**Kâzım Karabekir Eğitim Fakültesi Dergisi Yıl: 2005 Sayı: 11**

# ALT VEKTÖR UZAYI KAVRAMININ KAVRAMSAL ÖĞRENİLMESİ ÜZERİNE

Tevfik İşleyen*
Ahmet IŞIK**

***Özet***

*Matematik öğretiminde kavramsal öğrenme son derece önemlidir. Üniversiteye gelen öğrenciler ortaöğretimde başlayan işlemsel öğrenmeye önem verme alışkanlıklarını lisans öğrenimlerinde de sürdürmektedirler. Bu çalışmada, ilköğretim matematik öğretmenliği 2. sınıf öğrencilerinin alt vektör uzayı kavramını kavramsal olarak öğrenip öğrenemedikleri tespit edilmeye çalışılmıştır. Bu çalışma sonucunda öğrencilerin alt vektör uzayı kavramını işlemsel olarak öğrendikleri ve içselleştiremedikleri görülmüştür. Alt vektör uzayı kavramını öğrencilerin niçin kavramsal öğrenemedikleri üzerinde durularak, öğreticilere bir takım öneriler sunulmuştur.*

***Anahtar Kelimeler:*** *Kavramsal Öğrenme, İşlemsel Öğrenme Alt Vektör Uzayı.*

## *A STUDY ON CONCEPTUAL LEARNING OF SUBVECTOR SPACE*

***Abstract***

*Conceptual learning is of highly significance in terms of mathematics teaching. University students, who have just begun to university, continue the habit of paying attention to the operative learning during the undergraduate education process. In this study, it was attempted to*

* Yrd. Doç. Dr., Atatürk Üniversitesi K. K. Eğitim Fakültesi OFMAE Matematik Eğitimi. tisleyen@atauni.edu.tr

** Prof. Dr., Atatürk Üniversitesi, Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi, İlköğretim Bölümü Matematik Öğretmenliği Anabilim Dalı. isik@atauni.edu.tr

*determine whether primary education, mathematics teaching department second year students learn the concept of subvector space conceptually or not. At the end of this study, it was reached that the students learn the concept of subvector space procedurally but they cannot internalize it. Focusing on why the students cannot learn conceptually some implications were given to the teachers*

***Key Words:*** *Conceptual Learning, Procedural Learning, Subvector Space*

## 1. GİRİŞ

Matematik öğretiminde öğreticilerin dikkat etmesi gereken hususlardan birisi, sorulan bir matematik problemini öğrencinin doğru çözmesi, ilgili matematiksel kavramın anlaşılmış olması anlamına gelmediğini bilmesidir. Özellikle matematik konularında öğrencilerin nedenini tam kavrayamadan yapabildikleri bir çok işlem vardır. Matematik öğretiminde bu öğrenmeler; işlemsel ve kavramsal öğrenme şeklinde açıklanmaktadır. Örneğin; Robert McCormick (1997), matematik öğretiminde işlemsel bilgiyi "nasıl yapacağını bilme", kavramsal bilgiyi ise "parçalar arasında ilişki kurabilme" olarak tanımlar. Baykul (1999), işlemsel bilgiyi; matematikte kullanılan semboller, kurallar ve matematik yaparken başvurulan işlemlerin bilgisi, kavramsal bilgiyi ise matematik kavramlarının kendileri ve bunlar arasındaki ilişkiler olarak tanımlar. Skemp (1971), Kavramsal bilgiyi; "ne yapacağını ve nedenini anlama kabiliyeti olarak", işlemsel bilgiyi de; "kuralların nedenlerini anlamaksızın yürütebilme yeteneği" olarak ifade etmiştir. Yani kavramsal öğrenmede kavram son derece önemli iken, işlemsel öğrenmede kavramın kendisi arka planda kalır (Baki 1997). Hiebert ve Lefevre (1986), işlemsel bilgiyi; hem matematiğin sembol dili hem de problemleri çözmek için kullanılan işlem ve kurallar bilgisi, kavramsal bilgiyi ise; bilginin özel parçalarını içeren bir ağın parçası ve bu parçalar arasındaki bağıntılar olarak tanımlar. Bu tanımlamalara rağmen, yinede işlemsel bilgi ile kavramsal bilgiyi kesin hatlarıyla birbirinden ayırmak mümkün değildir (Mccormik 1997, Baki 1998). Çünkü kavramsal bilginin içerisinde işlemsel bilgininde olduğu unutulmamalıdır. Bu sebeple matematik öğretiminde özellikle anahtar kavram rolü oynayan konuların öğretiminde kavramsal bilginin oluşmasına önem verilmelidir. Ancak ülkemizde yapılan bir çalışmada matematik öğretiminde işlemsel bilginin öne çıktığını ve işlemsel bilgi ile kavramsal bilginin dengelenemediği görülmüştür (İşleyen ve Işık 2003). Analiz dersi için yapılan benzer bir çalışmada işlem içerisinde geçen kavramların öğrenci tarafından anlaşılamadığı ortaya konulmuştur (Gravemeijer ve Doorman 1999).

Ülkemizde işlemsel öğrenmeye ağırlık verildiğinden öğrenciler verilen problemi muhakeme etme yerine bir an önce rakamsal bir sonuç çıkarmaya çalışmaktadırlar. Böyle olunca çözülen problemi yorumlama ya da muhakeme etme yeteneği ikinci plana atılarak matematiğin doğasına ters bir durum ortaya çıkmaktadır. Matematik problemlerini çözerken başvurduğumuz her işlem, bir muhakeme sayesinde ortaya çıkmıştır. Bir problemin çözümünü kolaylaştırmak için bilinmesi gereken algoritmalar, kavramın kendisi bilinmeden ezberlendiği durumlarda kavramsal öğrenme gerçekleşemez. Hıza dayalı sınavlarda, özellikle üniversiteye giriş sınavında sorulan sorulara en kısa zamanda cevap verebilme telaşı öğrencileri daha çok işlemsel öğrenmeğe yönlendirmektedir. Dolayısıyla öğrenciler muhakeme yeteneklerini kullanarak yapabilecekleri sorular üzerinde dahi düşünmemektedirler. Matematikte keşfetme ve kendi matematiğini oluşturma fikri son derece önemli olmasına rağmen mevcut eğilim bunun tam tersi yöndedir. Hakim olan görüş, matematik öğrenmek isteyen bir kimse kuralları ( genellikle ezberleme yoluyla) öğrenmeyi ve aynı zamanda bu kuralların hangi durumlarda uygulandığını bilmeyi yeterli görmektedir. Öğrenciler kavram, çizim ve ispat gibi matematiğin temelini oluşturan değerleri sevmemektedirler (Hacısalihoğlu, 1998). Ayrıca öğrenciler muhakeme güçlerinin bu temel kavramalarla gelişeceğinin farkında değillerdir.

Bu problemler sadece ortaöğretim öğrencilerinin problemi olarak algılanmamalıdır. Çünkü ortaöğretimde matematik öğrenmeyi sadece işlemsel öğrenme olarak algılayan öğrenciler üniversite öğrenimlerinde de bu tarz bir matematik öğrenme beklentisi içerisine girmektedirler. Bunun sonucu olarak herhangi bir problemle karşılaştıkları zaman bu problemi daha önce çözdükleri problemin çözümüne benzetmeye çalışmaktadırlar. Bu çalışmada üniversite 2. sınıf öğrencilerine Lineer Cebir-I dersinde daha önce çözülen bir probleme benzer bir problem sorulmuştur. Araştırmacılar tarafından ikinci problemde kasıtlı olarak bir veri eksik olarak verilmiş ve öğrencilerin bunu fark edip etmeyecekleri veya daha önce çözülen problemle aynıymış gibi algılayıp algılamadıkları test edilmeye çalışılmıştır. Soru, daha önce çözülen problemin çözüm yöntemini kavramsal öğrenen öğrencilerin sorulan sorudaki eksikliği fark edebilecekleri, işlemsel öğrenmeğe önem verenlerin ise yanlış yapacakları şekilde düzenlenmiştir. Yöntem kısmında önce çözülen problem ve daha sonra sorulan soruyla alakalı detaylı bilgi verilecektir.

## 2. YÖNTEM

Bu çalışma, ilköğretim matematik öğretmenliği bölümünde okuyan ve Lineer Cebir-I dersi alan öğrencilerin alt vektör uzayı konusunu kavramsal olarak öğrenip öğrenmediklerini belirlemek amacıyla 2004–2005 öğretim yılının güz döneminde gerçekleştirilmiştir. Çalışmada kullanılan veri toplama aracı, örneklem grubu ve verilerin analizi aşağıda ayrıntılı olarak açıklanmıştır.

### 2.1. Örneklem

Çalışmanın örneklemini Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi İlköğretim Bölümü Matematik Öğretmenliği II. Öğretim ikinci sınıf A ve B şubelerinde okuyan ve aynı öğretim üyesinden Lineer Cebir-I dersini alan sırasıyla 49 ve 51 olmak üzere toplam 100 öğrenciden oluşmaktadır. Çalışmanın amacı alt vektör uzayının öğrenciler tarafından kavramsal olarak öğrenilip öğrenilmediğini belirlemek olduğundan böyle bir örneklemin seçilmesi uygun görülmüştür.

**2.2. Veri toplama aracı**

Veri toplama amacı ile belirlenen örneklemde yer alan öğrencilerin Lineer Cebir-I dersinde takip ettikleri ve Işık tarafından 2002 ve 2004 tarihlerinde yazılan iki kitaptan yararlanılmıştır. Bu konudan önceki bütün temel kavramlar öğrencilere sunulduktan sonra öğretim üyesi tarafından alt vektör uzayı, kaynak kitaplarda da belirtildiği gibi, şu şekilde tanımlanmıştır;

*"$W$, $F$ cismi üzerinde bir $V$ vektör uzayının boştan farklı bir alt kümesi olmak üzere eğer $W$ kümesi $V$ deki tanımlanan işlemlere göre bir vektör uzayı ise $W$ kümesine alt vektör uzayı denir.*
*Başka bir deyişle; $W$, $V$ nin boştan farklı bir alt kümesi olmak üzere $\alpha, \beta \in W$ ve $c \in F$ için, $c\alpha + \beta \in W$ ise $W$ ya $V$ nin bir alt vektör uzayı denir" (Işık, 2002).*

Bu tanımdan sonra şu örnek problem öğrencilere çözülmüştür.

***Örnek Problem:*** $W = \left\{ (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n : \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \right\}$ *kümesinin* $R^n$ *in bir alt vektör uzayı olup olmadığını araştırınız.*

***Çözüm:*** $\alpha = (x_1, x_2, ..., x_n)$ , $\beta = (y_1, y_2, ..., y_n) \in W$ *ve* $c \in R$ *için;* $c\alpha + \beta \in W$ *olup olmadığını araştıralım.*

$$c\alpha + \beta = c.\ (x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) =$$
$$(cx_1 + y_1, cx_2 + y_2, ..., cx_n + y_n)$$

*Şimdi,* $\sum_{i=1}^{n}(cx_i + yi) = 0$ *olup olmadığını araştıralım. Toplamda terimlerin sayısı sonlu olup ve toplam sonsuz eleman ihtiva etmediğinden;*

$$\sum_{i=1}^{n}(cx_i + yi) = c.\sum_{i=1}^{n}x_i + \sum_{i=1}^{n}y_i = c.0 + 0 = 0$$

*yazılabilir. O halde* $W$ , $R^n$ *in bir alt vektör uzayıdır (Işık, 2004).*

Alt uzay ve alt uzayla alakalı bu örnek çözüldükten bir hafta sonra öğrencilere yukarıda sunulan örnek probleme çok benzer fakat veri eksikliği bulunan aşağıdaki problem yöneltilmiş ve bu probleme göre öğrencilerin alt vektör uzayı kavramını **kavramsal mı, işlemsel mi** öğrendikleri belirlenmeye çalışılmıştır.

***Problem:*** *Alt vektör uzayı tanımını yapınız ve* $W = \left\{(x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n : \sum_{i=1}^{n}x_i\right\}$ *kümesinin* $R^n$ *in bir alt vektör uzayı olup olmadığını araştırınız.*

**2.3. Veri analizi**

Çalışmada elde edilen bulgular hem nitel hem de nicel olarak değerlendirilmiştir. Öğrencilerin probleme verdikleri cevaplar; doğru, yanlış ve cevapsız şeklinde gruplandırılıp tablo haline dönüştürüldükten sonra nicel olarak analiz edilmiştir. Ayrıca öğrencilerin vermiş oldukları cevaplardan bazıları taranıp bilgisayar ortamına aktarılmıştır. Bu cevaplar ise nitel verilerle beraber nicel olarak yorumlanmıştır. Bulgular, öğrencilerin yöneltilen probleme verdikleri yazılı cevaba dayalı olarak oluşturulmuş ve yorumlanmıştır.

## 3. BULGULAR

Bu bölümde, alt vektör uzayının kavramsal veya işlemsel öğrenilmesiyle ilgili soruya verilen öğrenci cevaplarının hem yüzdelik hem de yazılı gösterimleri yer almaktadır.

**Tablo 1.** Probleme verilen doğru, yanlış ve boş cevaplar ve yüzdelikleri

| | Alt vektör uzayı tanımı | Alt vektör uzayı problemi Çözümü |
|---|---|---|
| Teste katılan öğrenci sayısı ( N) | 100 | 100 |
| Doğru cevap veren öğrenci sayısı (f) | 77 | 0 |
| Yanlış cevap veren öğrenci sayısı (f) | 12 | 73 |
| Boş cevap veren öğrenci sayısı (f) | 11 | 27 |

Tablo 1 incelendiğinde öğrencilerin %77 gibi büyük bir kısmının alt vektör uzayı tanımını yapabildiği ortaya çıkmaktadır. Alt vektör uzayı tanımını yapabilen öğrencilerden hiçbiri alt vektör uzayı ile ilgili probleme doğru yorum getirememişlerdir. Öğrencilerin bu probleme vermiş oldukları yanlış cevapların incelenmesi neticesinde, bütün öğrencilerin verilen problemi daha önce çözülen örnek problem gibi algıladıkları ve örnek problemin çözüm yolunun bir kopyası şeklinde çözmeye çalıştıkları belirlenmiştir. Öğrencilerden hiçbiri problemdeki veri eksikliğinin farkına varamamışlardır. Alt vektör uzayı tanımını doğru yapan fakat alt vektör uzayı problemini yanlış çözen öğrenci cevaplarından birkaçı bilgisayar ortamında taranarak, cevaplar aşağıdaki tabloda verilmiştir.

**Tablo 2.** Alt vektör uzayı tanımını yapabilen fakat problemi yanlış çözen öğrencilerin vermiş oldukları cevaplar

V bir vektör uzayı ve W, V'nın baştan farklı bir alt kümesi, $u, v \in W$ $c \in R$ iken

$cu + v \in W$ ise W'ya V'nın alt vektör uzayı denir.

$u, v \in W$ ve $c \in R$ için $c.u + v \in W$ olduğunu göstermeliyiz

$u = \sum_{i=1}^{n} u_i$, $v = \sum_{i=1}^{n} v_i$ ($u, v \in W$ olduğundan)

$c.u + v = c\sum_{i=1}^{n} u_i + \sum_{i=1}^{n} v_i$

$= cu_1 + cu_2 + \dots + cu_n + v_1 + v_2 + \dots + v_n$

$= cu_1 + v_1 + cu_2 + v_2 + \dots + cu_n + v_n$

$c.u + v = \sum_{i=1}^{n} (cu_i + v_i) \in W$

O halde $cu + v \in W$ olup W bir alt vektör uzayıdır

---

W F cismi üzerinde bir V vektör uzayının baştan farklı bir alt kümesi olmak üzere W V deki işlemlere göre vektör uzayı oluyorsa W'ya V'nın bir alt vektör uzayı denir

Yani $u, v \in V$ ve $c \in F$ için

$cu + v \in W$ oluyorsa W V'nin alt vektör uzayıdır

$W = \{(x_1, x_2, \dots, x_n)\} \in R^n : \sum_{i=1}^{n} \}$ kümesi $R^n$'in alt vektör uzayı mıdır?

$u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ $v = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ $c \in F$ için

$cu + v = c(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n)$ $c \in F$

$= cx_1 + cx_2 + \dots + cx_n + y_1 + y_2 + \dots + y_n$

$= cx_1 + y_1 + cx_2 + y_2 + \dots + cx_n + y_n \in W$

$= c\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i \in W$ olup $R^n$ in alt vektör uzayıdır.

---

Tablo 2 incelendiğinde öğrencilerin alt vektör uzayı ile ilgili örnek probleminin çözümünü içselleştiremedikleri söylenebilir. Çünkü verilen örnek problemin çözümünün son kısmında $\sum_{i=1}^{n}(cx_i + yi) = 0$ bulunması neticesinde bu sonlu toplam $W$ kümesinin bir elemanı olmaktadır. Yoksa $\sum_{i=1}^{n} x_i$ ve $\sum_{i=1}^{n} y_i$ elemanlarının $W$ kümesinin elemanları olması $\sum_{i=1}^{n}(cx_i + yi)$ toplamının da $W$ kümesinin bir elemanı olmasını gerektirmeyeceği açıktır. Öğrenciler problemin çözümünü kavramsal olarak anlamadıklarından örnek problemin çözümündeki bu fark ile verilen problemin çözümündeki farkı ayırt edememişlerdir. Bu problemi öğrencilerin yanlış çözmelerinin altında yatan nedenlerden bir diğeri ise; öğrencilerin verilen $W$ kümesinin aslında küme özelliği taşımadığının farkına varamamalarıdır. Çünkü kümenin en belirgin özelliği "iyi tanımlanmış" olmasıdır. Öğrenciler sadece işlemler üzerine yoğunlaştıkları için verilen işlem dışında kalan bütün matematiksel kavramları yok saymışlardır. Halbuki kavramın kendisi tam olarak anlaşılmadan, bu kavramların bazı özelliklerini içeren işlemlerin yürütülmesinin öğrencilerin muhakeme yeteneklerinin gelişmesine katkı sağlayamayacağı açıktır.

## 4. ÖNERİLER

- Öğrencilerin herhangi bir matematik konusunu işlemsel öğrenmeleri yerine kavramsal öğrenmelerine önem verilmelidir.
- Öğrencilerin problemin çözümünü içselleştirmelerine imkan sağlanmalı ve problem çözümlerinde öğrencilere yeterince zaman verilmelidir. Öğrencilerin en kısa sürede doğru cevabı bulma kaygılarından uzaklaştırılması gerekmektedir.
- Öğrencilere matematiksel muhakeme yeteneği kazandırılmaya çalışılmalı ve yapılan çözümlerin işlemleri üzerine yoğunlaşmaları yerine işlemi açıklayan kavramın kazandırılmaya çalışılması gerekmektedir.

- Öğrencilerin yapılan veya yaptıkları her işlemin nedenini sorgulayacak kadar eleştirisel düşünceye sahip olmalarına önem verilmeli ve eğitimciler bu konuda öğretimin her kademesindeki öğrencilerin kendi matematiksel düşüncelerini rahatça açıklamalarına izin veren ortamlar oluşturmalılardır.

## KAYNAKÇA

Baki, Adnan, 1998. Matematik Öğretiminde İşlemsel ve Kavramsal Bilginin Dengelenmesi, Atatürk Üniversitesi 40.Kuruluş Yıldönümü Matematik Sempozyumu, Özel Sayı, s.250-258, Erzurum.

Baki, Adnan, 1997. Educating Mathematics Teachers, Medical Journal of Islamic Academy of Science, Vol. 10 (3).

Baykul, Yaşar, 1999. İlköğretimde Matematik Öğretimi, 3. Baskı, Anı Matbaacılık, Ankara, s.5-30.

Gravemeijer, Koeno, and Doorman, Michiel 1999. Context Problems in Realistic Mathematics Education: A Calculus Course as an Example, Educational Studies in Mathematics 39, p. 111-129.

Hacısalihoğlu, H.Hilmi, 1998. "Sempozyum Açılış Konuşması", Atatürk Üniversitesi 40.Kuruluş Yıldönümü Matematik Sempozyumu, Özel Sayı, Mayıs, Erzurum

Hiebert, James and Lefevre, Patricia., 1986. Conceptual and Procedural Knowledge In Mathematics: An Introductory Analysis, In J. Hiebert (Eds.), Conceptual And Procedural Knowledge: The Case Of Mathematics. (pp. 1-27). Hillsade, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Işık, Ahmet, 2002. Lineer Cebir, Atatürk Üniversitesi Yayınları No: 885, (3. Baskı), s.31, Erzurum.

Işık, Ahmet, 2004. Çözümlü Lineer Cebir, Bakanlar Matbaacılık, s.32, Erzurum

İşleyen, Tevfik, and Işık, Ahmet, 2003. Conceptual Knowledge in Mathematics Education, Journal of The Korea Society of Mathematical Education Series: D Research in Mathematical Education, Vol. 7 (2), p.91-99.

McCormick, Robert, 1997. Conceptual and Procedural Knowledge, International Journal of Technology and Design Education, Vol. 7, p141-159.