Kâzım Karabekir Eğitim Fakültesi Dergisi Yıl: 2005 Sayı: 11

MATEMATİK ve SANAT

Adem DURU*
Tevfik İŞLEYEN**

Özet

Birçok insan için matematik sadece sembol ve kurallardan oluşan, eğitim yaşantıları boyunca zorlandıkları, kimseye faydası olmayan bir derstir. Şüphesiz kural ve semboller matematiğin bir parçasıdır fakat asla tamamı değildir. Bu çalışmada matematiğin sadece sembol ve rakamlardan oluşmadığı gösterilmiş, matematiğin sanattaki yansımaları üzerinde durulmuş ve bu yansımalara örnekler verilmiştir. Böylece matematiğin başka yönlerinin de olduğu gösterilmeye çalışılmıştır. Matematiğin öğretiminde, matematiğin sanatsal yönünün kullanılmasının faydalı olacağı düşünülmüştür.

Anahtar kelimeler: *Matematik, Sanat, Altın Oran*

MATHEMATİCS and ART

Abstract

For many people, mathematics is a course which is composed of only symbols and rules; has no benefit for anyone and in which they have difficulties throughout their education life. Of course, rules and symbols are a part of mathematics, but not the whole of it. In this study, it is shown that mathematics is not composed of only symbols and rules, that reflection of mathematics on arts is investigated, and some examples are given for these

* Arş. Gör. Gaziantep Üniversitesi Adıyaman Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Bölümü. ademduru@atauni.edu.tr

** Yrd.Doç. Dr., Atatürk Üniversitesi K. K. Eğitim Fakültesi OFMAE Matematik Eğitimi. tisleyen@atauni.edu.tr

reflections. So it is tried to be shown that mathematics have different aspects, too. It is thought that it would be beneficial to use art of mathematic aspects in the teaching mathematics.

Key words: *Mathematics, Art, Golden Rate*

1-GİRİŞ

Matematikle sanat bazıları için yan yana en son gelmesi gereken iki daldır. Eğitim öğretim hayatı boyunca matematikten sürekli düşük not alan , korkan, uzak duran, başarısız olan birisi için matematikle sanatın ne bir ilişkisi, ne de matematiğin sanatsal bir değeri olabilir. Halbuki gerçek hiçte böyle değildir. Hem matematiğin kendi iç disiplininde ve uyumunda bir sanatsal değer, estetik ve güzellik vardır, hem de matematik mimarlık, müzik, resim gibi sanat dallarındaki uygulamaları ile sanatla iç içedir. Nasıl ki resimde bir renk uyumu, şiirde sözcükler arasında bir düzen, anlam bütünlüğü var ise matematikte de işlemler arasında bir düzen, problemi ve teoremi çözmedeki düşüncede bir güzellik ve uyum vardır. Ünlü İngiliz matematikçi Hardy "Bir matematikçinin savunması" kitabında şöyle der: "*Bir matematikçinin yaptığı şey bir ressamın ya da şairinki kadar güzel olmalıdır. Düşünceler, renkler ve sözcükler gibi uyumlu bir biçimde birbirine uymalıdır. Dünyada çirkin bir matematik için kalıcı bir yer yoktur.*"

Bir matematikçi ile bir sanatçının yaptığı şeyler de hemen hemen aynı şeyler değil midir? Bir matematikçinin yaptığı şey yüce yaratıcının, dünyaya bahşettiği şeyleri zamanla fark etmesidir. Örneğin Helis, fasulye bitkisinin bir çubuğa tırmanırken çizdiği eğridir. Bu eğri bir yüksekliği en kısa mesafede tırmanma problemini çözer. Arının bal peteği düzgün altıgendir. 1990'lı yıllardan sonra bilgisayarın da gelişmesiyle, eğrelti otunun da yeni bir geometri dalı olan fraktal geometriye iyi bir örnek olduğu anlaşılmıştır.

Matematikçiler bunun gibi birçok örneği çalışıp uğraşarak gün ışığına çıkarmışlardır. Böylece matematik gelişip büyümüştür. Bir sanatçının yaptığı doğada var olan şeylerin birer taklididir. Örneğin bir portre, bir resim, bir heykel doğadakilerin birer taklididir. Bir tablo doğadaki cisimleri, ışıkları ve renkleri birleştirir. Bir melodi doğadaki sesleri ayrıştırır ve yeniden başka türlü tekrar birleştirir. Bir şiir, bir roman doğada (insanda) varolan dili ayrıştırır, birleştirir ve doğadaki varlıklarla (insanlarla) etkileşime girer (Karaçay, 2003).

Matematiğin kendi doğasında güzelliklerin var olduğunu söylemiştik. Zaman zaman matematikçilerin bazı problem ve teoremlerin çözümlerine hayranlıkla baktıklarını görürüz ve çözümün çok güzel olduğunu söylediklerini duyarız. Buradaki güzelliği ve estetiği herkesin görmesi mümkün olmayabilir çünkü matematikle uğraşmayan birisi için problemin çözümü ya da teorimin ispatı bir anlam ifade etmez. Matematikçilerin çok güzel dediği, hayranlıkla izlediği şey problemin ya da teoremin ispatındaki orjinellik, sıradışılık ve çözüme ulaşabilmedeki düşünme şeklidir.

Hardy'e göre "$\sqrt{2}$ irrasyoneldir" teoremi birinci sınıf bir teoremdir. Bu teorem ilk bulunduğu zamandaki kadar taze ve önemlidir. Aradan geçen 2000 yıla rağmen en ufak bir değişiklik olmamıştır. Nasıl ki bir şiirdeki güzellik bir ölçüde içerdiği fikrin önemli olmasına bağlıysa bir matematik probleminin güzelliği de büyük ölçüde onun ciddi oluşuna bağlıdır. Güzellik ilk sınavdır, çirkin matematiğe dünyada yer yoktur. Bu güzel ve birinci sınıf olan teorem nedir ve ispatı nasıldır? Şimdi ona bakalım.

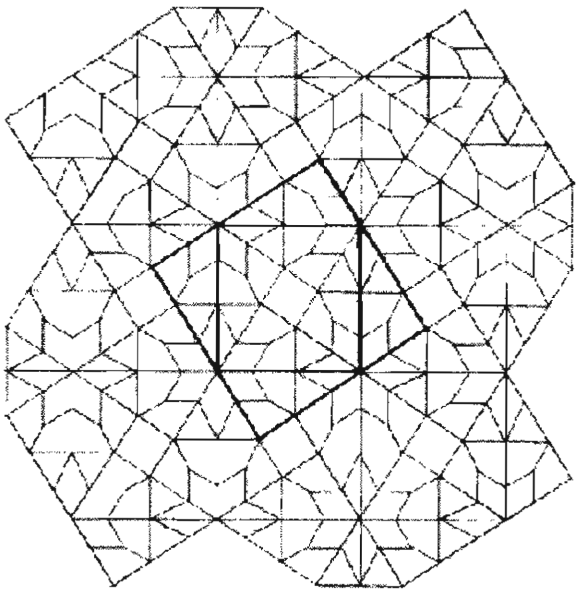
Teorem: $\sqrt{2}$ sayısı irrasyoneldir.

İspat: Bu teoremin ispatı için olmayana ergi metodunu kullanalım. $\sqrt{2}$ nin rasyonel olduğunu kabul edelim. O zaman rasyonel sayıların tanımından $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$ yazılabilir. Buradaki p ve q sayıları aralarında asaldır. Yani

$(p,q)=1$ dir. Buradan $\sqrt{2}.q=p$ veya $2.q^2=p^2$ yazılabilir. $2.q^2$ çift olduğundan p^2 çift bir sayıdır dolaysıyla p de çifttir. Öyleyse bir c tamsayısı için $p=2.c$ olur. $2.q^2=(2.c)^2$ veya $q^2=2.c^2$ elde edilir. Buradan q^2 nin çift sayı olduğu görülür. Dolaysıyla q çifttir. Bunların sonucunda p ve q çift sayıdır ve her ikisi de 2 ye bölünür. Bu ise bizim başlangıçtaki $(p,q)=1$ varsayımımızla, dolaysıyla $\sqrt{2}$ rasyoneldir savımızla da çelişir. O halde $\sqrt{2}$ irrasyoneldir. King (2003)' e göre Hardy'nin güzellik ve zarafet için dile getirdiği ciddiyet, derinlik, genellik, beklenmedik olma, kaçınılmazlık ve ekonomik özelliklerini bu teorem bünyesinde bulundurmaktadır. Öyle ki bu teoremi birinci sınıf ve estetik kılan da bu özelliklerdir.

2-MATEMATİĞİN SANATA YANSIMALARI

Matematiğin kendi iç disiplinindeki güzelliklerin yanı sıra bu güzelliklerin sanata yansımaları da vardır. Bu yansımaların birçok örneğini sanatın bir çok dalında görmek mümkündür. Eski çağlardan günümüze kadar baktığımızda matematikle sanatın iç içe olduğunu görmek zor olmasa gerek. Türk İslam mimarisinde geometriksel model ve figürlerin sıkça kullanıldığını görmek mümkündür. Özdural (2000) matematikçiler ile sanatçılar arasındaki işbirliğini araştırmıştır. Bu çalışmasında Özdural Ebul-Vefa tarafından yazılan "Sanatkârın ihtiyaç duyduğu geometrik çizimler" ve anonim "İç içe geçen benzer veya karşılıklı şekiller" isimli kaynakları incelemiştir.



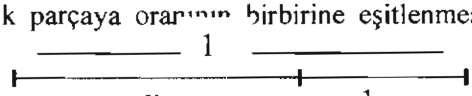
Şekil–1 Geometriksel Figürlerin Sanata Yansıması

Bu iki kaynaktan yapılan alıntılarda, matematikçilerin sanatkârlara kes-yapıştır yöntemiyle geometri öğretirken, öğretilenlerin bezeme sanatında da kullanılabilir olmasına özen gösterdikleri görülüyor. Yukarıdaki şekilde eşkenar üçgen, kare, dikdörtgen yamuk gibi geometriksel figürlerin Türk-İslam mimarisinde ne denli ustalıkla kullanıldığı görülmektedir. Bu tür figürleri birçok medresenin ve camiinin kapısında, mihrabında, kürsüsünde minberinde görmek mümkündür.

Mimar Sinan Edirne'deki Selimiye Camii'nin üç merdivenli minarelerinde helis eğrisinin en güzel uygulamalarından birini göstermiştir. Minareler hem üçer şerefeli, hem de olabildiğince ince olacaktı. Ayrı merdivenleri kullanan kişiler de birbirini görmeyecekti. Bunu ancak mükemmel matematik bilgisi ile mimarî dehasını birleştirebilen Koca Sinan yapabilirdi. Böyle bir projeyi düşünmek bile cüret isterdi. İşte o da Sinan gibilerle, sıradan olanlar arasındaki farktır (Sertöz, 2000). 1950'li yıllarda bir grup araştırmacı Türkiye`deki Ayasofya, Sultanahmet ve Süleymaniye camileri gibi mimarlık şaheserlerini incelerler. İnceleme esnasında bu yapıların zeminlerinin gevşek olduğunu görünce yüzyıllardan beri bu yapıların depremlere karşı nasıl ayakta kaldığına şaşırırlar. Daha sonra Edirne`de bulunan Selimiye Camisini incelmeye giderler. Bir Japon bilim adamı kubbeye bakarak, kubbenin orada durmasının matematik ve fizik kurallarına aykırı olduğunu söyler ve bilim adamları İstanbul'dakiler gibi buranın da zemininin gevşek olduğunu görürler. Caminin minarelerinin yıkılmasından endişe ederler ve minarelerin temelini en son teknoloji ürünü olan metal kelepçelerle sabitlemeyi düşünürler. Minarelerin temelini açtıklarında koymayı düşündükleri kelepçelerin benzerleriyle karşılaşırlar. Mimar Sinan Selimiye Camii`nin kubbesini o genişlikte oturtmak için 13 bilinmeyenli bir denklemi çözdüğü söylenir. Böylece görülmektedir ki kubbenin ve minarelerin temelinde matematik yatmaktadır.

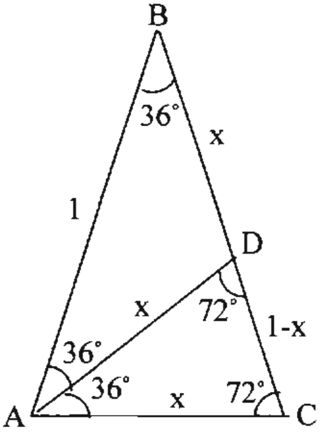
Matematikle sanatın en ilişkili olduğu durumlardan biride "altın oran" dır. Altın oran altın ortalama, altın bölüm ve mükemmel orantı olarak ta bilinen bir sabit sayıdır. Antik çağda ressam ve heykeltıraşlar ideal insan ölçüsünün nasıl olması gerektiği üzerine kafa yormuşlar ve ideal insan ölçüsünü şöyle tanımışlar: "Boy uzunluğunun göbekten ayakuçlarına olan uzunluğa oranı, göbekten ayakuçlarına olan uzunluğun göbekten başucuna olan uzunluğa olan oranına eşit."

Bu altın oranı matematiksel olarak tanımlamak gerekirse ikiye bölünen bir doğru parçasının tamamının büyük parçaya oranının büyük parçaya oranının büyük parçanın küçük parçaya oranının birbirine eşitlenmesi ile elde edilir.



Şekil-2 Altın Oran Kuralına Ayrılmış Doğru Parçası

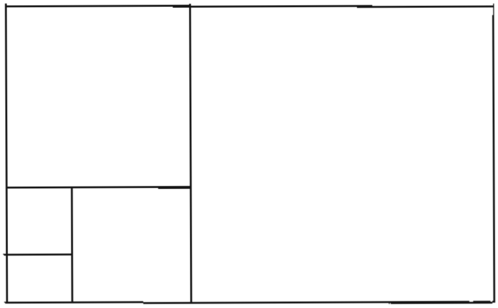
Altın oran kuralına göre 1 br uzunluğundaki bir doğru parçası şekildeki gibi iki parçaya bölünüyor. Eğer $\frac{1}{x}=\frac{x}{1-x}$ yada $1-x=x^2 \Rightarrow x^2+x-1=0$ ise bunun sonucu altın oranı verir. Bu denklemin pozitif kökü $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\cong 0,618033.......$ olup $\frac{1}{x}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1,618033.....$ tür. Genellikle altın oran 1,618033... değerini göstermek için yunan alfabesinden Φ harfi kullanılır. Altın oran bir çok matematiksel yapıda görülür. Bunlardan birisi taban açıları 72° ve tepe açısı da 36° olan ikizkenar üçgendir. Yan kenarları 1 br ve tabanı x br olan bir ikizkenar $A\overset{\Delta}{B}C$ üçgenine bakalım.



Şekil–3 Altın üçgen

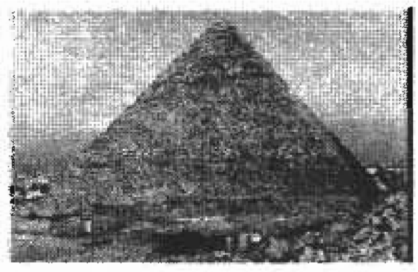
$\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninin $\hat{A}$ açısına ait açı ortayını çizelim. $\overset{\Delta}{ADC}$ üçgeni $\overset{\Delta}{BAC}$ üçgeni ile benzerdir. $\overset{\Delta}{ABD}$ ikizkenar üçgen olup $[AC]$, $[AD]$ ve $[BD]$ nin uzunlukları x'e $[DC]$'nin uzunluğu da 1-x'e eşittir. $\overset{\Delta}{ADC}$ üçgeni ile $\overset{\Delta}{BAC}$ üçgeni benzer olduğundan $\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$ ve $\frac{1}{\Phi} = x$

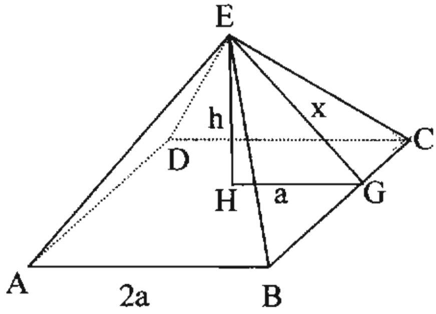
Altın üçgeni kullanarak altın beşgenleri (pentagon), beş köşeli yıldız (pentagram) ve altın ongenleri oluşturmak oldukça kolaydır. Aşağıdaki gibi uzun kenarının kısa kenarına oranı altın oranı veren dikdörtgende altın dikdörtgen olarak bilinmektedir. Dikdörtgen altın dikdörtgen olduğu için ondan da bir kare atılırsa yine bir altın dikdörtgen kalır



Şekil--4 Altın dikdörtgen

Atlın oran biyolojide, matematikte ve sanat tarihinde önemli bir sayıdır. Örneğin salyangoz kabuğu altın oranla bağlantılıdır (Storeygard, 2001). Altın oran insanoğlu tarafından yüzyıllardan beri kullanılmaktadır. Altın oran antik çağlardan kalan birçok eserde görülebilir. Bunlardan birisi milattan önce 2500 yıllarında yapıldığı tahmin edilen Mısır'daki büyük piramittir.





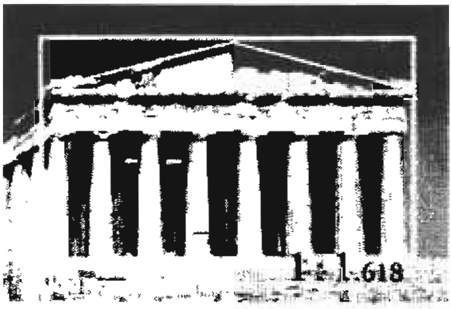
Şekil–5 Altın Oran Kuralına Uyan Büyük Piramit

Taseos (1990)'a göre piramidin taban uzunlukları 755,79 ve 756,06 feet olan bir karedir (Mükemmel bir kare değildir.). Ortalama 755,79 feettir. Yüksekliği ise 481,4 feettir. Yukarıdaki şekildeki $\overset{\Delta}{EHG}$ üçgeninde Pisagor teoremini uygularsak 2a tabanın tamamının uzunluğu olup $a = 377,90$ ve $h = 481,4$ olduğundan

$$x^2 = (377,90)^2 + (481,4)^2 \Rightarrow x = 612,0084 \text{ tür.}$$

Buradan $\dfrac{a}{x} = \dfrac{6120084}{377,90} = 1,619498...$ olup bu değerin altın orandan çok az bir farkı vardır. Fakat burada şu unutulmamalıdır ki bu yapının inşasından günümüze kadar çok uzun bir süre geçmiştir. Doğal olarak bu süre içinde rüzgârdan, yağmurdan ve diğer doğa olaylarından dolayı bir aşınmanın olması kaçınılmazdır. Bu aradaki küçük farkın sebebi belki de bu aşınmalardır.

Altın oranın büyük piramidin dışında birçok mimari eserde daha kullanıldığını görmekteyiz. Bunlardan birisi eski Yunan medeniyetinden kalan, bu gün Atina'da bulunan ve zekâ tanrıçası Athena'ya ait olan meşhur tapınak Parthenon dur. Browne (1989), Hill (1990), Manuel ve Santiago (1988), Pappas (1989) gibi birçok araştırmaya göre Parthenon altın oran kuralına uymaktadır.



Şekil–6 Altın Oran Kuralına Uyan Parthenon Tapınağı

Türk mimarisi ve sanatında da altın oran örneklerini görmek mümkündür. Mimar Sinan'ın inşa ettiği Süleymaniye ve Selimiye Camiileri'nin minarelerinde, Konya'da Selçukluların inşa ettiği İnce Minareli medresenin taç kapısında, İstanbul'daki Davut Paşa Camisinde, Sivas'ta Mengüçoğulların'dan günümüze miras kalan Divriği Külliyesinde altın oran görülür (metu.edu.tr/~e115152/project/index.htm).

Altın Oran kuralının örneklerini mimarlığın dışında diğer sanat dallarında da görmek mümkündür. Rönasans dönemi sanatçılarından olan Leonardo'nun ünlü Mona Lisa tablosunda altın oran görülmektedir. Mona Lisa'nın başının etrafına bir dikdörtgen çizildiğinde ortaya çıkan dört kenar bir altın dikdörtgendir. Bu dikdörtgeni, göz hizasında çizeceğimiz bir çizgiyle ikiye böldüğümüzde de yine bir altın oran elde ederiz. Resmin boyutları da altın oran oluşturmaktadır.

Matematikle sanatın ilişkili olduğu diğer bir alanda müziktir. Müzikal seslerin niteliğinin incelenmesi 19. yüzyılda matematikçi Fourier tarafından yapılmıştır. Fourier, müzik aleti ve insandan çıkan bütün müzikal seslerin matematiksel ifadelerle tanımlanabileceğini ve bunun da periyodik sinüs fonksiyonları ile olabileceğini ispatlamıştır. Ayrıca tel uzunluğunun hangi bölümlerinde hangi notaların çıktığı da matematiksel olarak gösterilmiştir. Telli çalgıların eğitimi kulak eğitimi ve nota eğitimi olmak üzere iki şekilde yapılmaktadır. Bunlardan birincisinde deneme yanılma yöntemiyle seslerin nerelerden çıktığının kulakla anlaşılır diğerinde ise çalgı üzerinde notaların (seslerin) çıktığı yerler matematiksel olarak belirlenir ve buna göre öğretilir. Gerçekten araştırıldığında çekilen tellerin her armonik bileşimi tamsayıların oranı olarak gösterilmiştir. Örneğin, do sesini çıkaran bir telin uzunluğunun 16/15'i "si" sesini verirken, 6/5'i ise "la" sesi; 4/3'ü "sol" sesini; 3/2'si "fa" sesini; 8/5'i "mi" sesini; 16/9'u ise "re" sesini verir. (Orhan, 2005). Matematikle müzik arasındaki ilişki tek yönlü değildir. Matematik öğretiminde müziğin kullanılmasının faydalı olduğunu söyleyen araştırmalarda vardır. Hinthorne (1997) matematiğe müzikal bir sesle giriş yapılmasının öğrencilerin matematiğe yönelik tutumlarını değiştirdiğini söylemiştir. O bu yaklaşımın özelliklede matematiği sevmeyen yada matematik fobisi olan öğrenciler üzerinde etkili olduğunu söylemiştir. Hinthorne'e (1997) göre müzik ve müzikal sesler öğrencilerin oran-orantı, formüller ve grafikler gibi bazı konuları daha iyi anlamlarında yardımcı olmuştur.

3-TARTIŞMA–SONUÇ:

Matematik sadece rakam ve sembollerle uğraşan bir disiplin olarak anlaşılmamalı. Elbette rakam ve semboller matematiğin en önemli bileşenidir, fakat asla matematiğin tamamı değildir. Matematik rakam ve sembollerin dışındaki bazı şeyleri de içermektedir. Matematik kültürüne sahip olmayan birisi için bu rakamların ve sembollerin bir anlamı olmayabilir ama bir matematikçi bu rakam ve sembollerden zevk alır, uğraştığı şeylerde bir estetik, güzellik görür. Matematik kendi iç disiplininde bir takım güzellik ve estetikleri barındırmasının yayında sanattaki uygulamaları ile de sanatın her çeşidiyle iç içedir.

Matematik eğitimi Türkiye'de ve Dünyada istenilen seviyede değildir. Matematik eğitiminde istenilen başarı seviyesini elde etmede, matematiğin diğer disiplinlerdeki uygulamaları anlatılabilir, matematiğin sadece sembol ve rakamlardan oluşmadığı, matematiğin başka yönlerinin de olduğu insanlara gösterilebilir. Fen bilimleri, mühendislik, tıp gibi bilim dallarında matematiğin etkinliği hakkında toplumda bir şüphe yoktur. Fakat insanlar matematikle sanat arasındaki ilişkiden fazla haberdar değildirler. Matematiğin sanattaki yansımaları anlatılarak matematikte de bir güzelliğin ve estetiğin olduğu gösterilebilir buna paralel olarak insanların matematiğe karşı olan tutumları daha olumlu hale getirilebilir ve matematik eğitiminin kalitesi arttırılabilir.

KAYNAKÇA

Atın oran http://www.metu.edu.tr/~e115152/project/index.htm sitesinden 2005 Ocak ayında alınmıştır.

Browne, Maleolm W. (1989)"Impossible" foran of matter takes spotlight in study of solids. New York Times Semtember 5

Hardy, G. H. (1999) A Mathematician's Apology (Bir Matematikçinin Savunması Türkçe'si Nermin Arık) Tubitak Popüler Bilim Kitapları Pro-Mat Basım Yayın A.Ş. İstanbul

Hill, Francis. S. (1990) Computer Graphics, Macmillan, New York

Hinthorne, Stephen,G. (1997). Mathemusical connections: the role of musical acoustics in teaching mathematics. The journal of the acoustical society of America Vol: 101, Issue:5, 3098-3099

Karaçay, Timur (2003). Matematik ve Sanat. http://www.matder.org.tr/bilim/mvs.asp?ID=2 sitesinden 2005 Şubat ayında alınmıştır.

King, Jerry, P. (2003) The Art of Mathematics (Matematik Sanatı çeviren Nermin Arık) Semih Ofset,14. Bs., Ankara

Manuel, G. and Santiago, A. (1988). An Unexpected Appearance of the Golden Ratio. The College Mathematics Journal 19, 168-170

Orhan, Cihan (2005). Matematik ve Müzik. Ocak 2005 te http://www.muzikdersi.com/ders/index.php?option=com_content&task=blogsection&id=9&Itemid=47 sitesinden alınmıştır.

Özdural, Alpay (2000). Mathematics and Arts: Connections between Theory and Practice in the Medieval Islamic World Historia Mathematica **27**, 171–201

Pappas, Theoni. (1989). the Joy of Mathematics. Wide World Publishing, San Carlos, CA.

Sertöz, Sinan,(2000) "Matematiğin Aydınlık Dünyası" Gökçe Ofset, 12. Bs., Ankara.

Storeygard, Adam (2001). Greek Origami: A Sculpture Exploring the Golden Ratio. Leonardo, Vol.34, No.3, 227-229

Taseos, Socrates G. (1990). Back in time 3104 B.C. to the Great Pyramid, SOC Publishers, charlotte NC