistem imzaları	4 boyutlu sistem imzalarına karşılık gelen kuyruk vektörleri	5 boyutlu sistem imzaları	5 boyutlu sistem imzalarına karşılık gelen kuyruk vektörleri
$s_s^{[1]}$	$v_s^{[1]} = (1, \frac{1}{4}, 0, 0)$	$s_s^{[2]}$	$v_s^{[2]} = (1, \frac{2}{5}, \frac{1}{10}, 0, 0)$
$s_p^{[1]}$	$v_p^{[1]} = (1, 1, 1, \frac{3}{4})$	$s_p^{[2]}$	$v_p^{[2]} = (1, 1, 1, \frac{9}{10}, \frac{3}{5})$
$s_1^{[1]}$	$v_1^{[1]} = (1, \frac{3}{4}, \frac{1}{3}, 0)$	$s_1^{[2]}$	$v_1^{[2]} = (1, \frac{4}{5}, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, 0)$
$s_2$	$v_2 = (1, \frac{3}{4}, \frac{1}{6}, 0)$	$s_2^{[1]}$	$v_2^{[1]} = (1, \frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{10}, 0)$
$s_3$	$v_3 = (1, 1, \frac{5}{6}, \frac{1}{4})$	$s_3^{[1]}$	$v_3^{[1]} = (1, 1, \frac{9}{10}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5})$
$s_4$	$v_4 = (1, 1, \frac{1}{3}, 0)$	$s_4^{[1]}$	$v_4^{[1]} = (1, 1, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}, 0)$
$s_{2;4;G}$	$v_{2;4;G} = (1, 1, \frac{1}{2}, 0)$	$s_{2;4;G}^{[1]}$	$v_{2;4;G}^{[1]} = (1, 1, \frac{7}{10}, \frac{3}{10}, 0)$
$s_{2;4}$	$v_{2;4} = (1, 1, 0, 0)$	$s_{2;4}^{[1]}$	$v_{2;4}^{[1]} = (1, 1, \frac{2}{5}, 0, 0)$
		$s_{KS}$	$v_{KS} = (1, 1, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}, 0)$

**Örnek 4.2.** Tablo 3’de elde edilen 4 boyutlu kuyruk vektörleri için, iki vektör arasındaki adi sıralama yardımıyla, Tablo 4 oluşturulabilir.

**Tablo 4.** 4 Boyutlu sistem imzalarının kuyruk vektörlerinin adi sıralaması

$\leq$	$v_p^{[1]}$	$v_1^{[1]}$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_{2;4;G}$	$v_{2;4}$
$v_s^{[1]}$	$v_p^{[1]}$	$v_1^{[1]}$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_{2;4;G}$	$v_{2;4}$
$v_p^{[1]}$		$v_p^{[1]}$	$v_p^{[1]}$	$v_p^{[1]}$	$v_p^{[1]}$	$v_p^{[1]}$	$v_p^{[1]}$
$v_1^{[1]}$			$v_1^{[1]}$	$v_3$	$v_4$	$v_{2;4;G}$	yok
$v_2$				$v_3$	$v_4$	$v_{2;4;G}$	yok
$v_3$					$v_3$	$v_3$	$v_3$
$v_4$						$v_{2;4;G}$	$v_4$
$v_{2;4;G}$							$v_{2;4;G}$

Tablo 4’de (4.1) ve Teorem 4.1.i. göz önüne alınırsa, stokastik sıralama için aşağıdaki önermeler sağlanır;

1. her  $i = s, p, 1, 2, 3, 4, 2: 4: G, 2: 4$  için  

$$v_s^{[1]} \leq v_i^{[1]} \leq v_p^{[1]} \Rightarrow s_s^{[1]} \leq_{st} s_i^{[1]} \leq_{st} s_p^{[1]} \Rightarrow T_s \leq_{st} T_i \leq_{st} T_p,$$
2.  $v_2 \leq v_1^{[1]} \Rightarrow s_2 \leq_{st} s_1^{[1]} \Rightarrow T_2 \leq_{st} T_1,$
3.  $v_1^{[1]} \leq v_3 \Rightarrow s_1^{[1]} \leq_{st} s_3 \Rightarrow T_1 \leq_{st} T_3,$
4.  $v_1^{[1]} \leq v_4 \Rightarrow s_1^{[1]} \leq_{st} s_4 \Rightarrow T_1 \leq_{st} T_4$
5.  $v_1^{[1]} \leq v_{2:4:G} \Rightarrow s_1^{[1]} \leq_{st} s_{2:4:G} \Rightarrow T_1 \leq_{st} T_{2:4:G}$
6.  $v_2 \leq v_3 \Rightarrow s_2 \leq_{st} s_3 \Rightarrow T_2 \leq_{st} T_3$
7.  $v_2 \leq v_4 \Rightarrow s_2 \leq_{st} s_4 \Rightarrow T_2 \leq_{st} T_4$
8.  $v_2 \leq v_{2:4:G} \Rightarrow s_2 \leq_{st} s_{2:4:G} \Rightarrow T_2 \leq_{st} T_{2:4:G}$
9.  $v_4 \leq v_3 \Rightarrow s_4 \leq_{st} s_3 \Rightarrow T_4 \leq_{st} T_3$
10.  $v_{2:4:G} \leq v_3 \Rightarrow s_{2:4:G} \leq_{st} s_3 \Rightarrow T_{2:4:G} \leq_{st} T_3$
11.  $v_{2:4} \leq v_3 \Rightarrow s_{2:4} \leq_{st} s_3 \Rightarrow T_{2:4} \leq_{st} T_3$
12.  $v_4 \leq v_{2:4:G} \Rightarrow s_4 \leq_{st} s_{2:4:G} \Rightarrow T_4 \leq_{st} T_{2:4:G}$
13.  $v_{2:4} \leq v_4 \Rightarrow s_{2:4} \leq_{st} s_4 \Rightarrow T_{2:4} \leq_{st} T_4$  ve
14.  $v_{2:4} \leq v_{2:4:G} \Rightarrow s_{2:4} \leq_{st} s_{2:4:G} \Rightarrow T_{2:4} \leq_{st} T_{2:4:G}.$

Tablo 4’den  $\{\phi_1(x), \phi_{2:4}(x)\}$  ve  $\{\phi_2(x), \phi_{2:4}(x)\}$  sistem ikilileri stokastik sıralamaya göre karşılaştırılmazlar.

**Tablo 5.** 4 Boyutlu sistem imzalarının kuyruk vektörlerinin azalmayan oran vektörleri

$\frac{v_i^{[1]}}{v_s}$	$\frac{v_p}{v_i^{[1]}}$	$\frac{v_p^{[1]}}{v_s^{[1]}}$	$\frac{v_1^{[1]}}{v_2}$	$\frac{v_3}{v_1^{[1]}}$	$\frac{v_{2:4:G}}{v_1^{[1]}}$	$\frac{v_3}{v_2}$	$\frac{v_4}{v_2}$
$\frac{v_{2:4:G}}{v_2}$	$\frac{v_3}{v_4}$	$\frac{v_3}{v_{2:4:G}}$	$\frac{v_3}{v_{2:4}}$	$\frac{v_{2:4:G}}{v_4}$	$\frac{v_4}{v_{2:4}}$	$\frac{v_{2:4:G}}{v_{2:4}}$	

Tablo 5’de yer alan oran vektörleri, her  $i = 1, 2, 3, 4, 2: 4: G, 2: 4$  için bileşen anlamında azalmayan olduğundan, (4.2) ve Teorem 4.1.ii.’den sağkalım hız sıralama için;

$$T_s \leq_{hr} T_i \leq_{hr} T_p, T_2 \leq_{hr} T_1, T_1 \leq_{hr} T_3, T_1 \leq_{hr} T_{2:4:G}, T_2 \leq_{hr} T_3, T_2 \leq_{hr} T_4, \\ T_2 \leq_{hr} T_{2:4:G}, T_4 \leq_{hr} T_3, T_{2:4:G} \leq_{hr} T_3, T_{2:4} \leq_{hr} T_3, T_4 \leq_{hr} T_{2:4:G}, T_{2:4} \leq_{hr} T_4 \text{ ve} \\ T_{2:4} \leq_{hr} T_{2:4:G}$$

elde edilir. Ayrıca,  $\{\phi_1(x), \phi_4(x)\}, \{\phi_1(x), \phi_{2:4}(x)\}$  ve  $\{\phi_2(x), \phi_{2:4}(x)\}$  sistem ikilileri sağkalım hız sıralamasına göre karşılaştırılmazlar. Öte yandan,  $T_1 \leq_{st} T_4$  olmasına rağmen  $T_1 \not\leq_{hr} T_4$  (veya  $T_4 \not\leq_{hr} T_1$ ) dir. Yani; Lemma 4.1’in tersi doğru değildir.

**Örnek 4.3.** Tablo 3’de elde edilen 5 boyutlu kuyruk vektörleri için, iki vektör arasındaki adi sıralama yardımıyla, Tablo 6 oluşturulabilir.

**Tablo 6.** 5 Boyutlu sistem imzalarının kuyruk vektörlerinin adi sıralaması

$\leq$	$v_p^{[2]}$	$v_1^{[2]}$	$v_2^{[1]}$	$v_3^{[1]}$	$v_4^{[1]}$	$v_{2;4;G}^{[1]}$	$v_{2;4}^{[1]}$	$v_{KS}$
$v_s^{[2]}$	$v_p^{[2]}$	$v_1^{[2]}$	$v_2^{[1]}$	$v_3^{[1]}$	$v_4^{[1]}$	$v_{2;4;G}^{[1]}$	$v_{2;4}^{[1]}$	$v_{KS}$
$v_p^{[2]}$		$v_p^{[2]}$	$v_p^{[2]}$	$v_p^{[2]}$	$v_p^{[2]}$	$v_p^{[2]}$	$v_p^{[2]}$	$v_p^{[2]}$
$v_1^{[2]}$			$v_1^{[2]}$	$v_3^{[1]}$	$v_4^{[1]}$	$v_{2;4;G}^{[1]}$	yok	$v_{KS}$
$v_2^{[1]}$				$v_3^{[1]}$	$v_4^{[1]}$	$v_{2;4;G}^{[1]}$	yok	$v_{KS}$
$v_3^{[1]}$					$v_3^{[1]}$	$v_3^{[1]}$	$v_3^{[1]}$	$v_3^{[1]}$
$v_4^{[1]}$						$v_{2;4;G}^{[1]}$	$v_4^{[1]}$	$v_{KS}$
$v_{2;4;G}^{[1]}$							$v_{2;4;G}^{[1]}$	yok
$v_{2;4}^{[1]}$								$v_{KS}$

Tablo 6’da (4.1) ve Teorem 4.1.i. göz önüne alınırsa stokastik sıralama için aşağıdaki önermeler sağlanır;

- a. her  $i = s, p, 1, 2, 3, 4, 2;4;G, 2;4$  için  
 $v_s^{[2]} \leq v_i^{[1]} \leq v_p^{[2]} \Rightarrow s_s^{[2]} \leq_{st} s_i^{[1]} \leq_{st} s_p^{[2]} \Rightarrow T_s \leq_{st} T_i \leq_{st} T_p$
- b.  $v_2^{[1]} \leq v_1^{[2]} \Rightarrow s_2^{[1]} \leq_{st} s_1^{[2]} \Rightarrow T_2 \leq_{st} T_1$ ,
- c.  $v_1^{[2]} \leq v_3^{[1]} \Rightarrow s_1^{[2]} \leq_{st} s_3^{[1]} \Rightarrow T_1 \leq_{st} T_3$ ,
- d.  $v_1^{[2]} \leq v_4^{[1]} \Rightarrow s_1^{[2]} \leq_{st} s_4^{[1]} \Rightarrow T_1 \leq_{st} T_4$
- e.  $v_1^{[2]} \leq v_{2;4;G}^{[1]} \Rightarrow s_1^{[2]} \leq_{st} s_{2;4;G}^{[1]} \Rightarrow T_1 \leq_{st} T_{2;4;G}$
- f.  $v_2^{[1]} \leq v_3^{[1]} \Rightarrow s_2^{[1]} \leq_{st} s_3^{[1]} \Rightarrow T_2 \leq_{st} T_3$
- g.  $v_2^{[1]} \leq v_4^{[1]} \Rightarrow s_2^{[1]} \leq_{st} s_4^{[1]} \Rightarrow T_2 \leq_{st} T_4$
- h.  $v_2^{[1]} \leq v_{2;4;G}^{[1]} \Rightarrow s_2^{[1]} \leq_{st} s_{2;4;G}^{[1]} \Rightarrow T_2 \leq_{st} T_{2;4;G}$
- i.  $v_4^{[1]} \leq v_3^{[1]} \Rightarrow s_4^{[1]} \leq_{st} s_3^{[1]} \Rightarrow T_4 \leq_{st} T_3$
- j.  $v_{2;4;G}^{[1]} \leq v_3^{[1]} \Rightarrow s_{2;4;G}^{[1]} \leq_{st} s_3^{[1]} \Rightarrow T_{2;4;G} \leq_{st} T_3$
- k.  $v_{2;4}^{[1]} \leq v_3^{[1]} \Rightarrow s_{2;4}^{[1]} \leq_{st} s_3^{[1]} \Rightarrow T_{2;4} \leq_{st} T_3$
- l.  $v_4^{[1]} \leq v_{2;4;G}^{[1]} \Rightarrow s_4^{[1]} \leq_{st} s_{2;4;G}^{[1]} \Rightarrow T_4 \leq_{st} T_{2;4;G}$
- m.  $v_{2;4}^{[1]} \leq v_4^{[1]} \Rightarrow s_{2;4}^{[1]} \leq_{st} s_4^{[1]} \Rightarrow T_{2;4} \leq_{st} T_4$
- n.  $v_{2;4}^{[1]} \leq v_{2;4;G}^{[1]} \Rightarrow s_{2;4}^{[1]} \leq_{st} s_{2;4;G}^{[1]} \Rightarrow T_{2;4} \leq_{st} T_{2;4;G}$
- o.  $v_s^{[2]} \leq v_{KS} \leq v_p^{[2]} \Rightarrow s_s^{[2]} \leq_{st} s_{KS} \leq_{st} s_p^{[2]} \Rightarrow T_s \leq_{st} T_{KS} \leq_{st} T_p$
- p.  $v_1^{[2]} \leq v_{KS} \Rightarrow s_1^{[2]} \leq_{st} s_{KS} \Rightarrow T_1 \leq_{st} T_{KS}$

- q.  $v_2^{[1]} \leq v_{KS} \Rightarrow s_2^{[1]} \leq_{st} s_{KS} \Rightarrow T_2 \leq_{st} T_{KS}$
- r.  $v_{KS} \leq v_3^{[1]} \Rightarrow s_{KS} \leq_{st} s_3^{[1]} \Rightarrow T_{KS} \leq_{st} T_3$
- s.  $v_4^{[1]} \leq v_{KS} \Rightarrow s_4^{[1]} \leq_{st} s_{KS} \Rightarrow T_4 \leq_{st} T_{KS}$
- t.  $v_{2;4}^{[1]} \leq v_{KS} \Rightarrow s_{2;4}^{[1]} \leq_{st} s_{KS} \Rightarrow T_{2;4} \leq_{st} T_{KS}$ .

Ayrıca, Tablo 6'dan  $\{\phi_1(x), \phi_{2;4}(x)\}, \{\phi_2(x), \phi_{2;4}(x)\}$  ve  $\{\phi_{2;4;G}(x), \phi_{KS}(x)\}$  sistem ikililerinin stokastik sıralamaya göre karşılaştırılmadığı görülür.

**Tablo 7.** 5 Boyutlu sistem imzalarının kuyruk vektörlerinin azalmayan oran vektörleri

$\frac{v_i^{[1]}}{v_s}$	$\frac{v_p}{v_i^{[1]}}$	$\frac{v_p^{[1]}}{v_s^{[1]}}$	$\frac{v_1^{[2]}}{v_2^{[1]}}$	$\frac{v_3^{[1]}}{v_1^{[2]}}$	$\frac{v_{2;4;G}^{[1]}}{v_1^{[2]}}$	$\frac{v_3^{[1]}}{v_2^{[1]}}$	$\frac{v_4^{[1]}}{v_2^{[1]}}$	$\frac{v_{2;4;G}^{[1]}}{v_2^{[1]}}$
$\frac{v_3^{[1]}}{v_4^{[1]}}$	$\frac{v_3^{[1]}}{v_{2;4;G}^{[1]}}$	$\frac{v_3^{[1]}}{v_{2;4}^{[1]}}$	$\frac{v_{2;4;G}^{[1]}}{v_4^{[1]}}$	$\frac{v_4^{[1]}}{v_{2;4}^{[1]}}$	$\frac{v_{2;4;G}^{[1]}}{v_{2;4}^{[1]}}$	$\frac{v_{KS}^{[1]}}{v_2^{[1]}}$	$\frac{v_3^{[1]}}{v_{KS}^{[1]}}$	$\frac{v_{KS}^{[1]}}{v_{2;4}^{[1]}}$

Tablo 7'de yer alan oran vektörleri, her  $i = 1, 2, 3, 4, 2: 4: G, 2: 4, KS$  için bileşen anlamında azalmayan olduğundan, (4.2) ve Teorem 4.1.ii.'den sağkalım hız sıralama için;

$$T_s \leq_{hr} T_i \leq_{hr} T_p, T_2 \leq_{hr} T_1, T_1 \leq_{hr} T_3, T_1 \leq_{hr} T_{2;4;G}, T_2 \leq_{hr} T_3, T_2 \leq_{hr} T_4, \\ T_2 \leq_{hr} T_{2;4;G}, T_4 \leq_{hr} T_3, T_{2;4;G} \leq_{hr} T_3, T_{2;4} \leq_{hr} T_3, T_4 \leq_{hr} T_{2;4;G}, T_{2;4} \leq_{hr} T_4, \\ T_{2;4} \leq_{hr} T_{2;4;G}, T_2 \leq_{hr} T_{KS}, T_{KS} \leq_{hr} T_3 \text{ ve } T_{2;4} \leq_{hr} T_{KS}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\{\phi_1(x), \phi_4(x)\}, \{\phi_1(x), \phi_{2;4}(x)\}, \{\phi_2(x), \phi_{2;4}(x)\}, \{\phi_1(x), \phi_{KS}(x)\}, \{\phi_4(x), \phi_{KS}(x)\} \text{ ve } \\ \{\phi_{2;4;G}(x), \phi_{KS}(x)\}$$

sistem ikilileri sağkalım hız sıralamasına göre karşılaştırılmazlar. Öte yandan,  $T_1 \leq_{st} T_4$  olmasına rağmen  $T_1 \not\leq_{hr} T_4$  (veya  $T_4 \not\leq_{hr} T_1$ ),  $T_1 \leq_{st} T_{KS}$  olmasına rağmen  $T_1 \not\leq_{hr} T_{KS}$  (veya  $T_{KS} \not\leq_{hr} T_1$ ) ve  $T_4 \leq_{st} T_{KS}$  olmasına rağmen  $T_4 \not\leq_{hr} T_{KS}$  (veya  $T_{KS} \not\leq_{hr} T_4$ ) dir. Yani; Lemma 4.1.'in tersi sağlanmaz.

### 5. Sonuçlar

Çalışmamızda, farklı boyutlu tutarlı sistemlerin sistem imzası ile stokastik ve sağkalım hız anlamında nasıl karşılaştırıldığını inceledik. Aldığımız örneklerde, sistemlerimiz 3, 4 ve 5 bileşenden oluşuyordu, öncelikle bu sistemlerin imzalarını elde ettik. (4.3)'ü, 3 boyutlu sistemlerin sistem imzalarına bir kere uygulayarak, 4 boyutlu ve iki kere uygulayarak, 5



boyutlu sistem imzalarını elde ettik. (4.3)'ü 4 boyutlu sistemlerin sistem imzalarına bir kere uygulayarak 5 boyutlu sistem imzalarını elde ettik. Elde ettiğimiz 4 ve 5 boyutlu sistem imzalarının stokastik sıralamasını elde etmek için sırasıyla, Tablo 4 ve Tablo 6'yı oluşturduk. 8x8 tipindeki Tablo 6'nın ilk 7x7'lik kısmının Tablo 4 ile aynı olduğunu ve dolayısıyla, Tablo 4'den elde edilen 1-14 önermeleri ile Tablo 6'dan elde edilen a-n önermelerinin denk olduğunu gördük.

**Sonuç 5.1.** (4.3) ile sistem imzasının boyutunun değiştirilmesi, imzanın stokastik ve sağkalım hız sıralamadaki yerini değiştirmez. Dolayısıyla, herhangi bir  $\phi_k$  sisteminin  $T_k$  yaşam süresinin de stokastik ve sağkalım hız sıralamadaki yeri değişmez.

**Sonuç 5.2.**  $n > m$  olmak üzere m boyutlu bir sistem imzasına, (4.3) ifadesi, n-m defa uygulanarak n boyutlu bir sistem imzası elde edilebilir. Böylece, farklı boyutlu sistemler sistem imzası yardımıyla, stokastik ve sağkalım hız sıralama anlamında karşılaştırılabilir.

## 6. Kaynaklar

- [1] Barbour, A.D., Lindvall, T., Rogers, L.C.G., Stochastic Ordering of Order Statistics, Journal of Applied Probability, 28 278-286 1991.
- [2] Barlow, R.E., Proschan, F., Statistical Theory of Reliability and Life Testing: Probability Models, s.1-25, Holt, Rinehart and Winston, Inc. New York, 1975.
- [3] Boland, P.J., El-Newehi, E., Proschan, F., Applications of the Hazard Rate Ordering in Reliability and Order Statistics, Journal of Applied Probability, 31 180-192 1994.
- [4] Da, G., Zheng, B., Hu, T., On Computing Signatures of Coherent Systems, Journal of Multivariate Analysis, 103 142-150 2012.
- [5] David, H.A., Nagaraja, H.N., Order Statistics, s.74-76, John Wiley&Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2003.
- [6] Hollander, M., Samaniego, F. J. , On Comparing the Reliability of Arbitrary Systems via Stochastic Precedence, in Advances in Mathematical Modeling for Reliability, T. Bedford, J. Quigley, L. Walls, B. Alkali, A. Daneshkhah and G. Hardman (editors), 129-137, IOS Press, 2008.
- [7] Kochar, S., Mukerjee, H., Samaniego, F.J., The "Signature" of a Coherent System and Its Application to Comparisons Among Systems, Naval Research Logistic 46: 507-523 1999.
- [8] Kuo, W., Zuo, M., Optimal Reliability Modeling: Principles and Applications, s.85-95, John Wiley&Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2003.
- [9] Rausand, M., Hoyland, A., System Reliability Theory: Models, Statistical Methods, and Applications, s.118-133, John Wiley&Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2004.
- [10] Samaniego, F.J., On Closure the IFR Class Under Formation of Coherent Systems, IEEE Trans. Reliab. Theory 34 69-72 1985.
- [11] Samaniego, F.J., System Signatures and Their Applications in Engineering Reliability, s.20-36, Springer Science+Business Media, LLC, 2007.

- [12] Navarro, J., Samaniego, F.J., Balakrishnan, N., Bhattacharya, D., On the Application and Extension of System Signatures in Engineering Reliability, *Naval Research Logistic*, 55 313-327 2008.
- [13] Navarro, J., Shaked, M., Hazard Rate Ordering of Order Statistics and Systems, *Journal of Applied Probability*, 43 391-408 2006.
- [14] Navarro, J., Tail Hazard Rate Ordering Properties of Order Statistics and Coherent Systems, *Naval Research Logistic*, 54 820-828 2007.