Journal of Turkish

Operations Management

Akran grup durumları ve oyun teorisi ile modellenmesi üzerine

Medine Demir[1*], Pınar Usta[2], Zeynep Sırma Alparslan Gök[3*]

[1]Süleyman Demirel Üniversitesi, Fen Edebiyat, Fakültesi, Matematik Bölümü, Isparta, Türkiye e-mail:medinemugla@hotmail.com, ORCID No: http://orcid.org/0000-0002-9543-0753
[2]Isparta Uygulamalı Bilimler Üniversitesi, Teknoloji Fakültesi, İnşaat mühendisliği Bölümü, Isparta, Türkiye
e-mail: pinarusta@isparta.edu.tr, ORCID No: http://orcid.org/0000-0001-9809-3855
[3]Süleyman Demirel Universitesi, Fen Edebiyat, Fakültesi, Matematik Bölümü, Isparta,Türkiye
e-mail: zeynepalparslan@yahoo.com, ORCID No: http://orcid.org/0000-0001-9435-0527

Makale Bilgisi

Makale Geçmişi:
Geliş: 05.05.2023
Revize: 11.01.2024
Kabul: 20.03.2024

Anahtar Kelimeler:

İşbirlikçi Oyun Teorisi,
Yöneylem Araştırması,
Akran Grup Durumları

Özet

Akran grup durumları ve buna bağlı kurulan oyunlar çeşitli ekonomik ve Yöneylem araştırması problemlerinde karşımıza çıkmaktadır. Örneğin ihalelerde koalisyonel davranış çalışıldığı zaman ortaya çıkan işbirlikçi oyunların bir kısıtlanmış sınıfı akran grup oyunları ile ifade edilmektedir. Akran grup durumlarında, organizasyonların sosyal yapılandırması, tüm oyuncu grupların potansiyel olasılıklarını etkilemektedir. Bir hiyerarşide verilen her bir oyuncu bir ya da daha çok oyuncunun yardımıyla doğrudan veya dolaylı olarak lider ile ilişkilidir. Bir oyuncuya ait olan ekonomik olasılık hiyerarşi içerisindeki konumu ile kısıtlanmaktadır. Akran grubundaki oyuncu için önemli olan grup lideri oyuncunun kendisi ve lideri arasında verilen hiyerarşide var olan tüm orta düzeydeki oyuncuların oluşturduğu grup olarak karşımıza çıkmaktadır. Oyuncuların böyle bir grubu akran grup olarak adlandırılmaktadır. Çalışmamızda, öncelikle işbirlikçi oyun teorisi ve akran grup durumlarını içeren bir literatür taraması yapılmıştır. Daha sonra işbirlikçi oyun teorisinin temel kavramları ve çözüm yöntemleri açıklanmıştır. Son olarak, akran grup durumları ve oyun teorisi kullanılarak modellenmesi üzerinde çalışılmış ve bir örnek üzerinde uygulanmıştır. Çalışmada aynı zamanda akran grup oyunlarının gerçek yaşamımızda ihale durumları, sıralama durumları ve havaalanı durumları gibi farklı ekonomik ve yön eylem araştırması durumlarında da kullanılabilir olduğu gösterilmektedir.
.

Peer Group Situations and Modeling with Game Theory

Article Info

Article History:
Received: 05.05.2023
Revised: 11.01.2024
Accepted: 20.03.2024

Keywords

Cooperative Game Theory,
Operations research,
Peer Group Situations

Abstract

Peer group situations and related games appear in various economic and operations research problems. For example, when studying coalition behavior in auctions, a constrained class of cooperative games that emerges is expressed through peer group games. In peer group situations, the social configuration of organizations affects the potential possibilities of all player groups. In a hierarchy, each player is directly or indirectly related to the leader with the help of one or more players. The economic possibilities belonging to a player are constrained by their position in the hierarchy. The important group for a player in a peer group situation consists of the leader, the player itself, and all intermediate players in the given hierarchy between the player and the leader. Such a group of players in a peer group is an important group for the player. In our study, first, a literature review covering cooperative game theory and peer group situations is conducted. Then, the basic concepts and solution methods of cooperative game theory are explained. Finally, work is done on modeling peer group situations using game theory, and an application is made on an example. The study also demonstrates that peer group games can be applicable in various economic and operations research scenarios in real life, such as auction situations, ranking situations, and airport situations.

1. Giriş

Birçok ekonomik durumda, organizasyonun sosyal yapısı, tüm oyuncu gruplarının potansiyel ekonomik olanaklarını etkiler. Bu tür kısıtlamaların ekonomik işbirlikçi davranış üzerindeki sonuçlarını analiz etmek için oyun teorisi bir yaklaşım olarak kullanılmaktadır.

Akran grup durumları, organizasyon içindeki ajanların bir araya gelerek işbirliği yapabilecekleri, iletişim kurabilecekleri veya belirli bir sıralamaya tabi olabilecekleri durumları içerebilir. Bu durumlar genellikle işbirlikçi oyun teorisi veya yöneylem araştırması gibi disiplinlerde incelenir. Akran grup durumları, bir gruptaki sosyal ilişkilerin ve işbirliğinin analizinde önemli bir rol oynar.

Akran grup oyunları, bir organizasyon içindeki oyuncuların bir hiyerarşi içinde düzenlenmiş olduğu durumları ifade eder. Bu durumda, her oyuncu, liderle doğrudan veya dolaylı bir ilişkiye sahiptir, diğer bir deyişle, oyuncular birbirleriyle bir hiyerarşi içinde bağlantılıdır. Akran grup durumları ve ilgili oyunlar, bu hiyerarşik yapı içinde ortaya çıkan işbirliği ve etkileşimleri anlamak için kullanılır.

Özellikle, bir ağaç yapısının oluşturduğu bir hiyerarşide, her bir oyuncunun akran grubu, ağacın kökü ile oyuncunun düğümünü birleştiren yoldaki diğer oyunculardan oluşur.

Bir hiyerarşide her oyuncu, lider oyuncuyla doğrudan veya dolaylı olarak bir ilişkiye sahiptir. Bu ilişki bir veya daha fazla başka oyuncunun yardımıyla gerçekleşebilir. Bir oyuncu için önemli olan grup, lider, ajanın kendisi ve verilen hiyerarşide bulunan tüm ara oyunculardan oluşur. Oluşan bu gruba akran grup denir. Hiyerarşi, liderin kökünde bulunan bir liderle başlayan, her diğer oyuncunun farklı bir düğümde konumlandığı köklü bir yönlendirilmiş ağaç ile tanımlanabilir. Her oyuncunun akran grubu, o oyuncuyu liderle birleştiren yol üzerinde bulunan diğer oyuncuya karşılık gelir.

Literatürde akran grup oyunları ile ilgili çeşitli çalışmalar yapılmıştır (Branzei vd. (2002); Branzei vd. (2010); (Alparslan Gök vd., 2018). Akran grup durumlarını işbirlikçi oyun teorisi ile ele alan ilk çalışma Branzei vd. (2002)' dir. Açık arttırmalar gibi farklı ekonomik durumların, iletişim, sıralama ve akış durumları gibi farklı yöneylem araştırması durumlarının akran grup oyunları ile ilişkili olduğu bu çalışmada gösterilmiştir. Branzei vd. (2010) akran grup oyunlarını aralık belirsizliği altında incelemiş, konu ile ilgili çözüm yöntemleri geliştirmiştir. Alparslan Gök vd., (2018) ise akran grup oyunlarını gri sayılar kullanarak incelemiştir. Akran grup oyunlarının teorik altyapısını oluşturan işbirlikçi oyun teorisi ve ön eylem araştırması durumlarını içeren bazı literatür çalışmaları arasında Deng ve Papadimitriou (1994); Gilles vd., (1992); Myerson, (1977) ve Owen (1986) verilebilir.

Bu çalışmada Akran durum durumları ve buna bağlı kurulan oyunlar çeşitli ekonomik ve Yöneylem araştırmasına yönelik problemler ele alınmıştır. Çalışmanın geri kalanı şu şekildedir; İkinci bölümde İşbirlikçi oyun teorisinin temel kavramlarından bahsedilmiş ve çeşitli örnekler verilmiştir. Üçüncü bölüm akran grup durumları ve oyun teorisi ile modellenmesi üzerinedir. Bu kısımda akran grup oyunlarını içeren örnekler verilmiştir. Dördüncü bölüm akran grup oyunlarının ekonomik ve yön eylem araştırması uygulamalarına yöneliktir. Çalışma sonuç bölümü ile tamamlanmaktadır, bu kısımda akran grup durumlarının oyun teorisiyle modellenmesi ile ilgili yorumlar yapılarak gelecekte çalışılabilecek konular hakkında bilgi verilmiştir.

2. İşbirlikçi Oyun Teorisi

İşbirlikçi Oyun Teorisine ait başlıca temel kavramlar bu bölümde ele alınacaktır. Shapley, (1953); Curiel, (1997); Tijs, (2003); Branzei, (2008) ait çalışmalarda İşbirlikçi Oyun Teorisine ait detaylı bilgiler bulunmaktadır.

Modelde oyuncu kümesi ve oyunculara ait kazanç veya maliyetleri gösteren karakteristik bir fonksiyon bulunmaktadır. Burada oyuncular içerisinde koalisyon yapılmakta ve oyun kurulduktan sonraki kazançların ya da maliyetlerin adil bir şekilde nasıl dağıtılacağı incelenmektedir.

Tanım 2.1 n -kişilik bir işbirlikçi oyun $< N, v >$ ikilisinden oluşur. Burada $N = \{1,2, \dots, n\}$ oyuncu kümesi $v{:}2^{N} \rightarrow \mathbb{R}$ karakteristik fonksiyondur. Karakteristik fonksiyon $\forall\ S \subset N$ koalisyonunu bir reel sayıya götürmektedir. Yani $\forall\ S \in 2^{N}$ için $v(S)$ koalisyonunun değeridir ve $v(\emptyset) = 0$ olarak tanımlıdır.

Örnek 2.1 (Eldiven Oyunu) Oyuncuların kümesi $N = \{1,2,3\}$ olmak üzere $L = \{1\}$ ve $R = \{2,3\}$ olsun. L kümesinin elemanlarının sol el eldiven imal ettiği R kümesinin elemanlarının ise sağ el eldiven imal ettiği bilinmektedir. Tek el eldiven imal etmenin maliyeti sıfır iken, çift eldiven imalatının bedeli ise 10 TL olduğu bilindiği üzere $< N, v >$ oyunu

S	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$v(S)$	0	0	0	0	10	10	0	10

şeklinde modellenir (Tijs, (2003)).

Bütün koalisyonların oluşturulmasına bağlı olarak, elde edilen kazancın veya maliyetin hangi şekilde paylaştırılacağı İşbirlikçi Oyun Teorisine ait en temel problemlerden biridir. Buradaki çözüm kavramlarına; von Neumann (1928) 'ın bulduğu "von Neumann çözümü", von Neumann (1944)'ın ürettiği "kararlı kümeler", Shapley (1953)'nin ürettiği "Shapley değeri" örnek olarak gösterilebilir. Bu şekildeki bir işbirlikçi Oyun Teorisinde çözüm kavramı, asgari olarak bir $x = (x_i) \in \mathbb{R}^N$ ödeme vektörüne karşılık gelir. İşbirlikçi Oyun Teorisindeki çözüm kavramlarını daha iyi anlamak için aşağıdaki tanımlara değinilmelidir.

Shapley değeri için önce marjinal katkı vektörünün tanımı verilmelidir.

Tanım 2.2 (Marjinal Katkı) $v\in G^{\mathrm{N}}$ ve $\sigma \in \pi(N)$ olsun. $v\in m^{\sigma}(v) \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ marjinal katkı vektörü, $\forall\, i \in N$ için,

$m_i^{\sigma}(v) \coloneqq v(P^{\sigma}(i) \cup \{i\}) - v(P^{\sigma}(i))$ ile gösterilir.

Tanım 2.3 (Shapley değeri) $\boldsymbol{v}\in G^{\mathrm{N}}$ oyununun Shapley değeri olan $\Phi(v)$, bir oyunun marjinal vektörlerinin ortalamasıdır. Yani, $\Phi(v)=\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\pi(N)} m^{\sigma}(v)$ dir.

Bu denklem dikkate alındığında, Shapley değerinin olasılık yorumu yapılabilir. $\pi(N)$**'**nin elemanlarının içinde bulunduğu bir torbadan bir permütasyonu $\frac{1}{n!}$ olasılıkla çekebilir. Bu durumda, oyuncular odaya σ permütasyonu sırasında bir bir girer ve her oyuncu odaya marjnal katkıda bulunur. Shapley değeri
$\Phi\,(v)=\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\pi(N)}(v(P^{\sigma}(i) \cup \{i\}) - vP^{\sigma}(i))$ formülü ile de ifade edilir.

Örnek 2.2 Üç kişilik $< N, v >$ oyunu ve oyunun karakteristik fonksiyonları aşağıda gösterildiği gibi olsun.

S	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$v(S)$	0	0	0	0	6	18	12	18

Bu durumda Shapley değeri hesabı için önce marjinal katkı vektörleri Tablo 1'de gösterilmiştir.

Tablo 1. Marjinal vektörler

σ	$m_1{}^{\sigma}(v)$	$m_2{}^{\sigma}(v)$	$m_3{}^{\sigma}(v)$
$\sigma_{1=.}$ (1,2,3)	0	6	12
$\sigma_{2=.}$ (1,3,2)	0	0	18
$\sigma_{3=.}$ (2,1,3)	6	0	12
$\sigma_{4=.}$ (2,3,1)	6	0	12
$\sigma_{5=.}$ (3,1,2)	18	0	0
$\sigma_{6=.}$ (3,2,1)	6	12	0

$\Phi(v)=\frac{1}{3!}\sum_{\sigma\in\pi(3)} m^{\sigma}(v)$= (5,3,9) olarak bulunur.

Tanım 2.4 (Banzhaf değeri) 1965 yılında Banzhaf (1965)'ın bulduğu değer $\beta(v)$ ile gösterilir. $\forall\ i \in N$ ve $v \in G^N$ için
$\beta: G^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ olmak üzere $\beta_i(v) = \frac{1}{2^{|N|-1}} \sum_{i \in S} v(S) - v(S \setminus \{i\})$ ile tanımlanır.

Uyarı: Bundan sonraki kısımlarda kolaylık açısından $v(\{i,j\})$ notasyonu yerine $v(ij)$ notasyonu kullanılacaktır.

Örnek 2.3 Oyuncuların kümesi $N = \{1,2,3\}$, $v \in G^N$ olmak üzere koalisyon değerleri

S	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$v(S)$	0	0	0	0	20	8	0	28

olarak verilsin. Buna göre bu oyunun $\beta(v)$ değeri;

$$\beta_i(v) = \frac{1}{2^{|N|-1}} \sum_{i \in S} (v(S) - v(S \setminus \{i\}))$$
$$\beta_1(v) = \frac{1}{2^2} \sum_{1 \in S} (v(S) - v(S \setminus \{1\}))$$
$$= \frac{1}{2^2} (v(1) + v(12) - v(2) + v(13) - v(3) + v(123) - v(23))$$
$$= 14$$
$$\beta_2(v) = \frac{1}{2^2} \sum_{2 \in S} (v(S) - v(S \setminus \{2\}))$$
$$= \frac{1}{2^2} (v(2) + v(12) - v(1) + v(23) - v(3) + v(123) - v(13))$$
$$= 10$$
$$\beta_3(v) = \frac{1}{2^2} \sum_{3 \in S} (v(S) - v(S \setminus \{3\}))$$
$$= \frac{1}{2^2} (v(3) + v(13) - v(1) + v(23) - v(2) + v(123) - v(12))$$
$$= 4$$

$\beta(v) = (14,10,4)$ olarak bulunur.

Tanım 2.5 (Kısıt kümesinin ağırlık merkezi çözümü) CIS değerini Driessen ve Funaki (1991) bulmuştur.
$\forall v \in G^N, \forall i \in N$ için $CIS : G^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ olmak üzere $CIS_i(v) = v(\{i\}) + \frac{1}{|N|} (v(N) - \sum_{j \in N} v(\{j\}))$ olarak tanımlanır.

Örnek 2.4 Oyuncuların kümesi $N = \{1,2,3\}$, $v \in G^N$ olmak üzere koalisyon değerleri de

S	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$v(S)$	0	2	2	5	3	1	2	15

olarak verilsin. Bu oyunun $CIS(v)$ değeri;

$$CIS_i(v) = v(i) + \frac{1}{|N|} (v(N) - \sum_{j \in N} v(j))$$
$$CIS_1(v) = v(1) + \frac{1}{3} (v(123) - (v(1) + v(2) + v(3)))$$
$$= 4$$
$$CIS_2(v) = v(2) + \frac{1}{3} (v(123) - (v(1) + v(2) + v(3)))$$
$$= 4$$
$$CIS_3(v) = v(3) + \frac{1}{3} (v(123) - (v(1) + v(2) + v(3)))$$
$$= 7$$

$CIS(v) = (4,4,7)$ olarak bulunur.

Tanım 2.6 (Eşitlikçi Bölünemeyen katkı değeri) $ENSC$-değerini Driessen ve Funaki (1991) bulmuştur. Bu değer CIS-değerinin duali olarak tanımlanmaktadır. Yani $\forall\ v, v* \in G^N$ ve $v*$, v nin dual oyunu olsun.

$ENSC(v) = CIS(v*)$ olur.

Bir oyunun duali

$\forall\, v, v* \in G^{N}$ ve $\forall\, S \in 2^{N}$ için, $v^{*}(S) = v(S) - v(N \setminus S)$ dir.

Önerme 2.1 $\forall\, S \in 2^{N}$ için $ENSC: G^{N} \rightarrow \mathbb{R}^{N}$ olup $\forall\, i \in N$ için

$ENSC_{i}(v) = -v(N\backslash\{i\}) + \frac{1}{|N|}(v(N) + \sum_{j\in N} v(N\backslash\{j\}))$

olur.

Örnek 2.5 Oyuncuların kümesi $N = \{1,2,3\}$, $v \in G^{N}$ ve koalisyon değerleri de

S	$\emptyset$	{1}	{2}	{3}	{1,2}	{1,3}	{2,3}	{1,2,3}
$v(S)$	0	3	2	0	8	4	5	7

olarak verilsin. Buna göre $ENSC(v)$ değeri;

$ENSC_{i}(v) = -v(N\backslash\{i\}) + \frac{1}{|N|}(v(N) + \sum_{j\in N} v(N\backslash\{j\}))$

$ENSC_{1}(v) = -v(23) + \frac{1}{3}(v(123) + v(12) + v(13) + v(23))$

$= 3$

$ENSC_{2}(v) = -v(13) + \frac{1}{3}(v(123) + v(12) + v(13) + v(23))$

$= 4$

$ENSC_{3}(v) = -v(12) + \frac{1}{3}(v(123) + v(12) + v(13) + v(23))$

$= 0$

$ENSC(v) = (3,4,0)$ olarak bulunur.

Tanım 2.7 (Eşit Dağıtım Değeri) ED-değeri oyunculara büyük koalisyonu eşit olarak paylaştıran ED-değeri $\forall\, i \in N$ için, $ED: G^{N} \rightarrow \mathbb{R}^{N}$ için $EDi(v) = \frac{1}{|N|} v(N)$ olarak tanımlanır.

Örnek 2.6 Oyuncuların kümesi $N = \{1,2,3\}$ ve koalisyon değerleri de

S	$\emptyset$	{1}	{2}	{3}	{1,2}	{1,3}	{2,3}	{1,2,3}
$v(S)$	0	4	2	0	5	3	2	9

olsun. Bu oyunun ED -değeri

$$EDi(v) = \frac{1}{|N|} v(N)$$

$ED_{1}(v) = \frac{1}{3} v(123) = 3$

$ED_{2}(v) = \frac{1}{3} v(123) = 3$

$ED_{3}(v) = \frac{1}{3} v(123) = 3$ olup

$ED(v) = (3,3,3)$ olarak bulunur.

3. Akran Grup Durumlarının Oyun Teorisi ile Modellenmesi

Bu bölümde kısaca modellemede kullanılacak akran grup durumları hakkında bilgi verilecektir.

Sosyal özellikler, oyuncuların ilişkilerini tanımlayan sıkı bir hiyerarşi ile sunulsun. Sunulan bu tür bir hiyerarşide, 1 oyuncusu kök (lider) olacak şekilde sosyal oyuncuların kümesi (düğüm kümesi) $N = \{1,2, \dots, n\}$, sonlu bir küme olsun. Kök ve düğüm noktalarında bulunan diğer oyuncular, bir köklü yönlendirilmiş T ağacı tarafından tanımlanabilir. Köklü yönlendirilmiş bir T ağacı ile, ayırt edici bir düğümü kök olarak içeren yönlendirilmiş bir graf kastedilir. Graf bulunan bütün düğümler için kökten o düğüme yönlendirilmiş bir tek yol vardır. Şekil 1 de beş oyuncunun yer aldığı böyle bir ağaç gösterilmiştir.

Bir hiyerarşide her oyuncu lideri lider oyuncu ile doğrudan ya da olaylı olarak bir veya daha fazla oyuncunun yardımı içeren bir ilişkiye sahiptir. Bu durumda bir oyuncu için önemli olan grup lider oyuncunun kendisi ve verilen hiyerarşide var olan tüm ara oyunculardan (Akran grup) oluşur. Hiyerarşi lider oyuncu ile diğer oyuncuların farklı bir düğümde bulunduğu bir köklü yönlendirilmiş ağaç ile açıklanabilir. Her oyuncunun akran grubu oyuncuyu lider ile bağlayan yol üzerinde bulunan oyunculara karşılık gelir.

Zincir benzeri hiyerarşiler, graflar veya zincirlerle temsil edilecektir. Bir graf veya zincir ile, düğümleri tek bir yönlendirilmiş yol üzerinde bulunan bir ağacı ifade ederiz.

Akran grup durumlarında, N = {1, 2, ..., n} oyuncuların kümesi olmak üzere, bu küme üzerinde düğümleri bir yönlü graf olan T tarafından verilen hiyerarşik bir ilişkiyi ele alırız. Her oyuncu, bir düğümde yer alır ve her düğümden köke doğru tek bir yönlü yol bulunacak şekilde yerleştirilir. Eğer tüm düğümler tek bir yönlü yol üzerinde yer alıyorsa bir zincirimiz vardır, denir.

Her ağaç bağlantılı olduğu akran grubun durumuna ve o grubun oluşturduğu koalisyona ait olan üyelerin bireysel ekonomik olanaklarını birleştirerek tanımlanmasıyla ilişkilendirilebilir. Bu sayede bir akran grup oyunu oluşturmak mümkündür.

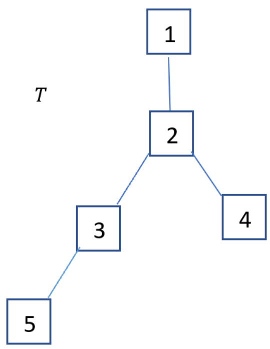
Bireysel özellikler, oyuncuların potansiyel ekonomik olanaklarını tanımlayan bir a vektörüyle açıklanmaktadır. Burada a_i, oyuncu i 'nin lider oyuncusunun onunla işbirliği yaparsa elde edilebilecek kazançtır.

T-bağlantılı akran grup durumu verildiğinde karşılık gelen akran grup oyunu $< N, v >$ olup, $v(S) = \sum_{i:P(i)\subset S} a_i$, $\forall S \subset N$; $v(\emptyset) = 0$ dır. Eğer $1 \notin S$ ise $v(S) = 0$ dır.

Her $i \in N$ oyuncu için 1'den i ye bağlı T nin yolunda tüm oyuncuların oluşturduğu N nin alt kümesi i oyuncusunun T-bağlantılı akran grubu olarak adlandırılır ve $[1, i]$ ile gösterilir. Eğer i oyuncusunun akran gruplarının diğer tüm üyeleri i oyuncusu ile işbirliği içinde ise yalnızca i oyuncusu etkili olabilir. Akran grup durumları sonucunda modellenen oyunda koalisyonların büyük koalisyonun $(v(N)$)değerinden kazanç sağlaması hedeflenir.

Örnek 3.1 Şekil 1 de T ağacına karşılık gelen tüm akran gruplarının kümesi

$[1,1] = \{1\}$, 1 den 1 e bağlı T yolundaki tüm temsilcilerin oluşturduğu küme,
$[1,2] = \{1,2\}$, 1 den 2 ye bağlı T yolundaki tüm temsilcilerin oluşturduğu küme,
$[1,3] = \{1,2,3\}$, 1 den 3 e bağlı T yolundaki tüm temsilcilerin oluşturduğu küme,
$[1,4] = \{1,2,4\}$, 1 den 4 e bağlı T yolundaki tüm temsilcilerin oluşturduğu küme,
$[1,5] = \{1,2,3,5\}$, 1 den 5 e bağlı T yolundaki tüm temsilcilerin oluşturduğu küme,



Şekil 1. T Ağacına ait bir akran grubu durumu örneği

karşılık gelen akran grup oyunu

$$\boldsymbol{v}(\{1\}) = \boldsymbol{v}(\{1,3\}) = \boldsymbol{v}(\{1,4\}) = \boldsymbol{v}(\{1,5\}) = \boldsymbol{v}(\{1,3,4\}) = \boldsymbol{v}(\{1,3,5\}) = \boldsymbol{v}(\{1,4,5\}) = \boldsymbol{v}(\{1,3,4,5\}) = \boldsymbol{a_1};$$
$$\boldsymbol{v}(\{1,2\}) = \boldsymbol{v}(\{1,2,5\}) = \boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2};\ \boldsymbol{v}(\{1,2,3\}) = \boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2} + \boldsymbol{a_3}; \boldsymbol{v}(\{1,2,4\}) = \boldsymbol{v}(\{1,2,4,5\}) = \boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2} + \boldsymbol{a_4};$$
$$\boldsymbol{v}(\{1,2,3,4\}) = \boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2} + \boldsymbol{a_3} + \boldsymbol{a_4}; \boldsymbol{v}(\{1,2,3,5\}) = \boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2} + \boldsymbol{a_3} + \boldsymbol{a_5}; \boldsymbol{v}(\boldsymbol{N}) = \boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2} + \boldsymbol{a_3} + \boldsymbol{a_4} + \boldsymbol{a_5};$$

aksi takdirde $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{S}) = \boldsymbol{0}$ ile verilir (Yücesan, (2017); Tijs, (2003)).

Örnek 3.2 Koalisyon değerleri,

$v(1) = 25$, $v(2) = 0$, $v(3) = 0$, $v(1,2) = 35$, $v(1,3) = 25$, $v(2,3) = 0$, $v(1,2,3) = 40$ şeklindedir. Bu oyuna ait sırasıyla Shapley değeri, Banzhaf değeri, CIS değeri, $ENSC$ değeri ve ED çözümünü bulalım.

Şimdi marjinal vektörleri tabloda gösterelim:

Tablo 2. Marjinal vektörler

σ	$m_1^\sigma(v)$	$m_2^\sigma(v)$	$m_3^\sigma(v)$
σ_1=.(1,2,3)	25	10	5
σ_2=.(1,3,2)	25	15	0
σ_3=.(2,1,3)	35	0	5
σ_4=(2,3,1)	40	0	0
σ_5=(3,1,2)	25	15	0
σ_6=(3,2,1)	40	0	0

Shapley değeri:

$\Phi(v)= \frac{1}{3!}\sum_{\sigma\in\pi(3)} m^\sigma(v) = \frac{1}{3}(85,20,5)$ olarak bulunur.

Banzhaf değeri:

$$\beta_i(v)= \frac{1}{2^{|N|-1}} \sum_{i\in S}(v(S) - v(S\backslash\{i\}))$$
$$\beta_1(v)= \frac{1}{2^2} \sum_{1\in S}(v(S) - v(S\backslash\{1\}))$$
$$= \frac{1}{2^2}(v(1) + v(12) - v(2) + v(13) - v(3) + v(123) - v(23))$$
$$=\frac{125}{4}$$
$$\beta_2(v)= \frac{1}{2^2} \sum_{2\in S}(v(S) - v(S\backslash\{2\}))$$
$$= \frac{1}{2^2}(v(2) + v(12) - v(1) + v(23) - v(3) + v(123) - v(13))$$
$$=\frac{25}{4}$$
$$\beta_3(v)= \frac{1}{2^2} \sum_{3\in S}(v(S) - v(S\backslash\{3\}))$$
$$= \frac{1}{2^2}(v(3) + v(13) - v(1) + v(23) - v(2) + v(123) - v(12))$$
$$=\frac{5}{4}$$

$\beta(v)=(\frac{125}{4}, \frac{25}{4}, \frac{5}{4})$ olarak bulunur.

CIS değeri:

$CIS_i(v) = v(\{i\}) + \frac{1}{|N|}(v(N) - \sum_{j\in N} v(\{j\}))$

$CIS_1(v) = v(1) + \frac{1}{3}(v(123) - (v(1) + v(2) + v(3)))$

$= 30$

$CIS_2(v) = v(2) + \frac{1}{3}(v(123) - (v(1) + v(2) + v(3)))$

$=5$

$CIS_3(v) = v(3) + \frac{1}{3}(v(123) - (v(1) + v(2) + v(3)))$

$=5$

$CIS(v)$=(30,5,5) olarak bulunur.

$ENSC$ değerini hesaplayalım:

$ENSC_i(v) = -v(N\backslash\{i\}) + \frac{1}{|N|}(v(N) + \sum_{j\in N} v(N\backslash\{j\}))$

$ENSC_1(v) = -v(23) + \frac{1}{3}(v(123) + v(12) + v(13) + v(23))$

$= \frac{100}{3}$

$ENSC_2(v) = -v(13) + \frac{1}{3}(v(123) + v(12) + v(13) + v(23))$

$= \frac{25}{3}$

$ENSC_3(v) = -v(12) + \frac{1}{3}(v(123) + v(12) + v(13) + v(23))$

$= -\frac{5}{3}$

$ENSC(v)$=$(\frac{100}{3}, \frac{25}{3}, -\frac{5}{3})$ olarak bulunur.

ED çözümü;

$EDi(v) = \frac{1}{|N|}v(N)$

$ED_1(v) = \frac{1}{3}v(123) = \frac{40}{3}$

$ED_2(v) = \frac{1}{3}v(123) = \frac{40}{3}$

$ED_3(v) = \frac{1}{3}v(123) = \frac{40}{3}$ olup

$ED(v) = (\frac{40}{3}, \frac{40}{3}, \frac{40}{3})$ olarak bulunur.

Tablo 3. Akran Grup Durumlarının Oyun Teorisi Modellenmesi ile İlgili Çözümler

Çözümler	Oyuncu 1	Oyuncu 2	Oyuncu 3	Vektörel Gösterim
Shapley değeri	$\frac{85}{3}$	$\frac{20}{3}$	$\frac{5}{3}$	(28.333,6.666,1.666)
Banzhaf değeri	$\frac{125}{4}$	$\frac{25}{4}$	$\frac{5}{4}$	(31.25,6.25,1.25)
***CIS*-değeri**	30	5	5	(30,5,5)
***ENSC*-değeri**	$\frac{100}{3}$	$\frac{25}{3}$	$-\frac{5}{3}$	$(33.333, 8.333, -1.666)$
***ED*-çözümü**	$\frac{40}{3}$	$\frac{40}{3}$	$\frac{40}{3}$	(13.333,13.333,13.333)

Tablo 3 incelendiğinde 1. Oyuncu için en iyi kazanç ENSC değeri, 2. Oyuncu ve 3. Oyuncu için ise ED değeri ile elde edilir. Mevcut koşullar gereği ED çözümü adaletti sağlamadığından tercih edilmeyecektir. ENSC değeri ise 3. Oyuncuya maliyet çıkaracağından tercih edilmeyecektir. Sonuç olarak oyuncuların adeti sağlayan Shapley, Banzhaf veya CIS arasından tercih yapması beklenir.

4. Akran Grup Durumları ile İlişkili Ekonomik ve Yöneylem Araştırması Durumları

Bu bölümde akran grup durumlarının bazı uygulamaları olan ihale durumları, sıralama durumları ve havaalanı durumları ele alınacaktır (Branzei vd., 2010).

4.1 İhale Durumları

Gizli teklif ikinci fiyat ihale durumlarında (Rasmusen, 1989) ihaleye giren ve bir rezervasyon fiyatına sahip nesneyi en düşük fiyatla satın almak isteyen bir r satıcısı vardır. Bir zarfta $b_1, b_2, \ldots, b_n$ tekliflerinin her birini veren $1,2,\ldots,n$ şeklinde n tane satıcı (oyuncu) olduğunu kabul edelim. Zarflar açıldıktan sonra en yüksek teklifi veren teklifçi, ikinci en yüksek teklifin fiyatındaki nesneyi alır. ω_i, diğer oyuncular tarafından bilinmesi gerekmeyen nesnenin i oyuncusu için değeri olsun.

$$\omega_1 > \omega_2 > \cdots > \omega_n \geq r$$

olduğu kabul edilsin. Eğer i oyuncusu yalnız başına davranırsa kendi değerini teklif ederken onun için optimal olduğu dikkate alınmalıdır. Bu durumda $b_i = \omega_i$ dir. Bu, eğer $i \neq 1$ ise $v(\{i\}) = 0$ ve 1 oyuncusu için $v(\{1\}) = \omega_1 - \omega_2$ ödemesine sebep olur. Çünkü 1 oyuncusu ω_2 fiyatı için nesneyi elde eder. Eğer $N = \{1,2,\ldots,n\}$ deki tüm oyuncular işbirliğine karar verirlerse, bir baskın strateji; 1 oyuncusu $b_1 = \omega_1$ ve diğerleri r yi teklif etmektedir. Böylece eğer $i \in N\backslash\{1\}$ ise $b_i = r$ dir. O zaman amaç r fiyatında 1 oyuncuya gitmek ve N ye $v(N) = \omega_1 - r$ ödemek anlamına gelmektedir. Eğer $S \neq N$ koalisyonu (gizli veya değil) birlikte çalışırsa, onlar en yüksek değere sahip S deki oyuncuyu ortaya çıkarırlar. Eğer bu $i(S)$ oyuncu ise o $\omega_{i(S)}$ yi teklif eder ve diğerleri r yi teklif eder. Bu S için bir baskın teklif stratejisidir. Ayrıca $N\backslash S$ de diğer oyuncuların (ve gruplar) da baskın teklif stratejisi oynadığı kabul edilirse iki durum düşünülebilir.

Durum 1. 1 oyuncusu S de değildir. Böylece $i(S) \neq 1$ dir. O zaman nesne, $N\backslash S$ de oyuncu 1 (ya da 1 in ait olduğu grup) e gider. S nin $v(S)$ değeri 0 durumundadır.

Durum 2. 1 oyuncusu, S dedir. O zaman en yüksek teklifi ω_1 dir ve eğer $[1,k] \subset S$ ve $k+1 \notin S$ ise ikinci en yüksek teklif ω_{k+1} dır ($i = 2,\ldots,k$ için $b_i = r$). Bu durumda S koalisyonunun değeri $v(S) = \omega_1 - \omega_{k+1}$ dır. Çünkü 1 oyuncusu ω_{k+1} fiyatındaki nesneyi alır.

Örnek 4.1 Bir gizli teklif ikinci fiyat ihalesinde nesne için sırasıyla 100,80,50 değerleri ile üç teklifin var olduğu ve rezervasyon ücretinin de 25 olduğu kabul edilsin. O zaman karşılık gelen akran grup oyunu,

$$\begin{aligned} v &= (\omega_1 - \omega_2)u_{[1,1]} + (\omega_2 - \omega_3)u_{[1,2]} + (\omega_3 - \omega_4)u_{[1,3]} \\ &= (100-80)u_{[1,1]} + (80-50)u_{[1,2]} + (50-25)u_{[1,3]} \\ &= 20u_{\{1\}} + 30u_{\{1,2\}} + 25u_{\{1,2,3\}} \end{aligned}$$

eşittir. Eğer bütün teklif sahipleri beraber çalışırsa, 1. teklifçi 100 teklif eder, 2. ve 3. teklifçiler 25 teklif eder. Böylece nesne, 25 ödeyen, 1. oyuncuya gider.

4.2. Sıralama Durumları

Bir sıralama durumu (Curiel vd., 1989), (σ_0, p, α_i) şeklinde bir üçlüdür. Burada σ_0, başlangıçta verilen sıralama $p_i > 0$ ile $p = (p_i)_{i\in N}$, i müşterisinin işi bitirmesi için gerek duyduğu zaman ve $N = \{1,2,\ldots,n\}$ hizmet bekleyen müşterilerin kümesidir. $\propto = (\alpha_i)_{i\in N} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ dir ve burada α_i, i için birim zaman başına düşen maliyettir. i nin aciliyet indeksi $u_i = p_i^{-1}\alpha_i$ ile verilir. Müşterileri onların acilliğine göre sıralamak en uygun olandır (Smith, 1956) ve bu düzenleme, komşular arasında gerçekleşir. Karşılık gelen maliyet tasarruf oyunu, komşuların

$$\boldsymbol{v} = \sum_{(k,l),k<l} \boldsymbol{g}_{k,l}\, \boldsymbol{u}_{[k,l]}$$

değişimi üzerinde oybirliği oyunlarının bir negatif olmayan kombinasyonudur. Burada

$\boldsymbol{g_{k,l} = (p_k\alpha_1 - p_1\alpha_k)_+}$

yani,

$\boldsymbol{g_{k,l} = maks\{0, p_k\alpha_1 - p_1\alpha_k\}}$

dır.

Ayrıca bazı sıralama durumları akran grup oyunlarına yol açar. $\boldsymbol{n}$ müşterinin $\boldsymbol{\sigma_0 = (1, 2, \ldots, n)}$ ilk siparişinde özel sıralama durumları, zorunlu indeksler arasında

$$\boldsymbol{u_2 > u_3 > \cdots > u_n} \tag{5.1}$$

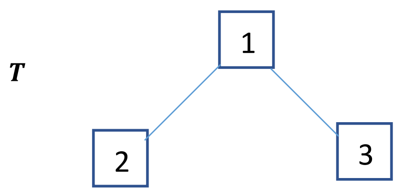
ilişkileri olacak şekilde düşünülecek. $\boldsymbol{(5.1)}$' in sağlandığı durumda, en uygun sipariş yalnızca $\boldsymbol{1}$ ve bazı diğer müşteriler arasındaki komşu anahtarlar tarafından elde edilir; Bu $\boldsymbol{k \neq 1}$ ile tüm $\boldsymbol{g_{k,l}}$ sıfır olduğu anlamına gelir. Böylece, düşünülen sıralama durumları

$$\boldsymbol{v = \sum_{i=2}^{n} g_{1,i}\, u_{[1,i]}}$$

formunda akran grupları meydana getirir. Burada $\boldsymbol{g_{1,i} = (p_1\alpha_i - p_i\alpha_1)_+}$ dır.

Böyle bir akran grup oyunu, $\boldsymbol{T}$-bağlantılı akran grubu durumu $\boldsymbol{<. N, P, \alpha>}$ ya karşılık gelir. Öyle ki $\boldsymbol{T}$, sıralama durumundaki başlangıç siparişine karşılık gelen $\boldsymbol{(1,2), (2,3), \ldots, (n-1, n)}$ yayları ile çizgi-grafiğidir ve burada, her $\boldsymbol{i \in N}$ için $\boldsymbol{\alpha_i = g_{1,i}}$ ve $\boldsymbol{\alpha_1 = 0}$ dır.

Örnek 4.2 $\boldsymbol{N = \{1,2,3\}}$, $\boldsymbol{\sigma_0 = (1,2,3)}$, $\boldsymbol{p = (2,3,4)}$ ve $\boldsymbol{\alpha = (20, 60, 100)}$ olacak şekildeki sıralama oyununa karşılık gelen akran grup oyununu Şekil **2** deki $\boldsymbol{T}$ ağacına göre bulalım.



Şekil 2. Örnek 5.2 ye ait T ağacı

$\boldsymbol{v = g_{1,2}u_{[1,2]} + g_{1,3}u_{[1,3]}}$

$\quad \boldsymbol{= g_{1,2}u_{\{1,2\}} + g_{1,3}u_{\{1,3\}}}$ dır.

Aciliyet sırası $\boldsymbol{u_1 = 10}$, $\boldsymbol{u_2 = 20}$, $\boldsymbol{u_3 = 25}$ olduğundan $\boldsymbol{(3,2,1)}$ şeklindedir.

$\boldsymbol{g_{1,2} = maks\{0, p_1\alpha_2 - p_2\alpha_1\} = 60}$

$\boldsymbol{g_{1,3} = maks\{0, p_1\alpha_3 - p_3\alpha_1\} = 120}$

$\boldsymbol{g_{2,3} = 0}$

Buna göre akran grup oyunu

$\boldsymbol{v = 60u_{\{1,2\}} + 120u_{\{1,3\}}}$ dır.

4.3 Havaalanı Durumları

Farklı uçak türleri için iniş ücreti (landing fee) problemleri havaalanı oyunları olarak adlandırılan işbirlikçi oyunların bir ilginç sınıfını ortaya çıkarır (Littlechild ve Tompson 1977. Oyuncuların uçakları $\boldsymbol{1, 2, \dots, n}$, $\boldsymbol{l_1 > l_2 > \cdots > l_n}$ ile $\boldsymbol{l_1, l_2, \dots, l_n}$ uzunluklu iniş pistine ihtiyaçlarının var ve ilgili maliyetlerin $\boldsymbol{c_1 > c_2 > \cdots > c_n}$ olduğu kabul edilsin.

Karşılık gelen havaalanı oyunu $\boldsymbol{< N, c >}$

$$\boldsymbol{c = c_n u_N^* + (c_{n-1} - c_n) u_{N\backslash\{n\}}^* + \cdots + (c_1 - c_2) u_{\{1\}}^*}$$

ile verilsin. Burada $\boldsymbol{< N, u_S^* >}$, eğer $\boldsymbol{S \cap T \neq \emptyset}$ ise $\boldsymbol{u_S^*(T) = 1}$ ve diğer durumlarda ise $\boldsymbol{u_S^*(T) = 0}$ olan bir oyundur.

Bu oyunun Shapley değeri iniş ücret problemlerini çözmek için idealdir.

$\boldsymbol{< N, c >}$ ye karşılık gelen $\boldsymbol{< N, c^* >}$ dual oyunu, her $\boldsymbol{S \subset N}$ için $\boldsymbol{c^*(S) = c(N) - c(N\backslash S)}$ ile verilir.

$$\boldsymbol{c^*(S) = c_n u_N + \sum_{i=1}^{n-1} (c_i - c_{i+1})\, u_{\{1,2,\dots,i\}}}$$

açıkça bir akran grup oyunudur.

Örnek 4.3 Üç hava yolu şirketinin uçaklarını indireceği alanlara 200, 100, 50 TL ödeme yapıldığını kabul edilsin. Havaalanı oyununa karşılık gelen akran grup oyunu

$$\begin{aligned}\boldsymbol{c^*} &= \boldsymbol{c_3 u_N + (c_1 - c_2)\, u_{\{1\}} + (c_2 - c_3)\, u_{\{1,2\}}} \\ &= \boldsymbol{50 u_N + 100\, u_{\{1\}} + 50\, u_{\{1,2\}}}\end{aligned}$$

şeklindedir.

5. Sonuç

Çalışmamızda, her bir ağaç bağlantılı akran grup durumu için bir işbirlikçi model ve koalisyon içindeki akran gruplarına ait üyelerin bireysel ekonomik olasılıklarının paylaşılmasıyla tanımlanan karakteristik fonksiyonlar üzerinde durulmaktadır. Akran grupları, oyuncuların birleştirilerek ilgili oyuna ait oyuncular oluşturulmasıyla ele alınmıştır.

Ayrıca, işbirlikçi Oyun Teorisi kullanılarak akran grubu durumu akran grupları oyunu olarak modellenmiştir. Oyunun kurulmasının ardından, Shapley değeri, Banzhaf değeri, CIS değeri, ENSC değeri ve ED çözümü gibi çeşitli çözüm yöntemleri önerilmiştir.

Daha fazla araştırma için, işbirlikçi oyunlar kullanılarak bazı yöneylem araştırması durumlarının genişletilebileceği belirtilmiştir. Bu durumlar makalede ele alınmış ve çeşitli örneklerle açıklanmıştır.

Ülkemizde, akran grup oyunlarını konu alan yeterli sayıda çalışma olmamakla birlikte, bu konu hala açık bir araştırma alanıdır. Bu nedenle, gelecekte akran grupları ve oyun teorisiyle ilgili farklı konularda çeşitli çalışmalar yapılması önerilmektedir. Yöneylem araştırması durumları ve ekonomik durumlardan olan ihale durumları, sıralama durumları ve havaalanı durumları gibi senaryoların işbirlikçi oyun teorisi ile modellenmesi, akran grup oyunlarının geniş bir uygulama alanına sahip olduğunu göstermektedir. Bu tür modellerin kullanılmasıyla yapılacak çalışmalar, ilgili literatüre değerli katkılar sunabilir.

Araştırmacıların Katkısı

Araştırmanın yazarları araştırmanın tüm süreçlerine eşit derecede katkı sağlamıştır.

Çıkar Çatışması

Yazar tarafından herhangi bir çıkar çatışması beyan edilmemiştir.

Kaynaklar

Alparslan Gök, S.Z., Palancı, O., Yücesan, Z., (2018). Handbook of Research on Emergent Applications of Optimization Algorithms, IGI Global. Doi: https://doi.org/10.4018/978-1-5225-2990-3

Banzhaf, J.F., (1965). Weighted Voting Doesn.t Work: A Mathematical Analysis. Rutgers University Law Review, 19, 317-343. Erişim adresi: https://link.springer.com/article/10.1007/BF01194250

Branzei, R., Dimitrov, D., Tijs, S., (2008). Models in Cooperative Game Theory. Springer-Verlag, 204p, Berlin. Erişim adresi: https://research.tilburguniversity.edu/en/publications/models-in-cooperative-game-theory-2

Brânzei, R., Fragnelli, V., Tijs, S. (2002). Tree-connected peer group situations and peer group games. Mathematical Methods of Operations Research, 55, 93-106. Doi: https://doi.org/10.1007/s001860200176

Branzei, R., Mallozzi, L., Tijs, S., (2010). Peer Group Situations and Games with Interval Uncertainty. International Journal of Mathematics, Game Theory, and Algebra, 19(5-6), 381–388. Erişim adresi: https://www.iris.unina.it/handle/11588/599668

Branzei, R., Tijs, S., Alparslan Gök, S.Z., (2010.) How to handle interval solutions for cooperative interval games. International Journal of Uncertainty,Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 18(2); 123. https://doi.org/10.1142/S0218488510006441

Curiel, I. (1997). Cooperative Game Theory and Applications. Springer-Verlag, 194p, USA. Erişim adresi: https://books.google.com.tr

Curiel, I., Pederzoli, G., Tijs, S., (1989). Sequencing games. Eur. J. Op. Res., (40), 344. Erişim adresi: https://pure.uvt.nl/ws/portalfiles/portal/659469/27020_12973.

Deng, X., Papadimitriou, C. H. (1994). On the complexity of cooperative solution concepts. Mathematics of operations research, 19(2), 257-266. doi: https://doi.org/10.1287/moor.19.2.25

Driessen, T.S.H., Funaki, Y., (1991). Coincidence of and collinearity between game-theoretic solutions. OR Spectrum, 13(1), 15-30. Erişim adresi: https://link.springer.com/article/10.1007/BF01719767

Gilles, R. P., Owen, G., van den Brink, R. (1992). Games with permission structures: the conjunctive approach. International Journal of Game Theory, 20(3), 277-293. doi: https://doi.org/10.1007/BF01253782

Littlechild, S. C., Owen, G. (1976). A further note on the nucleoous of the "airport game". International Journal of Game Theory, 5, 91-95. Erişim adresi: https://link.springer.com/article/10.1007/BF01753311

Myerson, R. B. (1977). Graphs and cooperation in games. Mathematics of operations research, 2(3), 225-229. https://doi.org/10.1287/moor.2.3.225

Owen, G. (1986). Values of graph-restricted games. SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods, 7(2), 210-220. doi: https://doi.org/10.1137/0607025

Rasmusen, E. (1989). Games and information. An introduction to game theory. Blackwell, Oxford UK & Cambridge USA. Erişim adresi: http://ndl.ethernet.edu.et/bitstream/123456789/48245/1/12.pdf

Shapley, L. S. (1953). A Value for n-Person Games: Annals of Math. Studies, (28), 307-317. Erişim adresi: https://www.rand.org/content/dam/rand/pubs/papers/2021/P295.pdf

Smith, W. E. (1956). Various optimizers for single-stage production, Naval Res. Logist. Quart. (3), 59-66. Erişim adresi: https://books.google.com.tr

Tijs, S. (2003). Introduction to game theory. Springer. Hindustan Book Agency, India. Erişim adresi: https://eclass.unipi.gr/modules/document/file.php/DES101/Βιβλίο%20μαθήματος%20%28Αγγλική%20δωρεάν%20έκδοση%29/%40An%20Introduction

von Neumann, J., Morgenstern, O., (1947). Theory of Games and Economic Behavior. Princeton University Press, 776p, Princeton. Erişim adresi: https://psycnet.apa.org/record/1947-03159-000

Yücesan, Z. (2017). Akran grup oyunlarının gri sistem teorisi ile modellenmesi (Master's thesis, Fen Bilimleri Enstitüsü), Süleyman Demirel Üniversitesi. Isparta. Erişim adresi: https://acikbilim.yok.gov.tr/handle/20.500.12812/276987