Çankırı Karatekin Üniversitesi
*Karatekin Üniversitesi Fen Fakültesi Dergisi*
ISSN:2980-0730
Yıl:**2023**, Cilt:**02**, Sayı:**1**, Sayfa:**1-6**

Çankırı Karatekin University
*Karatekin University Journal of Science*
ISSN:2980-0730
Yıl:**2023**, Cilt:**02**, Sayı:**1**, Sayfa:**1-6**

# Gama-kararsız Bölgede Kratzer Potansiyeli İçeren Bohr Hamiltoniyeninin Analitik Çözümü

## Analytical Solution of the Bohr Hamiltonian with the Kratzer Potential in Gamma-unstable Region

**Yılmaz Hassan Mustafa MUSTAFA**[1]

**Eser Bilgisi / Article Info**
Araştırma makalesi / Research article

Geliş tarihi / Received
28.05.2023
Kabul tarihi / Accepted
09.06.2023
Yayın tarihi / Published
30.06.2023

**Anahtar kelimeler**
Kollektif model, gama-kararsız bölge, çift-çift çekirdekler, Kratzer potansiyeli

**Keywords**
Collective model, gamma-unstable region, even-even nuclei, Kratzer potential

**Özet**

Bu çalışmada, gama-kararsız bölge için Kratzer potensiyeli içeren Kollektif Bohr Hamiltoniyeni'nin analitik çözümleri, ilk defa Nikiforov-Uvarov metodu kullanılarak yapılmıştır. Enerji özdeğer denklemi kapalı formda elde edilmiş ve $^{102-116}$Pd izotoplarının deneysel enerji değerlerini tahmin etmek için uygulanmıştır. Deney ve teori arasında iyi bir uyum olduğu görülmüştür.

**Abstract**

In this study, the analytical solution of the Collective Bohr Hamiltonian with the Kratzer potential for the gamma-unstable region has been done for the first time by using the Nikiforov-Uvarov method. The energy eigenvalue equation was obtained in a closed form and applied to predict the experimental energy data of $^{102-116}$Pd isotopes. It was seen a good agreement between theory and experiment.

## 1. GİRİŞ

Nükleer yapı çalışmalarının yoğunlaştığı konularından biri, orta-ağır ve ağır kütle numarası bölgesinde bulunan çift sayıda proton ve nötron içeren çekirdeklerin deneysel uyarılma enerji spektrumları ile durumlar arası elektromanyetik multipol geçiş oranlarının teorik olarak tahmin edilmesidir. Uyarılma spektrumunda incelenen en önemli veri, taban durum bandında ikinci uyarılmış durumun enerjisinin birinci uyarılmış durumun enerjisine oranı yani $R_{4/2}$ değeridir. Bu oran, kollektivitenin henüz başlamadığı veya düşük olduğu çekirdeklerde 2.0 civarında değer alırken nükleon sayısı arttıkça önce 2.5 ve sonra 3.33 civarında yoğunlaşmaktadır (Casten 2006). Deneysel olarak gözlenen bu limit değerler sırasıyla Harmonik Osilatör, Gama-kararsız Rotor ve Prolate deforme Rotor yapılarına karşılık gelmektedir.

Son yıllarda yapılan çalışmalarda, yukarıda verilen limit yapılar arasında çekirdek şekillerinde ani veya yavaş şekil değişiklikleri olduğu gösterilmiştir (Iachello 2000, 2001). Şekillerin değişiminin gerçekleştiği ve kritik nokta adlandırılan noktalarda atomik çekirdeklerin özellikleri, Bohr Hamiltoniyeni'nde sonsuz-kuyu potansiyeli kullanılarak serbest parametreden bağımsız olarak elde edilmiştir. Deneysel olarak da karşılığı gösterilen bu çalışmalar sonrası araştırmacılar, kritik nokta civarında yapı sergileyen çekirdeklerin uyarılma

[1]hassanin789@gmail.com (Corresponding Author)
[1]Çankırı Karatekin Üniversitesi, Fen Fakültesi, Fizik Bölümü, Çankırı, Türkiye

enerji spektrumu ve uyarılmış durumlar arası elektromanyetik multipol geçişleri gibi deneysel özelliklerini teorik olarak açıklama üzerine yoğunlaşmışlardır.

Atomik çekirdeklerin uyarılma enerji spektrumlarını teorik olarak elde etmenin çeşitli yol ve yöntemleri vardır. İncelenen çekirdekler deforme yapıda oldukları için, bu yapıyı en iyi tasvir eden Kollektif Model kullanılmaktadır. Bohr tarafından önerilen bu modelin hamiltoniyeninde yani deformasyon parametrelerine bağlı olarak yazılan Schrödinger denkleminde farklı potansiyel enerjiler kullanılarak analitik veya nümerik çözümler elde edilmektedir.

Şimdiye kadar Coulomb ve Kratzer (Fortunato ve Vitturi 2003), Davidson (Bonatsos *vd.* 2007), Morse (Boztosun *vd.* 2008) gibi farklı potensiyeller Kollektif Bohr Hamiltoniyeni'nde kullanılmış hem 1. mertebe faz geçişi için kritik nokta X(5) hem de 2. mertebe faz geçişi için kritik nokta E(5) civarındaki bölgelerde analitik çözümleri elde edilmiştir.

Bu çalışmada Kratzer potansiyeli içeren Bohr Hamiltoniyeni'nin gama-kararsız bölge için analitik çözümü, Nikiforov-Uvarov (NU) metodu uygulanarak elde edilmiştir. Makalenin genel hatları şu şekildedir: 2. bölüm, Schrödinger denklemi çözümünde kullanılan NU modeline ayrılmıştır. Kratzer potansiyeli kullanılarak elde edilen Schrödinger denklemi ve çözümü ile $^{102-116}$Pd izotopları için elde edilen teorik sonuçların deneysel verilerle karşılaştırılması son bölümde verilmiştir.

## 2. Nikiforov-Uvarov (NU) Metodu

Bir çok teorik fizik problemlerinde karşımıza çıkan diferansiyel denklem (Nikiforov ve Uvarov 1988)

$$\psi''(s) + \frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)}\psi'(s) + \frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)}\psi(s) = 0 \; . \tag{1}$$

formundadır. Burada $\tilde{\tau}(s)$ en fazla birinci-mertebe, σ(s) ve $\tilde{\sigma}(s)$ ise en fazla ikinci-mertebe polinomdurlar. Denklemi daha da basitleştirmek için sırasıyla en fazla birinci- ve ikinci-mertebe polinomlar olan aşağıdaki parametreler tanımlanır,

$$\pi(s) = \frac{1}{2}[\tau(s) - \tilde{\tau}(s)] \; . \tag{2}$$

$$\bar{\sigma}(s) = \tilde{\sigma}(s) + \pi^2(s) + \pi(s)[\tilde{\tau}(s) - \sigma'(s)] + \pi'(s)\sigma(s) \; . \tag{3}$$

$\pi(s)$ öyle seçilir ki $\lambda$ bir sabit olmak üzere $\bar{\sigma}(s) = \lambda\,\sigma(s)$ olarak ifade edilir. $\pi(s)$ ve $\lambda$ değerlerini belirlemek için $k = \lambda - \pi'(s)$ ve

$$\pi(s) = \frac{\sigma'(s)-\tilde{\tau}(s)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma'(s)-\tilde{\tau}(s)}{2}\right)^2 - \tilde{\sigma}(s) + k\sigma(s)} \; . \tag{4}$$

Burada $\pi(s)$ bir polinomdur ve karekök işareti içindeki ifadenin de poloninom olması gerekir ki ancak diskriminantı sıfır olması ile gerçekleşir. Böylece $k$ belirlenerek istenen çözüm elde edilir.

## 3. Kratzer potansiyeli içeren Bohr Hamiltoniyeni'nin Çözümü

Deforme sistemler için tanımlanan en genel Bohr Hamiltoniyeni (Bohr 1952)

$$H_B = -\frac{\hbar^2}{2B}\left[\frac{1}{\beta^4}\frac{\partial}{\partial\beta}\beta^4\frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{1}{\beta^2 \sin 3\gamma}\frac{\partial}{\partial\gamma}\sin 3\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma} - \frac{1}{4\beta^2}\sum_{\kappa=1}^{3}\frac{Q_\kappa^2}{\sin^2\left(\gamma-\frac{2\pi}{3}\kappa\right)}\right] + V(\beta,\gamma) \; . \tag{5}$$

ile verilir. Burada B kütle parametresi olup sabittir. $\beta$ ve $\gamma$, atomik çekirdeğin deformasyonunu tanımlayan kollektif koordinatlar ve $Q_k^2$'lar ise k=1,2,3 olmak üzere açısal momentum bileşenlerini göstermektedir. Dalga fonksiyonu ise $\Psi(\beta,\gamma,\theta_i) = f(\beta)\Phi^L_{M,K}(\gamma,\theta_i)$ ile tanımlanır. γ-kararsız yapı sergileyen çekirdekler için $V(\beta,\gamma)$ potansiyel enerji terimi γ açısından bağımsızdır ve hamiltoniyenin açısal kısmı, aşağıda verildiği gibi enerjiye sabit bir katkı sağlar.

$$\left[\frac{1}{sin3\gamma}\frac{\partial}{\partial\gamma}\, sin3\gamma\, \frac{\partial}{\partial\gamma} - \frac{1}{4}\sum_k \frac{Q_k^2}{\sin\left(\gamma-\frac{2\pi}{3}k\right)^2}\right]\phi(\gamma,\theta) = -\hat{\Lambda}^2\,\phi(\gamma,\theta)\ . \tag{6}$$

Burada $\hat{\Lambda}^2$ Casimir operatörüdür ve açısal momentum L ile ilişkisi $\hat{\Lambda}^2 = \tau(\tau+3)$, $\tau = 3v_\Delta - \lambda$ , $L = \lambda, \lambda+1, \lambda+2, \ldots, 2\lambda-2, 2\lambda$ (2λ-1 hariç) ile verilir (Wilets ve Jean 1956). Kütle parametresi sabit olduğu için $u(\beta) = \frac{2B}{\hbar^2}\,U(\beta)$ ve $\varepsilon = \frac{2B}{\hbar^2}\,E$ indirgenmiş potansiyel ve indirgenmiş enerji terimleri ile tanımlanırsa Denk.(5),

$$\left\{-\frac{1}{\beta^4}\frac{\partial}{\partial\beta}\,\beta^4\,\frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{\tau(\tau+3)}{\beta^2} + u(\beta)\right\} f(\beta) = \varepsilon\, f(\beta)\ . \tag{7}$$

formuna indirgenir. Bu çalışmada kullanılan Kraztzer potansiyeli (Kratzer 1920), $D$ ve $\beta_0$ sırasıyla potansiyelin derinliği ve minimum olduğu noktanın koordinatı olmak üzere

$$u_k(\beta) = -2D\left(\frac{\beta_0}{\beta} - \frac{\beta_0^2}{2\beta^2}\right)\ . \tag{8}$$

şeklinde tanımlanır. $2D\beta_0$ = A ve $\tau(\tau+3) + D\beta_0^2 = C$ parametreleri tanımlanırsa Denk.(7)'nin son hali

$$f''(\beta) + \frac{4}{\beta}f'(\beta) + \left(\frac{\varepsilon\beta^2 + A\beta - C}{\beta^2}\right) f(\beta) = 0\ . \tag{9}$$

olarak elde edilir. Bu form, NU modelinde tanımlanan Denk.(1) ile karşılaştırıldığında

$$\tilde{\tau}(\beta) = 4, \qquad \sigma(\beta) = \beta,\ \tilde{\sigma}(\beta) = \varepsilon\beta^2 + A\beta - C. \tag{10}$$

polinomları elde edilir.

$$\pi(\beta) = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{-\varepsilon}\sqrt{\beta^2 + \left(\frac{A-k}{\varepsilon}\right)\beta - \left(\frac{c+\frac{9}{4}}{\varepsilon}\right)}\ . \tag{11}$$

Kök içerisindeki polinomun diskriminantının sıfır olması nedeniyle $k_+ = A + \sqrt{-4\varepsilon(c+9/4)}$ ve $k_- = A - \sqrt{-4\varepsilon(c+9/4)}$ değerleri bulunur. Burada tanımlanan enerji bağlı durumlara karşılık geldiği için negatiftir. NU metoduna göre , $k = \lambda - \pi'(s)$ ve $\lambda_n = -n\tau'(s) - \frac{n(n-1)}{2}\sigma'(s)$ olarak tanımlandığı için istenen enerji özdeğeri

$$\varepsilon = -\frac{A^2/4}{\left(n+\frac{1}{2}+\sqrt{\left(\tau+\frac{3}{2}\right)^2 + D\beta_0^2}\right)^2}\ . \tag{12}$$

olarak bulunur. Bu sonuç daha önce yapılan çalışma sonucu (Fortunato and Vitturi 2003) ile uyum içindedir.

Kratzer potansiyeli iki tane serbest parametreye bağlıdır ve bu parametreler, incelenecek izotopların deneysel uyarılma enerji spektrumlarını en doğru tahmin edecek şekilde ayarlanır. Her bir izotop için deneysel taban durum enerji değerleri Mathematica programına girilerek elde edilen en iyi parametre seti, Tablo 1'de $^{102-116}$Pd izotopları için verilmiştir. Deneysel veri setini tahmin etmede kullanılan ve deney ile teori arasındaki farkı gösteren kalite faktörü **Δ** ile gösterilmiştir. Denklem(13)'te tanımlanan bu parametre, bir enerji düzeyi için teorik değer $\varepsilon_i$ ile deneysel değer $E_i$ arasındaki farkın deneysel değere oranları ile ilişkilidir. Kratzer potansiyelinin derinliğini gösteren D, enerji boyutundadır. Potansiyelin en derin noktasının konumu ise $\beta_0$ ile verilip uzunluk boyutundadır. Bu parametre seti kullanılarak elde edilen teorik sonuçların deneysel verilerle karşılaştırılması, taban durum bandı için Tablo 2 ve Tablo 3'te verilmiştir. Tablolarda verilen değerler normalize değerlerdir. Bunun nedeni, denk (12)'den açıkça görüleceği gibi taban durum durum enerjisi n=0 ve τ=0 için sıfırdan farklıdır. Fakat deneysel veriler incelendiğinde taban durum enerjisi 0'dır. Bu nedenle, teorik sonuçların deneysel verilerle sağlıklı bir karşılaştırma yapabilmek için normalize değerler kullanılır.

$$\Delta = \frac{1}{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\varepsilon_i - E_i}{E_i}\right)^2}. \quad (13)$$

**Tablo 1.** Kratzer potansiyeli parametreleri ve hata oranı.

| Isotope | D | β₀ | Δ |
|---|---|---|---|
| ${}^{102}_{46}Pd$ | 30.1 | 1.7 | 0.06501 |
| ${}^{104}_{46}Pd$ | 5.1 | 3.9 | 0.09149 |
| ${}^{106}_{46}Pd$ | 30.5 | 1.5 | 0.11258 |
| ${}^{108}_{46}Pd$ | 49.9 | 1.5 | 0.01157 |
| ${}^{110}_{46}Pd$ | 11.5 | 2.3 | 0.22606 |
| ${}^{112}_{46}Pd$ | 16.5 | 1.4 | 0.26662 |
| ${}^{114}_{46}Pd$ | 9.1 | 2.1 | 0.23990 |
| ${}^{116}_{46}Pd$ | 3.0 | 4.5 | 0.19962 |

**Table 2.** ${}^{102\text{-}108}$Pd izotoplarının hesaplanan (Teo.) taban durum bandı enerji değerlerinin deneysel verilerle (Den.) (Firestone 1996) karşılaştırılması.

| | | ${}^{102}_{46}Pd$ | ${}^{104}_{46}Pd$ | ${}^{106}_{46}Pd$ | ${}^{108}_{46}Pd$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $E(4_1^+)$ | Teo. | 2.354 | 2.339 | 2.321 | 2.383 |
| | Den. | 2.293 | 2.381 | 2.401 | 2.415 |
| $E(6_1^+)$ | Teo. | 3.932 | 3.878 | 3.816 | 4.038 |
| | Den. | 3.794 | 4.047 | 4.056 | 4.081 |
| $E(8_1^+)$ | Teo. | 5.611 | 5.491 | 5.355 | 5.854 |
| | Den. | 5.414 | 5.795 | 5.787 | 5.871 |
| $E(10_1^+)$ | Teo. | 7.293 | 7.082 | 6.848 | 7.731 |
| | Den. | 7.175 | 7.238 | 6.902 | 7.720 |
| $E(12_1^+)$ | Teo. | 8.909 | 8.588 | 8.238 | 9.592 |
| | Den. | 9.084 | 8.339 | 7.987 | 9.586 |
| $E(14_1^+)$ | Teo. | 10.420 | 9.975 | 9.498 | 11.383 |
| | Den. | 11.031 | 9.773 | 9.560 | - |
| | Teo. | 11.080 | 11.230 | 10.621 | 13.067 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $E(16_1^+)$ | Den. | - | 11.439 | 11.516 | - |
| $E(18_1^+)$ | Teo. | 13.040 | 12.340 | 11.609 | 14.626 |
| | Den. | - | 13.354 | - | - |

Tablo 2 incelendiğinde L=14 açısal momentumlu duruma kadar deneysel verilerle teorik verilerin aynı mertebede oldukları görülmektedir. Bu uyum Tablo 3'te L=10 durumuna kadar gözlenmektedir. Daha yüksek uyarılma durumları için deneysel veriler literatürde belirlenememiştir.

Bu çalışma kapsamında daha yüksek enerji seviyelerine yer verilmemiştir çünkü bilindiği gibi E(5) dinamik simetri limitinde enerji seviyeleri dejeneredir. Bununla birlikte durumların dalga fonksiyonlarının hesaplanarak uyarılmış durumlar arası elektrik kuadrupol ve manyetik dipol geçiş olasılıkları hesabı çalışılma aşamasındadır.

**Table 3.** $^{110-116}$Pd izotoplarının hesaplanan (Teo.) taban durum bandı enerji değerlerinin deneysel verilerle (Den.) (Firestone 1996) karşılaştırılması.

| | | $^{110}_{46}Pd$ | $^{112}_{46}Pd$ | $^{114}_{46}Pd$ | $^{116}_{46}Pd$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $E(4_1^+)$ | Teo. | 2.302 | 2.180 | 2.226 | 2.302 |
| | Den. | 2.462 | 2.533 | 2.560 | 2.580 |
| $E(6_1^+)$ | Teo. | 3.751 | 3.353 | 3.499 | 3.750 |
| | Den. | 4.210 | 4.447 | 4.506 | 4.581 |
| $E(8_1^+)$ | Teo. | 5.217 | 4.920 | 4.699 | 5.215 |
| | Den. | 6.142 | 4.920 | 4.896 | 5.581 |
| $E(10_1^+)$ | Teo. | 6.612 | 5.328 | 5.768 | 6.610 |
| | Den. | 6.544 | 5.045 | 5.958 | 6.581 |
| $E(12_1^+)$ | Teo. | 7.890 | 6.091 | 6.690 | 7.886 |
| | Den. | 7.465 | 5.745 | 6.202 | 7.581 |
| $E(14_1^+)$ | Teo. | 9.031 | 6.721 | 7.471 | 9.026 |
| | Den. | - | - | - | - |
| $E(16_1^+)$ | Teo. | 10.034 | 7.239 | 8.128 | 10.027 |
| | Den. | - | - | - | - |
| $E(18_1^+)$ | Teo. | 10.907 | 7.665 | 8.678 | 10.899 |
| | Den. | - | - | - | - |

## Yazar Katkıları

Yazar, makalenin son versiyonunu okuyup onaylamıştır.

## Çıkar Çatışması

Yazar, herhangi bir çıkar çatışması beyan etmemektedir.

## Kaynaklar


Bohr, A. (1952). The Coupling of Nuclear Surface Oscillations to the Motion of Individual Nucleons. Dan. Mat. Fys. Medd. 26(14).

Bonatsos, D., McCutchan, E. A., Minkov, N., Casten, R. F., Yotov, P., Lenis, D. and Yigitoglu, I. (2007). Exactly separable version of the Bohr Hamiltonian with the Davidson potential. Physical Review C, 76(6), 064312.

Boztosun, I., Bonatsos, D., and Inci, I. (2008). Analytical solutions of the Bohr Hamiltonian with the Morse potential. Physical Review C, 77(4), 044302.

Casten, R. F. (2006). Shape phase transitions and critical-point phenomena in atomic nuclei. Nature Physics, 2(12), 811-820.

Firestone, R. B. (1996). Table of Isotopes CD ROM Edition. Version 1.0 Virginia S. Shirley.

Fortunato, L., and Vitturi, A. (2003). Analytically solvable potentials for γ-unstable nuclei. Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics, 29(7), 1341.

Iachello, F. (2000). Dynamic symmetries at the critical point. Physical Review Letters, 85(17), 3580.

Iachello, F. (2001). Analytic description of critical point nuclei in a spherical-axially deformed shape phase transition. Physical Review Letters, 87(5), 052502.

Kratzer, A. (1920). Die ultraroten rotationsspektren der halogenwasserstoffe. Zeitschrift für Physik, 3, 289-307.

Nikiforov, A. V. and Uvarov, V. B. (1988). Special Functions of Mathematical Physics, Birkhauser, Bassel.

Wilets, L., and Jean, M. (1956). Surface oscillations in even-even nuclei. Physical Review, 102(3), 788.