İstatistik Araştırma Dergisi Cilt 02 No 01 Sayfa 1-9 Nisan 2003

Eksik Blok Düzenlerinin Dual Yapıları

Hülya BAYRAK*

ÖZET

Nesnelerin belirli kriterler altında düzenlenmesi problemi kombinatöriyel analizde önemli bir yer tutar. Böyle bir düzenleme isabet yapısı yada konfigürasyon olarak bilinir. İsabet yapılarının özel bir tipi tamamlanmamış blok düzenleridir.

Bir düzenin duali işlemleri ve blokları sırasıyla orijinal düzenin bloklarına ve işlemlerine karşılık gelen yeni bir düzendir.

Bu çalışmanın amacı bazı dual düzenlerin geometrik yapılarını incelemektedir. Bu dual düzenler tamamlanmamış blok düzenler sınıfındadır.

Anahtar Kelimeler : *Dual Düzen, Dengeli Tamamlanmamış Blok Düzeni, Kalıntı Düzen, Projektif Geometri.*

1. GİRİŞ

Bir taktikal konfigurasyon (tactical configuration) TC(v, k, t, λ), v tane elemanın k genişliğe sahip bloklara yerleştirilmesidir.Bu yerleştirmede, farklı elemanlara sahip t×1 boyutlu sütun vektörleri (t-tuple) tam olarak λ blokta gözükür. t ve λ sırasıyla, konfigurasyonun kuvveti ve indeksi olarak bilinir.

t=2 durumu "Dengeli Tamamlanmamış Blok Düzeni"(Balanced Incomplete Block Design-BIBD) ne karşılık gelir. Bu düzenlerde $v \geq 2$ işlem vardır. b, blok sayısı; k, blok genişliği; r, replikasyon sayısı; λ (λ>0), işlemlerin birlikte görünme sayısı olmak üzere parametreler arasında $\lambda(v-1)=r(k-1)$ ilişkisi vardır.

Böyle bir düzende, A, isabet matrisi olmak üzere

$$A\,J_b = r\,J_{v\mathrm{x}b}$$
$$J_v\,A = k\,J_{v\mathrm{x}b}$$

eşitlikleri sağlanır, burada J_i tüm elemanları 1 olan uygun boyutlu matristir. A^T gözönüne alındığında ,

$$J_b\,A^T = r\,J_{b\mathrm{x}v}$$
$$A^T\,J_v = k\,J_{b\mathrm{x}v}$$

* Gazi Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü, Ankara, Türkiye

yazılabileceği aşikardır. Yani A^T matrisi, b, v, k, r parametreli bir blok düzeninin isabet matrisi olacaktır. Bir düzenin duali, işlemleri ve blokları, sırasıyla, orijinal düzenin, blokları ve işlemlerine karşılık gelen yeni bir düzendir.

2. EKSİK BLOK DÜZENLER VE DUALLERİ

Bir düzenin dual düzeni işlemleri ve blokları sırasıyla, orijinal düzenin blokları ve işlemlerine karşılık gelen yeni bir düzendir. BIBD'da $v \leq b$ Fisher eşitsizliği sağlanır. Ancak dual düzenlerde bloklar ve işlemlerin rolleri değiştiğinden Fisher eşitsizliği sağlanmayabilir. Netice olarak, dual düzen dengeli olmayabilir.

BIBD'de v = b ise, düzen simetriktir denir (Simetrik BIBD).
TC(v, k, k, λ) konfigurasyonunun duali k-sınıflı birliktelik yapısını tanımlar. Bu birliktelik yapıları geometrik özelliklerin terimleriyle karakterize edilebilir.

Bir BIBD, sonlu projektif geometri PG(m, p^n) ve sonlu öklid geometri EG(m, p^n) de uygun doğruların seçimi ile bir geometrik konfigurasyonla tanımlanabilir.

Çalışmada, PG(m, p^n)'nin doğruları ile düzenin blokları, PG(m, p^n)'nin noktaları ile düzenin işlem ve/veya işlem kombinasyonları eşleştirilmiştir.

PG(m, p^n)'nin doğruları bir uzay oluşturur. Her doğru bir bloğa karşılık geldiğinden, uzaya "bloklar uzayı" denebilir. Doğrular üzerindeki noktaların oluşturduğu uzay ile bloklar uzayı birbirinin dual uzayları olur.

Teorem 2.1: Bir BIBD'nin dualinin yine BIBD olabilmesi için gerek ve yeter koşul v =b olmasıdır (Street and Street ,1987).

Shrikhande, $\lambda = 1$ veya $\lambda = 2$ durumu için asimetrik BIBD'nin duallerinin kısmi dengeli tamamlanmamış blok düzeni olduğunu göstermiştir (Shrikhande, 1952).

Aynı sonuçlar, Shrikhande ve Bahagwandas tarafından graf teori ile ilişkilendirilerek yeniden ele alınmıştır (Shrikhande and Bahagwandas , 1965).

Teorem 2.2 : v, b, r, k, λ parametreli asimetrik BIBD'nin dual düzeni, aşağıdaki parametrelere sahip iki birliktelik sınıflı kısmi dengeli tamamlanmamış blok düzeni (Partially Balanced Incomplete Block Design-PBIBD) dir.

$v^* = b$, $b^* = v$, $r^* = k$, $n_1{}^* = k(r-1)$, $n_2{}^* = b-1-n_1$

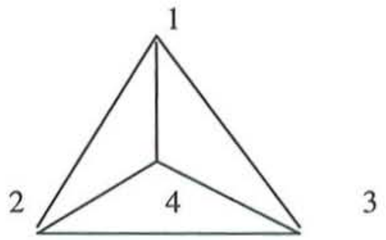
$\lambda_1{}^* = 1$, $\lambda_2{}^* = 0$, $p_{11}{}^{1*} = r-2+(k-1)^2$, $p_{11}{}^{2*} = k^2$ (Raghavarao ,1971).

Örneğin ; $v = 4$, b = 6 , k = 2 , r = 3 , $\lambda = 1$ parametreli bir BIBD'nin birliktelik yapısı aşağıdaki gibidir :

Tablo 1. $v=4$, $b=6$, $k=2$, $r=3,\lambda=1$ Parametreli BIBD

	BLOKLAR					
İŞLEMLER	1	2	3	4	5	6
1	x		x		x	
2	x			x		x
3		X	x			x
4		x		x	x	

Bu düzenin geometrik yapısı GF(2) üzerine kurulan sonlu öklid geometrisi EG(2, 2) dir.



Şekil 1. Tablo 1' deki Düzenin EG(2,2) de Bir Gösterimi

Tablo 1 de verilen düzenin dual düzenine ait birliktelik yapısı aşağıdaki gibidir

Tablo 2. Dual Düzenin Birliktelik Yapısı

	BLOKLAR			
İŞLEMLER	1	2	3	4
1	X	x		
2			x	x
3	X		x	
4		x		x
5	X			x
6		x	x	

$\lambda_1^* = 1$	$\lambda_2^* = 0$
(1 , 3)(1 , 4)(1 , 5)(1 , 6)	(1 , 2)
(2 , 3)(2 , 4)(2 , 5)(2 , 6)	(2 , 1)
(3 , 1)(3 , 2)(3 , 5)(3 , 6)	(3 , 4)
(4 , 1)(4 , 2)(4 , 5)(4 , 6)	(4 , 3)
(5 , 1)(5 , 2)(5 , 3)(5 , 4)	(5 , 6)
(6 , 1)(6 , 2)(6 , 3)(6 , 4)	(6 , 5)

Tablo 4 de verilen düzen $v^* = 6$, $b^* = 4$, $r^* = 2$, $k^* = 3$, $\lambda_1^* = 1$, $\lambda_2^* = 0$, $n_1^* = 4$, $n_2^* = 1$, $p_{ij}^{1*} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $p_{ij}^{2*} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ parametrelerine PBIBD 'dir.

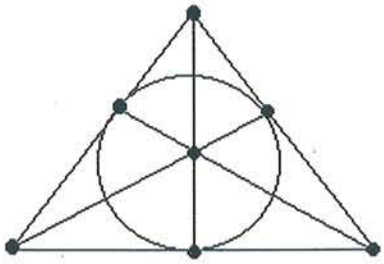
Tanım 2.1 : Bir G grafında birleştirilmiş olan iki köşenin her ikisi tam p_{11}^{1} tane diğer köşelerle birleştirilmiş , fakat p_{11}^{2} tanesi ile birleştirilmemiş ise, G grafı , n_1, n_2, p_{11}^{1}, p_{11}^{2} parametreli "Güçlü Düzgün Graf"(Strongly Regular Graph-SRG) adını alır (Bose, 1963).

Tanım 2.2 : SRG, aşağıdaki parametrelere sahip ise "Bağlantılı Blok Graf" (Linked Block graph-LBG) adını alır (Bose, 1963).

$$n_1 = r(k-1) \quad , \quad n_2 = (k-r)(r-1)(k-1) / r$$
$$p_{11}^{1} = (r-1)^2 + k-2 \quad , \quad p_{11}^{2} = r^2$$

Sonuç olarak , dual düzenin birliktelik yapısı LBG'a izomorftur.

$b=v=7$, $r=k=3$, $\lambda=1$ parametreli Simetrik BIBD'i, TC(7,3,2,1) Konfigurasyonudur. Bu konfigurasyon, geometrik olarak GF(2) üzerine kurulan PG(2, 2) ile tanımlanır.Bir Fano düzlemidir.Aynı zamanda Hadamard 2-(7, 3, 1) düzeni tanımlar (ve deficiency $d = v-r(k-1)- 1 = 0$ olduğundan Steiner sistemdir).



Şekil 2. TC(7,3,2,1) Knfigurasyonunun PG (2,2) de Bir Gösterimi

TC(7,3,2,1) konfigurasyonunun tanımladığı Simetrik BIBD'nin, duali parametreleri aynı olan Simetrik BIBD dır.Dual düzenlerin izomorf olması gerekmez.

Eğer $\lambda=2$ ise simetrik TC(v,k,2,2) düzenler "Biplane" tanımlarlar. TC(7,3,2,1) konfigurasyonunun tamamlanışı olan TC(7,3,2,2) konfigurasyonu bir Biplane dir (Bayrak ve Gönen, 2002).

3. LATİS DENEME DÜZENİ VE DUAL DÜZENLERİ

Kare Latis Düzeni'nde p^n tane işlem vardır.Bunlar , p genişlikli bloklara yerleştirilir.Düzen , p düzeyli n tane etkenin oluşturduğu faktöriyel deney düzeni gibi düşünülür.

Diğer taraftan çok sayıda işlem , p yerine k genişlikli (k < p) bloklara dağıtılarak bir çözüm yolu denenebilir.Bu durumda BIBD'nından faydalanılır.

Latis düzenlerin en önemli kısmını oluşturan homojen replikasyonları elde etmenin bir yolu Duallik kavramını kullanmak olabilir (Bayrak ve Gönen , 1998).

PG (2, 3) geometrisi gözönüne alındığında, PG(2, 3) deki doğrular ve üzerindeki noktalar aşağıdaki gibidir:

Tablo 3. PG(2, 3) deki Doğrular ve Üzerindeki Noktalar

Doğru	A	B	AB	AB^2	C	AC	AC^2	BC	BC^2	ABC	ABC^2	AB^2C	AB^2C^2
	100	010	110	1-10	001	101	10-1	011	01-1	111	11-1	1-11	1-1-1
[0,0,1]	X	X	X	X									
[0,1,0]	X				X	X	X						
[0,-1,1]	X							X		X			X
[0,1,1]	X								X		X	X	
[1,0,0]		X			X			X	X				
[1,0,-1]		X				X				X		X	
[1,0,1]		X					X				X		X
[1,-1,0]			X		X					X	X		
[-1,1,1]			X				X	X				X	
[1,-1,1]				X	X							X	X
[1,1,0]			X			X			X				X
[1,1,-1]				X		X		X			X		
[1,1,1]				X			X		X	X			

Bu geometride, paralel doğru gruplarından herbirinin kapsadığı işlem ya da işlem kombinasyonları homojen replikasyonları verir. Böylece 4 homojen replikasyon elde edilir. Bu homojen replikasyonlar veya 4 tane doğru demeti, düğüm noktalarının dual uzayını meydana getirir. Dolayısıyla, bir homojen replikasyon, geometrik anlamda düğüm noktası çıkarılmış doğrular demetidir. Homojen replikasyonlar öyle bloklar oluşturur ki bu bloklar EG(2,3) geometrisinin tüm özelliklerini sağlar. Böyle bir geometrik yaklaşımla, blok yapma keyfi ve yanlış olmaz. Düğüm noktaları çıkarılmış doğru demetlerinin paralellik özelliğinden, hangi bloğa hangi kombinasyonun gireceği bellidir. Homojen replikasyonlar aşağıdaki gibidir :

Homojen Replikasyon 1

(1 0 0)	(1 1 0)	(1-1 0)	A	AB	AB^2
(1 0-1)	(1 1-1)	(1-1-1)	AC^2	ABC^2	AB^2C^2
(1 0 1)	(1 1 1)	(1-1 1)	AC	ABC	AB^2C

Homojen Replikasyon 2

(1 0 0)	(1 0 1)	(1 0-1)	A	AC	AC^2
(1-1 1)	(1-1-1)	(1-1 0)	AB^2C	AB^2C^2	AB^2
(1 1 0)	(1 1 1)	(1 1-1)	AB	ABC	AB^2C

Homojen Replikasyon 3

(1 0 0)	(1 1 1)	(1-1-1)	A	ABC	AB^2C
(1-1 0)	(1 0 1)	(1 1-1)	AB^2	AC	ABC^2
(1 1 0)	(1 0-1)	(1-1 1)	AB	AC^2	AB^2C

Homojen Replikasyon 4

(1 1 1)	(1-1 0)	(1 0-1)	ABC	AB^2	AC^2
(1 0 0)	(1-1 1)	(1 1-1)	A	AB^2C	ABC^2
(1 1 0)	(1 0 1)	(1-1-1)	AB	AC	AB^2C^2

Tanım 3.1 : (s , r , μ)-net : $\mathcal{T}$, bir isabet yapısı olsun.B ve G , $\mathcal{T}$ yapısının iki bloğu olmak üzere bu yapı üzerindeki paralellik , B // G , B = G , veya |B , G| =0 olarak tanımlanır. $\mathcal{T}$ yapısının (s, r, μ)-net oluşturabilmesi için $v = s^2\mu$ sayıda nokta , b = sr sayıda blok olmalıdır, her paralel sınıfta s blok ve her blokta k=μ nokta bulunmalıdır.Eğer B // H ise | B , H | = μ ve ayrıca ;

(1) Paralel sınıflar $s \geq 2$ bloğa sahip ve $r \geq 3$ paralel sınıf var ise ,

(2) p, q∈ $\mathcal{T}$ herhangi iki nokta ($p \neq q$) olmak üzere I p , q I = 0 veya I p , q I = λ ise

$\mathcal{T}$ yapısı "Afin Çözülebilir Kısmi Düzlem" (Affine resolvable partial plane-ARPP) veya (s, r, μ)-ARPP olarak adlandırılır (Drake, 1979).

Bu yapılar, Bruck tarafından tanıtılan (s, r, 1)-netlerinin genelleştirilmiş halidir. (s, r, μ)-netlerin duallerinin Transversal düzenler olduğu Hanani tarafından gösterilmiştir (Hanani , 1974).

Verilen homojen replikasyonlar quasi simetrik, (s, r, 1)-net yapısına uyar (λ=μ hali).Yani quasi simetrik ARPP'dir. Deficiency; d = 0 olduğundan (d=r-k+1) Afin düzleme karşılık gelir (Bayrak ve Gönen, 2002). Bu replikasyonlar aynı zamanda Afin yeniden çözülebilirdir.

Homojen replikasyonların duali dikkate alındığında, düğüm noktalarının oluşturduğu uzayın dual uzayı T(4,1,3) transversal düzeninin transversal gruplarını meydana getirir. Bu gruplar aşağıdaki gibidir.

G_1 : [0 1 0] : (0 0 1) (1 0 1) (1 0-1) → C , AC , AC^2

G_2 : [0 0 1] : (0 1 0) (1 1 0) (1-1 0) → B , AB , AB^2

G_3 : [0 1 1] : (0 1-1) (1 1-1) (1-1 1) → BC^2 , ABC^2 , AB^2C

G_4 : [0 1-1] : (1 1 1) (0 1 1) (-1 1 1) → ABC , BC , AB^2C^2

4 tane transversal grup mevcuttur.Bu transversal düzen , parametreleri v=12, b = 9 , k = 4 , r = 3 , $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ olan yarı-düzgün gruplarına ayrılabilen düzene (semi-regular group divisible-SRGD) izomorftur.

Teorem 3.1 : Transversal düzenler, Afin düzenlerin dualidir (Mavron, 2000).

Dual yapıların, Bose ve Connor tarafından tanımlanan SRGD'nin özel haline karşılık geldiği görülür (Drake, 1979).

Dual düzenin geometrik yapısı pseudo SLBG'a (pseudo Strongly Linked Block Graph) izomorftur.

Teorem 3.2 : $(\beta\ (\gamma(\beta-1)+1)\ ,\ \beta\gamma+1\ ,\ \beta k)$ parametreli bir Afin çözülebilir düzeninin dualinin parametreleri aşağıdaki gibidir :

$$v = \beta\ (\gamma\beta^2+\beta+1)\ ,\quad b = \beta^2(\gamma(\beta-1)+1)\ ,\quad r = \beta(\gamma(\beta-1)+1)\ ,$$

$$k = \beta^2\gamma+\beta+1\ ,\quad m = \beta^2\gamma+\beta+1\ ,\quad n\ ,\quad \lambda_1 = 0\ ,\quad \lambda_2 = \gamma(\beta-1)+1$$

Bazı düzgün gruplarına ayrılabilen (regular group divisible-RGD) düzenlerin dualleri yine GD düzenlerdir. RGD düzen orijinal düzene izomorfik olabilir.

4. KALINTI DÜZENLER, BİPLANE VE DUAL DÜZENLERİ

Bir kalıntı düzen (residual design) PG(2,q) dan herhangi bir doğrunun çıkarılmasıyla kurulabilir.Yeni düzen bir EG(2 , q) olur. Benzer bir sonuç Biplane(λ=2) lerin kalıntı düzenlerinin dualleri gözönüne alınarak bulunabilir.

Bir biplane $v = b = (n^2+3n+4)/2$, $r = k = n+2$, $\lambda = 2$ parametrelerine sahip BIBD ise, kalıntı düzen

$v = n(n+1)/2$, $b = (n+1)(n+2)/2$, $r = n+2$, $k = n$, $\lambda = 2$ parametrelerine sahiptir.

Teorem 4.1: $v = n(n+1)/2$, $k = n$, $\lambda = 2$ parametreli bir düzen alınsın, Dual düzen aşağıdaki parametrelere sahip bir PBIBD dir.

$$v^* = (n+1)(n+2)/2\ ,\quad b^* = n(n+1)/2\ ,\quad r^* = n\ ,\quad k^* = n+2$$

$$n_1 = 2n\ ,\quad n_2 = n(n-1)/2\ ,\quad \lambda_1 = 1\ ,\quad \lambda_2 = 2\ ,\quad p_{11}^{\ 1} = n\ ,\quad p_{11}^{\ 2} = 4$$

TC(7,4,2,2) konfigurasyonu $v = b = 7$, $r = k = 4$, $\lambda = 2$ parametreli BIBD tanımlar.Geometrik olarak Biplane dir.Bu parametrelere sahip Biplane ile ilişkili grafların seti , Hussain graflarının tam setini verir.Bu sette $(k-1)(k-2)/2 = 3$ tane graf vardır.Residual düzen ise $v = 3$, $b = 6$, $k = 2$, $\lambda = 2$ parametreli bir yapıdır (Bayrak ve Gönen, 2002).

Kalıntı düzenin duali düşünüldüğünde ,

$$v^* = 6\ ,\quad b^* = 3\ ,\quad r^* = 2\ ,\quad k^* = 4\ ,\quad \lambda_1 = 1\ ,\quad \lambda_2 = 2\ ,$$

$$n_1 = 4\ ,\quad n_2 = 1\ ,\quad p_{11}^{\ 1*} = 2\ ,\quad p_{11}^{\ 2*} = 4$$

parametreli Üçgensel PBIBD (Triangular PBIBD) elde edilir.

Sonuç olarak, üçgensel düzenler, λ=2 için SBIBD'lerin kalıntı düzenlerinin dualleri gibi düşünülür.

KAYNAKLAR

BAYRAK, H. ve GÖNEN, S. (1998) , *Sanal Deney Düzeninde Dualite*, İstatistik Konferansı, Gazi Üniv., ss 245-250.

BAYRAK, H. ve GÖNEN, S. (2002), *The Geometrical Structures of Some Dual Designs,* İstatistik Günleri 2002 Sempozyumu, Hacettepe Üniversitesi.

BOSE, R. C. (1963) , *Strongly Regular Graphs, Partial Geometries and Partially Balanced Designs,* Pacific. J.of Maths., 13, pp 389-419.

DRAKE, A. D. (1979), *Partial λ-Geometries and Generalized Hadamard Matrices Over Groups,* Can. J. Math., Vol. 31, No:3, pp 617-627.

HANANI, H. (1974) , *On Transversal Designs, Proceedings of the Advanced Study Institute On Combinatorics,* Breukelen, Math. Centre Tract 55, Amsterdam, pp 42-52.

MAVRON, V. C. (2000), *Frequency Squares and Affine Designs,* The Electronic Journal of Combinatorics 7, R56, pp 1-6.

RAGHAVARAO, D. (1971) , *Constructions and Combinatorial Problems in Design of Experiments* , Dover Publications, Inc. , New York.

STREET, A. P. and STREET, D. J. (1987) , *Combinatorics of Experimental Design*, Oxford Univ. Press,

SHRIKHANDE, S.S. (1952), *On The Dual of Some Balanced Incomplete Block Designs* , Biometrics , 8 , pp 66-72.

SHRIKHANDE, S.S. and BAHAGWANDAS, (1965), *Dual of Incomplete Block Designs,* J. Indian Stat. Assn., 3, pp 30-37.

The Dual Structure Of Incomplete Block Designs

ABSTRACT

The problem of arranging object so that cetain criteria are fulfilled is of great generality in combinatorial analysis. Such an arrangement is known as an incidence system or tactical configuration. A special type of incidence system is balanced incomplete block design(BIBD).

The dual of a design is defined as a new design whose treatments and blocks are correspondance with blocks and treatments of the original design,and incidence is preserved.

Purpose of this study is to work on geometrical structure of some dual designs. These dual designs are members of class of the incomplete block design.

Key Words : *Dual Design, Balanced Incomplete Block Design, Projective Geometry, Residual Design.*