
	<b>SAKARYA ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ DERGİSİ</b> <i>SAKARYA UNIVERSITY JOURNAL OF SCIENCE</i>		
	<b>e-ISSN: 2147-835X</b> <b>Dergi sayfası: <a href="http://dergipark.gov.tr/saufenbilder">http://dergipark.gov.tr/saufenbilder</a></b>		
	<u>Geliş/Received</u> 18.03.2017 <u>Kabul/Accepted</u> 14.06.2017	<u>Doi</u> 10.16984/saufenbilder.298755	

## Ön gerilmeli monotron tipi halatın deneysel ve teorik doğal frekans analizi

Cihan Demir<sup>\*1</sup>, Erkan Ala<sup>2</sup>

### ÖZ

Bu çalışmada farklı çaplara sahip farklı tiplerdeki tek helis açısına sahip ön gerilmeli monotron halatların doğal frekans analizi teorik ve deneysel olarak yapılmıştır. Teorik analizde daha önce çıkartılmış analitik formüllerden yararlanılmıştır. Bununla birlikte halat katı modeli oluşturularak sonlu elemanlar yöntemi ile doğal frekans analizi yapılmıştır. Deneysel çalışmada, ön gerilmeli kablunun basit mesnetli sınır şartları oluşturularak çeşitli yükler altında darbe çekici ile doğal frekans analizi gerçekleştirilmiştir. Deneysel ve teorik analizlerin sonuçları değerlendirilerek, halat doğal frekansının uygulanan ön gerilme kuvveti altında, halat çapına ve tel sayısına bağlı olarak nasıl değiştiği incelenmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** ön gerilmeli monotron halat, doğal frekans, sonlu elemanlar yöntemi

## Theoretical and experimental analysis of prestressed monotron type wire rope

### ABSTRACT

Natural frequency analysis of prestressed monotron ropes with single helix angles of different types with different diameters was theoretically and experimentally performed in this study. Analytical formulas have been used in the theoretical analysis. In addition to this, the solid model of rope was created and natural frequency analysis was performed by the finite element method. In the experimental study, the natural frequency analysis was carried out by using the impulse hammer under various loads by establishing simple supported boundary conditions of the prestressed cable. The results of the experimental and theoretical analyzes were evaluated to determine how the natural frequency of the rope changes under the pretension stress applied, depending on the diameter of the rope and the number of wires.

**Keywords:** prestressed monotron type wire rope, natural frequency, finite element method

\* Sorumlu Yazar / Corresponding Author

<sup>1</sup> Yıldız Teknik Üniversitesi Makine Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, İstanbul – cdemir@yildiz.edu.tr

<sup>2</sup> Yıldız Teknik Üniversitesi Makine Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, İstanbul – erkna@gmail.com

## 1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

Tel halatlar pek çok mühendislik uygulamasında yüksek dayanım/ağırlık oranları nedeniyle kullanılmaktadır. Büyük açıklığa sahip asma köprüler, stadyum çatıları, teleferik hatları ve vinçler gibi pek çok farklı alanda kullanılmaktadır.

Halatlarda yük taşıma kapasitesi teller arasında dağıtılmaktadır ve bunun iki faydası bulunmaktadır. Yüksek eksenel dayanım ve rijitlik ile eğilme esnekliğinin birleşimi sağlanmaktadır. Böylece esas olarak yerel kırılmalardan korunmak için yapıyı bölerek çeliğin yüksek gerilme değerlerinde kullanımına izin verir. Özellikle tellerin kırılması durumunda yerel hasarların telafi edilmesi bakımından tel halatın tokluğunun sağlanması önemlidir. Yükün halat içindeki çok sayıda tele dağıtılması nedeniyle işletme emniyeti oldukça yüksektir. Kendi ağırlıklarıyla taşıma kapasiteleri arasında uygun bir oran mevcuttur ve büyük bir elastik uzama miktarına sahiptirler. İşletme sırasında kolaylıkla gözle kontrol edilebilmeleri mümkündür [1].

Tel halatlar kullanıldıkları yapıda emniyet açısından kritik öneme sahip elemanlardır. Kablo yapılarının montajı ve bakımı esnasında uygulanacak gergi kuvvetinin doğru tespit edilmesi yapının emniyeti ve sağlıklı bir şekilde kullanımı açısından önemlidir. Kablolardaki gergi kuvvetinin tespiti statik ve dinamik yöntemler olmak üzere 2 farklı yöntemle yapılmaktadır. Statik metotta yük hücresi kullanılarak halatın gerinim ölçülmesi yapılarak buradan gergi kuvveti hesaplanmaktadır. Dinamik metotta ise kabloların titreşim frekansı ivmeölçer yardımıyla ölçülmektedir ve frekans değeri kullanılarak gergi kuvveti analitik formüle göre hesaplanmaktadır.

Tel halatların modellenmesi ve analizi ile ilgili daha önce pek çok çalışma yapılmıştır. Jiang vd. [2] tarafından yapılan çalışmada, eksenel yük altındaki tel halatın davranışını ve gerilmelerin dağılımını sonlu elemanlar yöntemi ile incelemiştir. Sonlu elemanlar modelini basitleştirmek için halatın simetrik küçük bir parçasının analizi yapılmıştır. Ghoreishi vd.[3] tarafından yapılan çalışmada basit düz tel demetlerin eksenel yük altındaki davranışını incelemek için geliştirilen analitik modeller ve daha önceden elde edilmiş olan deneysel çalışmaların sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Spak vd.[4] tel halatların davranışını incelemek için

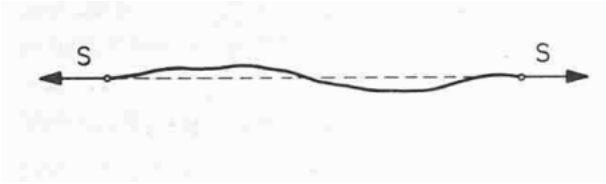
geliştirilen ince çubuk modeli, yarı sürekli model ve kiriş modeli olmak üzere 3 ana modelleme yaklaşımı incelenmiş ve bunların karşılaştırılması yapılmıştır. Stanova vd.[5-6] tel halatların geometrik modellerinin geliştirilmesi için gerekli olan matematiksel modelleri hem çift helis açısına sahip hem de tek helis açısına sahip halatlar için çıkarmıştır. Bu matematiksel model kullanılarak halatın katı modeli ve sonlu elemanlar modelini oluşturmuştur. Eksenel yük altında halatın analizi sonlu elemanlar analizi yapılmıştır ve deneysel ve teorik verilerle karşılaştırılmıştır. Wu [7] tarafından yapılan çalışmada spiral halatların katmanlarının sarım yönlerinin farklı olduğu 3 halat modelinin sonlu elemanlar modeli oluşturulmuştur. Halatların eksenel yük altında sarım yönlerinin değişmesiyle değişen özellikleri incelenmiştir. Yu vd.[8] tek helis açısına 7 telden oluşan monotron halat için yanal ve eksenel yükleme durumlarında halatların temas bölgelerindeki davranışını incelemek için sonlu elemanlar analizi yapmıştır. Feyrer [9], tel halatların sınıflandırılmasını, testlerinin ve test düzeneklerinin nasıl yapılması gerektiğini ve halatlarla ilgili önemli parametrelerin teorik olarak nasıl hesaplanacağını göstermiştir. Çekme yükü, eğilme yükü ve burulmada gerilmelerin hesaplanması, elastiklik modülünün hesaplanması, tork ve halatın makara üzerindeki hareketinde halat veriminin hesaplanmasını teorik denklemlerle ve uygulamalarla göstermiştir.

Bu çalışmada farklı çaplara sahip farklı tiplerdeki tek helis açısına sahip monotron halatların doğal frekans analizi teorik ve deneysel olarak yapılmıştır. Teorik analizde analitik formüllerden ve sonlu elemanlar yönteminden faydalanılmıştır. Halat katı modeli Catia yazılımında oluşturulmuştur. Daha sonra oluşturulan bu katı model Ansys Workbench programına aktarılmıştır ve sonlu elemanlar analizi yapılmıştır. Sonlu elemanlar yönteminde teller arasındaki ilişki tam bağlı, eksenel yönde bağlı, sürtünmeli bağlantı (bonded, no seperation, frictional) kullanılarak analizler gerçekleştirilmiştir. Deneysel çalışmada ise sonlu elemanlar analizinde kurulan sınır şartlarının benzeri laboratuvarında oluşturulmuştur. Deneysel ve teorik analizlerin sonuçları değerlendirilerek halat doğal frekansının uygulanan ön gerilme kuvveti altında halat çapına ve tel sayısına bağlı olarak nasıl değiştiği incelenmiştir.

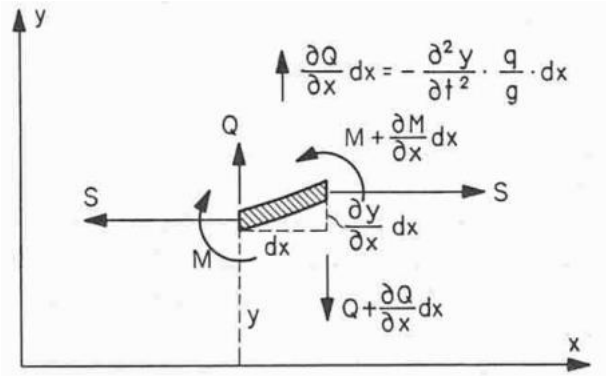
## 2. ANALİTİK MODELLEME (ANALYTICAL MODELLING)

Şekil 1’de görülen ön gerilmeli halat üzerinde oluşan bir dalga için hız ifadesinin çıkarılması gösterilecektir. Daha sonra bu ifade kullanılarak ön gerilmeli bir halatın doğal frekanslarını gösteren denklem elde edilecektir. [10]

Denge konumunda küçük sapmaları olan S kuvveti ile gerilmiş bir tel halatın sonsuz küçük bir parçası üzerinde D’Alembert prensibine göre denge denklemleri çıkarılabilir. Halat parçasına etkiyen kuvvet ve momentler şekil 2’de gösterilmiştir.



Şekil 1. Uç noktalardan gerilme uygulanan halat modeli [10]



Şekil 2. Halat üzerinde oluşan kuvvetler ve momentler [10]

Burada Q, M ve  $\frac{q}{g}$  ifadeleri sırasıyla halat parçası üzerindeki kesme kuvveti, eğilme momenti ve birim uzunluğun kütesini göstermektedir. Eğilme momenti ve halat eğilme katılığı arasındaki ilişki aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$M = IE \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (1)$$

Kesme kuvvetindeki büyüme sadece atalet kuvvetinden kaynaklanır.

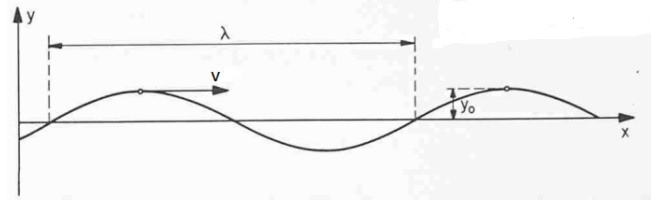
$$\frac{\partial Q}{\partial x} dx = -\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \frac{q}{g} dx \quad (2)$$

Birim halat elemanı için moment denge denklemine şekil 2’den faydalanılarak aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\frac{\partial M}{\partial x} - Q dx - S \frac{\partial y}{\partial x} dx = 0 \quad (3)$$

Denklem (3)’deki kesme kuvveti ve eğilme momenti ifadeleri yerine denklem (1) ve denklem (2)’deki ifadeleri yazılırsa tel halat hareketinin diferansiyel denklemi bulunur.

$$\frac{q}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + IE \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - S \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad (4)$$



Şekil 3. Halat üzerinde oluşan dalganın anlık gösterimi [10]

Tel halat üzerinde hareket eden bir dalganın anlık durumu şekil 3’te gösterilmiştir. Burada v dalga hızını,  $y_0$  dalga yüksekliğini ve  $\lambda$  dalga boyunu göstermektedir.

$$y = y_0 \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) \quad (5)$$

Halat hareketini gösteren diferansiyel denklem (4)’de y ifadesi yerine denklem (5) yazıldığında halat üzerinde oluşan enine bir dalganın hızı şu şekilde formüle edilebilir:

$$v = \sqrt{\frac{g \cdot S}{q} \left[ 1 + \frac{E \cdot I}{S} \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \right]} \quad (6)$$

v: Dalga hızı [m/s]

S: Halattaki gerilme kuvveti [N]

g: Yer çekimi ivmesi [m/s<sup>2</sup>]

I: Eylemsizlik momenti [m<sup>4</sup>]

$\lambda$ : Dalga boyu [m]

q: Halatın birim uzunluğunun ağırlığı [N/m]

E: Elastisite modülü [N/m<sup>2</sup>]

Halat dalga boyu büyük ve homojen olduğunda eğilme katılığının (E.I) etkisi çok küçüktür ve ihmal edilebilir.[9] Hız formülü bu basitleştirmeyle şu şekilde yazılabilir:

$$v = \sqrt{\frac{g \cdot S}{q}} \quad (7)$$

Halatın birim uzunluğunun kütlesi  $m_r = \frac{q}{g}$  olarak

yazılırsa hız formülü;

$$v = \sqrt{\frac{S}{m_r}} \quad (8)$$

Halatta oluşan dalganın hızı ölçülen zaman aralığında (t) halat uzunluğu (L) ve döngü sayısı (n) kullanılarak şu şekilde de bulunabilir:

$$v = \frac{2.n.L}{t} \quad (9)$$

Enine dalganın ilerleme zamanı bir dalga için denklem (9) kullanılarak yazılırsa;

$$t = \frac{2.L}{v} \quad (n=1) \quad v = \sqrt{\frac{S}{m_r}} \quad \text{ve olduğu için bir dalga}$$

için ilerleme zamanı elde edilir:

$$t = 2.L \sqrt{\frac{m_r}{S}} \quad (10)$$

Durgun bir dalganın periyodu

$$T = \frac{t}{i} \quad (11)$$

Burada  $i$  halat uzunluğu boyunca oluşan dalga karnı (antinode) sayısıdır ve halatın mod şekline göre dalga karnı sayısının değişimi ilk 5 mod şekli için Şekil 4'de gösterilmiştir. Bu ifade ilerleme zamanı formülünde yerine konulursa dalganın periyodu aşağıdaki şekilde bulunur:

$$T = \frac{2.L}{i} \sqrt{\frac{m_r}{S}} \quad (12)$$

Dalganın frekansı periyot ifadesinden elde edilebilir:

$$(f = \frac{1}{T}) \quad f = \frac{i}{2.L} \sqrt{\frac{S}{m_r}} \quad (13)$$

$f$ : Halatta oluşan titreşimin frekansı [Hz]

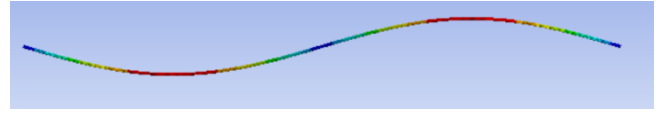
$L$ : Halatın uzunluğu [m]

$S$ : Gerilme kuvveti [N]

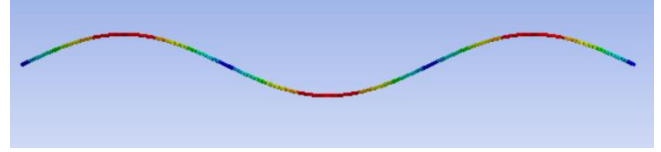
$m_r$ : Halatın birim uzunluğunun kütlesi [kg/m]



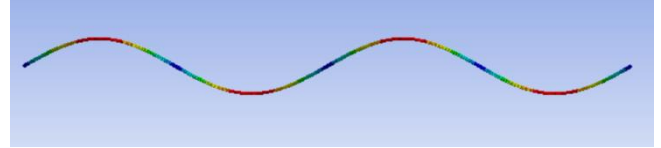
1.Mod Şekli (1. Mode Shape)



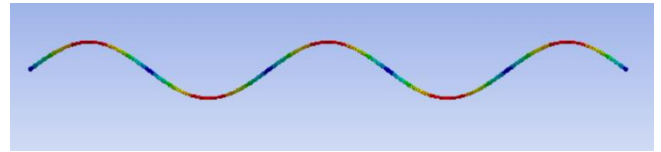
2.Mod Şekli (2. Mode Shape)



3.Mod Şekli (3. Mode Shape)



4.Mod Şekli (4. Mode Shape)



4.Mod Şekli (4. Mode Shape)

Şekil 4. Halata ait ilk 5 mod şekli

### 3. SONLU ELEMANLAR MODELİNİN OLUŞTURULMASI (GENERATION OF FINITE ELEMENT MODEL)

Sonlu elemanlar modeli oluşturulan halat modellerinin tamamı tek helis açısına sahip monoton halat tipindedir. Halatların 500 mm uzunluğundaki modeli katı modelleme programında oluşturulduktan sonra step dosya formatında sonlu elemanlar analizi için Ansys Workbench programına aktarılmıştır. Katı modellerin uzunluklarının deney numunelerinin uzunluklarıyla aynı olması için bazı düzenlemeler Ansys Workbench'deki Design Modeler uygulamasında yapılmıştır. Tüm modellerin ilk önce Ansys içerisindeki Static Structural bölümünde statik analizi yapılmıştır. Daha sonra burada elde edilen veriler Modal bölümüne aktarılmıştır ve halatların ön gerilmeli doğal frekans değerleri elde edilmiştir. Sonlu elemanlar modelinin oluşturulması ile ilgili ayrıntılar bu bölümde anlatılacaktır.

#### 3.1. Halat Katı Modelinin Oluşturulması (Generation of Wire Rope Solid Model)

Bu çalışmada sonlu elemanlar analizi için gerekli olan halat katı modeli oluşturulurken Stanova vd. [5-6] tarafından yapılan çalışmadan

faýdalanılmıştır. Halat tiplerinde kullanılan ikinci sayı halattaki toplam tel sayısını göstermektedir. Örneğin 1x7 monoton halatta 7 adet tel bulunmaktadır. Katı modeli oluşturulan halat modelleri şunlardır:

- 1x7 3 mm çapında monoton halat
- 1x7 5 mm çapında monoton halat
- 1x7 8 mm çapında monoton halat
- 1x19 3 mm çapında monoton halat
- 1x19 5 mm çapında monoton halat
- 1x19 8 mm çapında monoton halat
- 1x37 5 mm çapında monoton halat

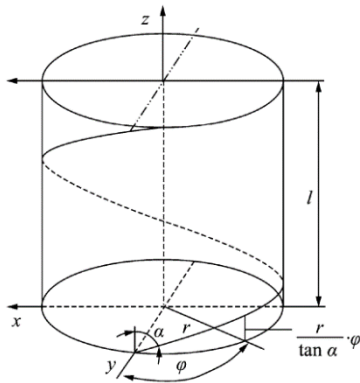
Aşağıda monoton halat tipindeki tek helis açısına sahip bir halatın tellerinin merkezinden geçen eksenini ifade eden parametrik denklemler genel olarak gösterilmiştir. Bu çalışmada analizi yapılan tüm halatların parametrik denklemleri çizelge 1’de gösterilmiştir.

Monoton halatın herhangi bir katmanındaki bir telin merkez ekseninden geçen eğriyi gösteren parametrik denklemler şunlardır:

$$x(\phi) = r_j \cdot \cos(\gamma + \xi + q \cdot \phi) \quad (14)$$

$$y(\phi) = r_j \cdot \sin(\gamma + \xi + q \cdot \phi) \quad (15)$$

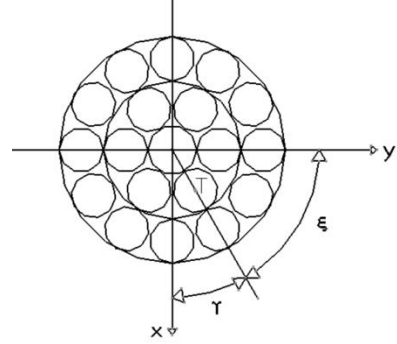
$$z(\phi) = \frac{\phi \cdot r_j}{\tan \alpha_j} \quad (16)$$



Şekil 5. Parametrik denklemde kullanılan  $\alpha$  ve  $\phi$  açıları [9]

Burada  $\phi$  halat telinin merkez eksenini gösteren eğrideki noktaların z eksenini etrafındaki dönme açısıdır.  $\alpha_j$  halatın herhangi bir katmanının sarım açısıdır.  $q$  halat katmanındaki tellerinin sarım yönünü gösteren katsayıdır. Sağ dönüşlü halatlar için  $q=1$ , sola dönüşlü halatlar için  $q=-1$ 'dir.  $\xi$  halatın herhangi bir katmanındaki herhangi iki telin merkez eksenleri arasındaki açıdır.  $\gamma$  herhangi

bir katmandaki oluşturulan ilk telin merkez ekseninin x eksenini ile yaptığı açıdır. Şekil 5’de örnek bir halat için  $\xi$  ve  $\gamma$  açıları gösterilmiştir.

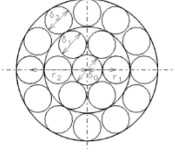
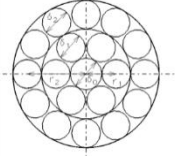
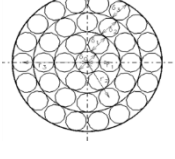


Şekil 6. Parametrik denklemde kullanılan  $\xi$  ve  $\gamma$  açıları

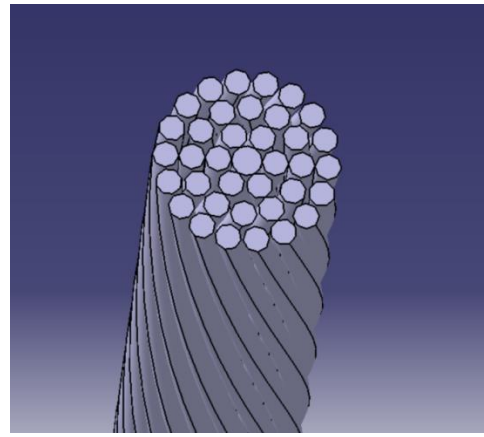
$\delta_j$  halatın herhangi bir katmanındaki telin çapını ve  $r_j$  de halatın herhangi bir katmanının sarım yarıçapını göstermektedir. Alt indis j katman numarasını göstermektedir.

Çizelge 1. Halat katı modellerinin parametrik denklemleri

Halat Tipi	Katman Numarası	Parametrik Denklemler	Halat Kesiti (Halat tel çapları $(\delta_0, \delta_1, \delta_3)$ ve sarım yarıçapları $(r_1, r_2, r_3)$ )
1x7 3 mm Monoton Halat	1	$x(\phi) = r_1 \cdot \cos(-20,180)$ $y(\phi) = r_1 \cdot \sin(-20,180)$ $z(\phi) = \frac{20,180 \cdot \frac{\pi}{180} \cdot r_1}{\tan(6,67)}$	
1x 7 5 mm Monoton Halat	1	$x(\phi) = r_1 \cdot \cos(12,5,180)$ $y(\phi) = r_1 \cdot \sin(12,5,180)$ $z(\phi) = \frac{12,5,180 \cdot \frac{\pi}{180} \cdot r_1}{\tan(7,52)}$	
1x7 8 mm Monoton Halat	1	$x(\phi) = r_1 \cdot \cos(-12,5,180)$ $y(\phi) = r_1 \cdot \sin(-12,5,180)$ $z(\phi) = \frac{12,5,180 \cdot \frac{\pi}{180} \cdot r_1}{\tan(11,84)}$	
1x19 3mm Monoton Halat	1	$x(\phi) = r_1 \cdot \cos(55,56,180)$ $y(\phi) = r_1 \cdot \sin(55,56,180)$ $z(\phi) = \frac{55,56,180 \cdot \frac{\pi}{180} \cdot r_1}{\tan(12,21)}$	
	2	$x(\phi) = r_2 \cdot \cos(-55,56,180)$ $y(\phi) = r_2 \cdot \sin(-55,56,180)$	

			$z(\phi) = \frac{55,56.180 \cdot \frac{\pi}{180} \cdot r_2}{\tan(12,21)}$	
1x19 5mm Monotron Halat	1	$x(\phi) = r_1 \cdot \cos(-25.180)$		
		$y(\phi) = r_1 \cdot \sin(-25.180)$	$z(\phi) = \frac{25.180 \cdot \frac{\pi}{180} \cdot r_1}{\tan(9,1)}$	
		$x(\phi) = r_2 \cdot \cos(12,44.180)$		
		$y(\phi) = r_2 \cdot \sin(12,44.180)$		
	2		$z(\phi) = \frac{12,44.180 \cdot \frac{\pi}{180} \cdot r_2}{\tan(9,1)}$	
1x19 8mm Monotron Halat	1	$x(\phi) = r_1 \cdot \cos(20,84.180)$		
		$y(\phi) = r_1 \cdot \sin(20,84.180)$	$z(\phi) = \frac{20,84.180 \cdot \frac{\pi}{180} \cdot r_1}{\tan(12,25)}$	
		$x(\phi) = r_2 \cdot \cos(-10,67.180)$		
		$y(\phi) = r_2 \cdot \sin(-10,67.180)$		
	2		$z(\phi) = \frac{10,67.180 \cdot \frac{\pi}{180} \cdot r_2}{\tan(12,25)}$	
1x37 5mm Monotron Halat	1	$x(\phi) = r_1 \cdot \cos(-94.180)$		
		$y(\phi) = r_1 \cdot \sin(-94.180)$	$z(\phi) = \frac{94.180 \cdot \frac{\pi}{180} \cdot r_1}{\tan(12,71)}$	
		$x(\phi) = r_2 \cdot \cos(48,752.180)$		
		$y(\phi) = r_2 \cdot \sin(48,752.180)$		
	2		$z(\phi) = \frac{48,752.180 \cdot \frac{\pi}{180} \cdot r_2}{\tan(12,71)}$	
		$x(\phi) = r_3 \cdot \cos(-32,91.180)$		
		$y(\phi) = r_3 \cdot \sin(-32,91.180)$		
	3		$z(\phi) = \frac{32,91.180 \cdot \frac{\pi}{180} \cdot r_3}{\tan(12,71)}$	

Çizelge 1’de gösterilen parametrik denklemler katı model yazılımına aktarılıp halatı oluşturan tellerin merkezinden geçen helisel eğri elde edilmiştir. Tel çapına göre eğrilere kesit atanarak tellerin ve halatın katı modeli elde edilmiştir. 1x37 5 mm tipindeki monotron halatın katı modeli şekil 6’da gösterilmiştir.



Şekil 7. 1x37 5 mm halat için katı modeli

### 3.2. Malzeme Özellikleri (Material Properties)

Sonlu elemanlar analizinde uygulanacak yükler ve sınır şartlarından dolayı halatta oluşacak şekil değişimlerinin elastik olacağı teorik formüllerden öngörülmüştür. Bu yüzden seçilecek malzemenin gerilme gerinim ilişkisinin lineer olduğu Ansys Workbench malzeme kütüphanesindeki yapısal çelik seçilmiştir. Malzemenin elastiklik modülü 200 GPa, Poisson oranı 0,3 ve öz kütlesi 7850 kg/m<sup>3</sup> dür. Analizi yapılan tüm sonlu elemanlar modelleri homojen, izotropik ve doğrusal malzeme özellikleri taşımaktadır. Deneyde kullanılan halatlar yüksek karbonlu (karbon oranı % 0,65) ve alaşımsız çelikten üretilmiştir. Halat numunelerinin özellikleri halat imalatçısı firma olan Köşkerler Halat’tan alınmıştır. Deneyde kullanılan halat numunelerinin mekanik özellikleriyle sonlu elemanlar analizinde kabul edilen mekanik özellikler birbirleriyle uyumludur.

### 3.3. Temas Özellikleri (Contact Properties)

Deneyde kullanılan çelik halatta çelik teller arasında sürtünme vardır. Sonlu elemanlar analizinde de bu sürtünme tanımlanmalıdır. Sürtünmeli temas tanımlanması analizin lineer olmamasına neden olmaktadır ve çözüm süresini uzatmaktadır. Katı modeldeki tellerin çapı çok küçük (0,82 mm, 0,65 mm gibi) olduğu için analizde kullanılacak eleman büyüklüğünün de çok küçük olmasına neden olmaktadır. Bu nedenle 500 mm uzunluğundaki bir modelde kullanılan eleman sayısı artmaktadır. Modeldeki eleman ve temas sayısının fazla olması ve analiz sırasında farklı tipteki birçok gerilme türünün birlikte ortaya çıkması nedeniyle laboratuvarında kullanılan bilgisayarların çözüm kapasitesi yetmemektedir. Bu problemten dolayı halat katı modellerinden en küçük çapta ve temas bölgesi sayısı en az olan

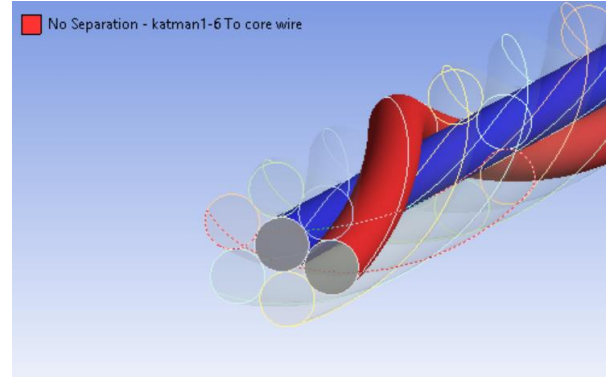
model için Ansys'de bulunan sürtünmeli temas (frictional contact), ayrılmasız temas (no separation contact) ve yapışık temas (bonded contact) temas tipleri ile ayrı ayrı halat analizleri yapılarak sonuçlar karşılaştırılmıştır. 500 mm uzunluğundaki 1x7 3 mm monoton halat için 500 N gergi kuvveti altında ayrılmasız ve yapışık temas tiplerinin sürtünmeli temas modelleri karşılaştırılması sırasıyla çizelge 2 ve çizelge 3'de gösterilmiştir. Sonuçların birbirine yakın çıkması nedeniyle katı modeldeki teller ayrılmasız temas seçeneği ile tanımlanmıştır. Ayrılmasız temas seçeneğinde birbirine temas eden yüzeylerdeki düğüm noktaları sadece yüzeyin normali yönünde birleştirilir. Temas yüzeyleri teğet yönünde küçük kaymalara izin verir. Bu durum ayrılmasız temas içeren modellerin sürtünmeli temas içeren modelde olduğu tel halatların birbiri üzerinden bir miktar kaymasına izin vermektedir. Sonuçlar bu nedenle sürtünmeli temas içeren modele yakın çıkmaktadır. Birbirine temas halinde olan iki yüzeyin Ansys programındaki gösterimi şekil 7'de görülmektedir.

Çizelge 2. Sürtünmeli temas ve ayrılmasız temas tanımlı modellerin doğal frekans değerleri karşılaştırılması

Sürtünmeli Temas Tanımlı Model Doğal Frekans Değerleri (Hz)	Ayrılmasız Temas Tanımlı Model Doğal Frekans Değerleri (Hz)	% Fark
116,13	116,28	0,13
234,02	234,04	0,15
355,36	354,71	0,20
481,95	479,69	0,27
615,41	610,26	0,34

Çizelge 3. Sürtünmeli temas ve yapışık temas tanımlı modellerin doğal frekans değerleri karşılaştırılması

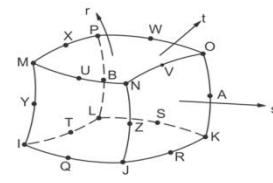
Sürtünmeli Temas Tanımlı Model Doğal Frekans Değerleri (Hz)	Yapışık Temas Tanımlı Model Doğal Frekans Değerleri (Hz)	% Fark
116,13	131,13	12,9
234,02	270,83	15,7
355,36	429,27	20,8
481,95	611,43	26,9
615,41	820,47	33,3



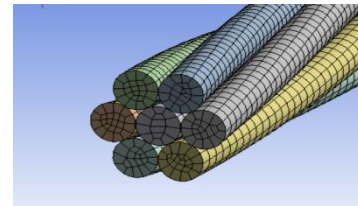
Şekil 8. Teller arasında temasın gösterimi

### 3.4 Çözüm Ağı Özellikleri (Mesh Properties)

Ansys Workbench 3 boyutlu katı modelleri Solid186 ve Solid187 elemanları ile çözüm ağı oluşturmaktadır. Solid186 elemanı küp şeklinde ikinci dereceden bir elemandır ve küpün hem köşelerinde hem de kenarların orta noktalarında olmak üzere 20 adet düğüm noktasına sahiptir. Solid186 elemanı ve üzerindeki düğüm noktaları şekil 8'de gösterilmiştir. Eğer program katı model geometrisinden dolayı Solid186 elemanı oluşturamazsa dörtyüzlü şeklindeki Solid187 elemanı ile sonlu elemanlar ağını oluşturmaktadır. Solid187 elemanı da ikinci dereceden bir elemandır ve dörtyüzlünün hem köşelerinde hem de kenarların orta noktalarında olmak üzere 10 adet düğüm noktası vardır. Ansys'deki her üç boyutlu elemanın düğüm noktalarının x,y ve z eksenlerinde olmak üzere 3 öteleme serbestlik derecesi vardır. Sonlu elemanlar ağı oluşturulan 1x7 3 mm tipindeki halat katı modelinin görünümü şekil 9'daki gibi olmaktadır.



Şekil 9. Solid186 elemanı



Şekil 10. Halat modelinin ağı yapısı görünümü

Her bir halat sonlu elemanlar modeli için ağ yapısında kullanılan eleman boyutu küçültülerek ağ yapısı yakınsama analizi yapılmıştır. Doğal frekans sonuçları ile eleman boyutunun değişimini gösteren analiz çizelge 4'de gösterilmiştir. Böylece elde edilen sonuçların ağ yapısından bağımsız olduğu gösterilmiştir.

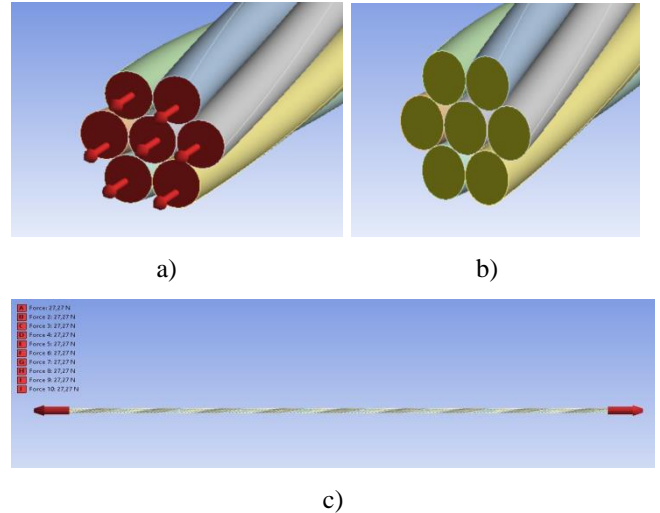
Çizelge 4. Çözüm ağı eleman büyüklüğüne göre doğal frekans değerleri yakınsama analizi

<b>1x7 3 mm 500 N (0,5 mm Eleman Boyutu)</b>	<b>1x7 3mm 500 N (0,4 mm Eleman Boyutu)</b>	<b>1x7 3mm 500 N (0,3 mm Eleman Boyutu)</b>
116,28	116,13	116,1
234,04	233,68	233,62
354,71	354	353,89
479,69	478,38	478,21
610,26	608,18	607,9
<b>1x7 5mm 500 N (0,7 mm Eleman Boyutu)</b>	<b>1x7 5mm 500 N (0,6 mm Eleman Boyutu)</b>	<b>1x7 5mm 500 N (0,5 mm Eleman Boyutu)</b>
65,512	65,501	65,499
138,91	138,9	138,83
226,65	226,66	226,5
333,31	333,33	332,96
461,69	461,58	461,06
<b>1x7 8mm 500 N (0,7 mm Eleman Boyutu)</b>	<b>1x7 8mm 500 N (0,6 mm Eleman Boyutu)</b>	<b>1x7 8mm 500 N (0,5 mm Eleman Boyutu)</b>
45,412	45,384	45,358
115,93	115,75	115,61
222,78	222,31	221,94
369,03	368,17	367,44
555,08	553,63	552,48
<b>1x19 3mm 500 N (0,5 mm Eleman Boyutu)</b>	<b>1x19 3mm 500 N (0,4 mm Eleman Boyutu)</b>	<b>1x19 3mm 500 N (0,3 mm Eleman Boyutu)</b>
111,44	111,48	111,35
229,76	229,67	229,04
361,37	360,59	358,98
511,51	509,32	506,19
683,78	680,14	674,27
<b>1x19 5mm 500 N (0,6 mm Eleman Boyutu)</b>	<b>1x19 5mm 500 N (0,5 mm Eleman Boyutu)</b>	<b>1x19 5mm 500 N (0,4 mm Eleman Boyutu)</b>
68,216	69,079	66,351
161,91	167,78	149,49
295,83	311,43	260,75
475,6	506,82	410
704,24	751,58	595,34
<b>1x19 8mm 500 N (0,7 mm Eleman Boyutu)</b>	<b>1x19 8mm 500 N (0,6 mm Eleman Boyutu)</b>	<b>1x19 8mm 500N (0,5 mm Eleman Boyutu)</b>
66,828	56,795	60,314
225,09	176,76	194,11
483,62	372,54	412,45
838,49	645,15	714,12
1169,1	994,73	1020,2

<b>1x37 5mm 500 N (0,6 mm Eleman Boyutu)</b>	<b>1x37 5mm 500 N (0,5 mm Eleman Boyutu)</b>	<b>1x37 5mm 500 N (0,4 mm Eleman Boyutu)</b>
71,599	72,976	72,782
173,6	182,15	180,98
321,73	344,52	341,6
523,49	565,88	559,97
779,02	846,04	836,74

### 3.5. Sınır Şartları (Boundary Conditions)

Sınır şartlarının deney düzeneğinde kullanılan sınır şartı ile uygun olması için 500 mm uzunluğundaki halat katı modelinin her iki ucundaki halat kesitine dik (Z ekseninde) eşit büyüklükte her bir analiz için ayrı ayrı olmak üzere 1000 N, 800 N, 500 N ve 400 N büyüklüğünde kuvvet uygulanmıştır. Halat katı modelinin diğer eksenler (X ve Y ) de hareket etmemesi için bu eksenlerdeki hareketi yer değiştirme (displacement) komutu ile sınırlandırılmıştır. Sonlu elemanlar modelinde kurulan bu sınır şartları şekil 10'da gösterilmiştir.



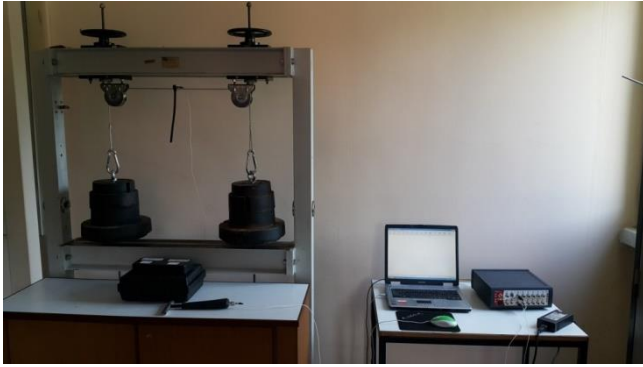
Şekil 11. Kuvvetlerin halatın uç noktalarından uygulanması (a-c) ve yer değiştirme sınır şartının uygulanması (b)

## 4. DENEYSEL DOĞAL FREKANS ÖLÇÜMÜ (EXPERIMENTAL MEASUREMENT OF NATURAL FREQUENCY)

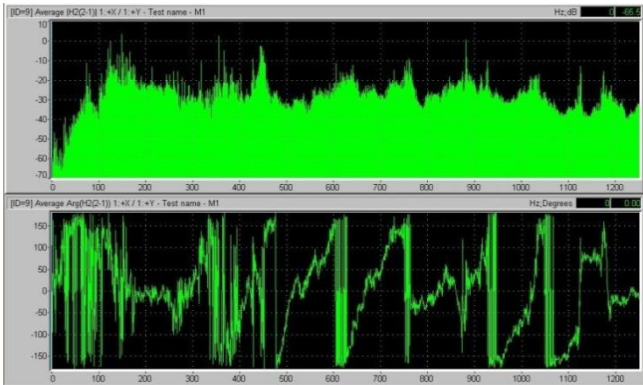
Deney standına doğal frekans ölçümü yapılacak halat numunesi ve iki uçtan gergi kuvvetini oluşturacak ağırlıklar makaralar yardımıyla asılmıştır. Uygulamada köprü halatlarında da kullanılan basit mesnet sınır şartı elde edilmeye çalışılmıştır. Halat üzerinden ölçümleri almak için



tek eksenli Dytran marka 3097A3T model ivmeölçer halatın orta noktasına yerleştirilmiştir. Darbe etkisi Brüel&Kjaer Type 8206-002 Modal Impact hammer ile elde edilmiştir. İvmeölçer yardımıyla alınan veriler Areva 01dB NetdB marka analizör yardımıyla bilgisayara aktarılmıştır. Deney standının genel görünümü şekil 11’de gösterilmiştir. Bilgisayar ortamına aktarılan veriler kullanılan analizörün kendi yazılımı olan dBFA Suite programı yardımıyla grafiksel olarak elde edilmiştir. Sönüm etkisinin ihmal edildiğinde sistem rezonans durumunda ise yer değiştirme ve kuvvet vektörleri arasındaki faz farkı  $180^\circ$  olmaktadır. Deneyde elde edilen grafiklerden halatın doğal frekansları bulunurken faz açısı değişimi de dikkate alınmıştır. Frekans cevabı ve faz eğrisi ilişkisi şekil 12’de gösterilmiştir.



Şekil 12. Deney standı genel görünümü

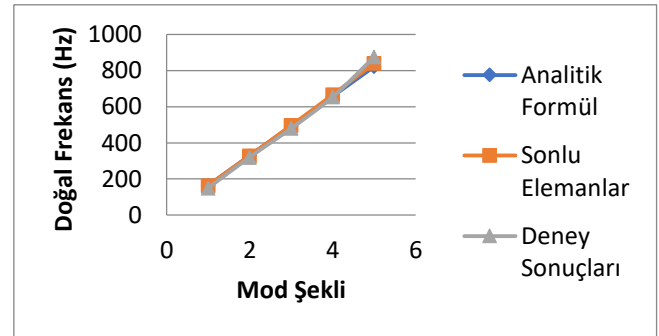


Şekil 13. Frekans cevabı ve faz eğrisi ilişkisi

## 5. SONUÇLAR VE DEĞERLENDİRME (RESULTS AND EVALUATION)

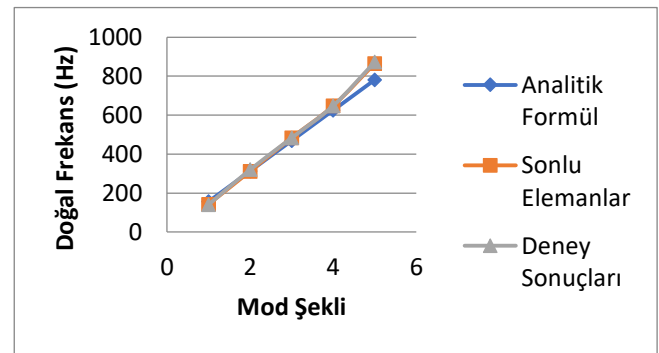
Yapılan bu çalışmada deneysel, sonlu elemanlar ve analitik formül sonuçlarının birbirleriyle uyumlu olduğu şekil 10 ve şekil 11’deki

grafiklerde görülmektedir. Analitik formül ile halatın doğal frekansı hesaplanırken doğal frekans değeri dalga karnı sayısına (antinod sayısı), halat uzunluğuna, ön gerilme kuvvetine ve halatın birim uzunluğunun kütlesine bağlıdır. Ancak bu hesaplamada halatın tipi dikkate alınmamaktadır. Yani aynı şartlarda incelenen birim uzunluğunun kütlesi aynı olan iki farklı halat tipinin doğal frekansı aynı çıkabilmektedir. Sonlu elemanlar analizinde sistem gerçekteki duruma göre modellenebildiği için bu fark ortaya çıkarılabilir. Şekil 12’deki grafikte görüldüğü üzere halatlar aynı çapta olsa bile halattaki tel sayısı arttıkça aynı şartlardaki halatın doğal frekans değerleri artmaktadır. Bunun tam tersi durum olduğunda yani farklı çaplardaki fakat aynı tel sayısına sahip halatlarda halatın çapı arttıkça doğal frekans değeri düşmektedir. Şekil 13’de de grafiksel olarak gösterilmiştir. Bu durum analitik formül ile yapılan hesaplamalarda da öngörülebilir. Çünkü halattaki tel sayısı arttıkça halat birim uzunluğunun kütlesi artmaktadır. Halat doğal frekans değeri de formüle bağlı olarak düşmektedir.



Şekil 10. 1000 N ön gerilme altında 1x7 3 mm halatın analitik formül, sonlu elemanlar ve deneysel sonuçlarının karşılaştırılması

Şekil 11. 1000 N ön gerilme altında 1x19 3 mm halatın



analitik formül, sonlu elemanlar ve deneysel sonuçlarının karşılaştırılması

Test düzeneği kapasitesinden dolayı gerilme kuvveti, maksimum 1000 N, halat sisteminin

kararlılığı açısından minimum 400 N olarak alınmıştır. Tüm halat modelleri için yapılan analizler 400 N, 500 N, 800 N ve 1000 N olmak üzere 4 farklı ön gerilme durumu için yapılmıştır. Çizelge (6-12)'den de görülebileceği üzere uygulanan ön gerilme kuvveti arttıkça analizi yapılan halat tipi ve tel sayısı fark etmeksizin doğal frekans değerleri artmaktadır. Bu sonuç denklem 13'deki analitik formülden de direkt olarak görülebilir.

Bu çalışmada yapılan sonlu elemanlar analizinde halattaki teller arasındaki temasların ayrılmasız temas olduğu kabulü yapılmıştır. Ansys'de doğrusal olmayan temas türleri statik analiz bölümünde tanımlanabilmektedir. Modal analiz kısmında doğrusal olmayan temas türleri, temas yüzeyleri arasındaki mesafeye ve sürtünme katsayısına göre doğrusal temas türlerine (ayrılmasız temas veya yapışık temas) program tarafından dönüştürülmektedir. Statik analiz bölümünde sürtünme kuvveti tanımlanması sistemde oluşan gerilme değerini değiştirmektedir. Sürtünme kuvveti analizde sönüm etkisi oluşturmaktadır. Analitik formül sonuçları ile sonlu elemanlar analizi sonuçları karşılaştırıldığında halattaki tel sayısı ve halat tel çapı arttıkça iki sonuç arasındaki farklar da artmaktadır. Yani halatın analitik formül sonuçlarında olduğu gibi titreşim davranışı doğrusal olmamaktadır. Bu nedenle oluşturulacak sonlu elemanlar modelinin sistemin doğrusal olmayan davranışına uygun olması gerekmektedir. Çizelge (6-12)'de tüm sonuçlar için karşılaştırmalar gösterilmiştir.

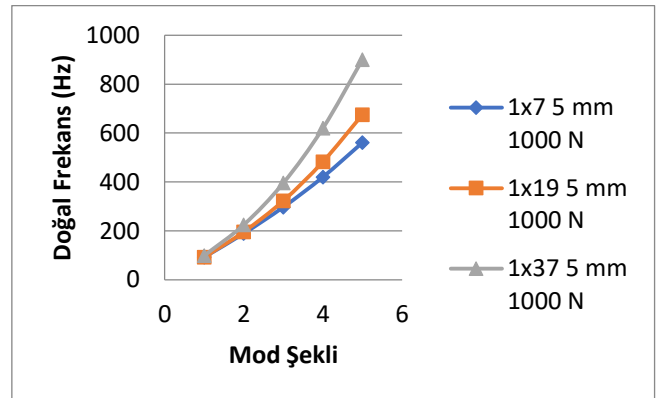
Sonlu elemanlar analizinde sistemin doğrusal olmayan temas seçeneği olan sürtünmeli temas seçeneği ile tanımlanması gerekmektedir. Bu durum sistemin doğru modellenmesini sağlamakla beraber çözümün gerçekleşmesi ve çözüm süresi analizin yapıldığı bilgisayarın hesaplama kapasitesine bağlıdır. Örneğin; 500 mm uzunluğundaki 1x7 3 mm tipindeki 500 N ön gerilme kuvveti uygulanan halat analizinde ayrılmasız temas içeren modelin çözüm süresi yaklaşık 10 saat olurken, sürtünmeli temas içeren modelin çözüm süresi yaklaşık 200 saat olmaktadır. Temas sayılarının daha fazla olduğu daha fazla telden oluşan halat analizlerinde sürtünmeli temas çözüm süresini daha da fazla arttıracaktır.

Sürtünmeli temas içeren model ile ayrılmasız temas içeren modelin karşılaştırılması yapılırken 500 mm uzunluğundaki katı model kullanılmıştır. İki analiz sonuçları arasındaki yüzdesel fark

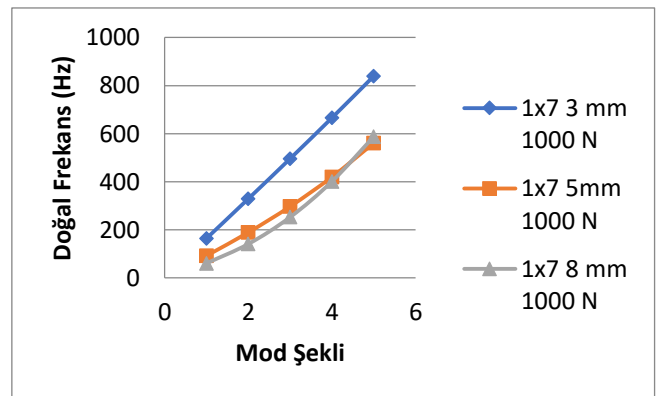
çizelge 2'de gösterilmiştir. Ancak 200 mm uzunluğundaki iki halat katı modelinin karşılaştırılması yapıldığında sürtünmeli temas içeren model ile ayrılmasız temas içeren modelin sonuçları arasındaki fark artmaktadır. Bu durum çizelge 5'de gösterilmiştir. Halat katı modelinin uzunluğu arttıkça doğrusal ve doğrusal olmayan temas içeren modellerin sonuçları arasındaki farkın azalması katı model boyutunun görece daha uzun olduğu modellerde çözüm süresini kısaltmak amacıyla sürtünmeli temas yerine ayrılmasız temas kullanılabilmesini sağlamaktadır.

Çizelge 5. Farklı uzunluklara sahip modellerin temas tiplerine göre karşılaştırılması

Mod Şekli	200 mm Uzunluğundaki Katı Model için Sürtünmeli ve Ayrılmasız Temas Sonuçları Farkı (%)	500 mm Uzunluğundaki Katı Model için Sürtünmeli ve Ayrılmasız Temas Sonuçları Farkı (%)
1	3,8	0,13
2	12,1	0,15
3	20,4	0,20
4	26,6	0,27
5	30,5	0,34



Şekil 12. Aynı çap ölçüsündeki farklı sayıda tel sarımı içeren halatların sonlu elemanlar analizi karşılaştırılması



Şekil 13. Farklı çap ölçüsündeki aynı sayıda tel sarımı içeren halatların sonlu elemanlar analizi karşılaştırılması

Çizelge 6. 1x7 3 mm halat tipi için analitik analiz, sonlu elemanlar analizi ve deneyde elde edilen doğal frekans değerleri karşılaştırılması

1x7 3mm							
1000 N				800 N			
Mod Şekli	Analitik	Sonlu Elemanlar	Deney	Mod Şekli	Analitik	Sonlu Elemanlar	Deney
1	164	164	150	1	147	147	161
2	329	329	320	2	294	295	300
3	493	496	480	3	441	445	442
4	658	666	654	4	588	598	600
5	822	840	875	5	735	756	735
500 N				400 N			
Mod Şekli	Analitik	Sonlu Elemanlar	Deney	Mod Şekli	Analitik	Sonlu Elemanlar	Deney
1	116	116	107	1	104	104	107
2	232	234	231	2	208	209	210
3	349	354	352	3	312	318	310
4	465	478	462	4	416	431	421
5	581	608	607	5	520	550	528

Çizelge 7. 1x7 5 mm halat tipi için analitik analiz, sonlu elemanlar analizi ve deneyde elde edilen doğal frekans değerleri karşılaştırılması

1x7 5 mm							
1000 N				800 N			
Mod Şekli	Analitik	Sonlu Elemanlar	Deney	Mod Şekli	Analitik	Sonlu Elemanlar	Deney
1	91	92	98	1	81	82	84
2	182	189	186	2	163	171	184
3	273	297	301	3	244	271	267
4	364	420	430	4	325	388	388
5	455	561	566	5	407	524	517
500 N				400 N			
Mod Şekli	Analitik	Sonlu Elemanlar	Deney	Mod Şekli	Analitik	Sonlu Elemanlar	Deney
1	64	65,499	66	1	57	59	45
2	129	139	128	2	115	127	135
3	193	227	223	3	172	210	211
4	257	333	337	4	230	313	321
5	321	461	451	5	287	439	429

Çizelge 8 1x7 8 mm halat tipi için analitik analiz, sonlu elemanlar analizi ve deneyde elde edilen doğal frekans değerleri karşılaştırılması

1x7 8 mm							
1000 N				1x7 8 mm 800 N			
Mod Şekli	Analitik	Sonlu Elemanlar	Deney	Mod Şekli	Analitik	Sonlu Elemanlar	Deney
1	57	61	-	1	51	55	-
2	114	141	-	2	102	131	-
3	171	253	-	3	153	241	-
4	228	401	-	4	204	388	-
5	285	588	-	5	255	574	-
1x7 8 mm 500 N				1x7 8 mm 400 N			
Mod Şekli	Analitik	Sonlu Elemanlar	Deney	Mod Şekli	Analitik	Sonlu Elemanlar	Deney
1	40	45	-	1	40	42	-
2	81	116	-	2	81	110	-
3	121	222	-	3	121	215	-
4	161	367	-	4	161	360	-
5	202	552	-	5	202	545	-

Çizelge 9. 1x19 3 mm halat tipi için analitik analiz, sonlu elemanlar analizi ve deneyde elde edilen doğal frekans değerleri karşılaştırılması

1x19 3 mm							
1000 N				800 N			

Mod Şekli	Analitik	Sonlu Elemanlar	Deney	Mod Şekli	Analitik	Sonlu Elemanlar	Deney
1	156	142	140	1	140	140	139
2	312	312	320	2	279	286	290
3	469	483	483	3	419	440	457
4	625	648	648	4	559	533	518
5	781	864	872	5	698	611	609
500 N				400 N			
Mod Şekli	Analitik	Sonlu Elemanlar	Deney	Mod Şekli	Analitik	Sonlu Elemanlar	Deney
1	110	111	100	1	99	100	107
2	221	229	225	2	198	207	217
3	331	359	348	3	296	327	329
4	442	506	498	4	395	466	474
5	552	674	676	5	494	628	618

Çizelge 10. 1x19 5 mm halat tipi için analitik analiz, sonlu elemanlar analizi ve deneyde elde edilen doğal frekans değerleri karşılaştırılması

1x19 5 mm							
1000 N				800 N			
Mod Şekli	Analitik	Sonlu Elemanlar	Deney	Mod Şekli	Analitik	Sonlu Elemanlar	Deney
1	89	92	93	1	80	83	92
2	179	196	197	2	160	179	176
3	268	323	322	3	240	300	298
4	358	483	483	4	320	455	455
5	447	675	691	5	400	645	642
500 N				400 N			
Mod Şekli	Analitik	Sonlu Elemanlar	Deney	Mod Şekli	Analitik	Sonlu Elemanlar	Deney
1	63	66	56	1	57	60	54
2	126	149	144	2	113	138	135
3	190	261	257	3	170	246	254
4	253	410	408	4	226	394	401
5	316	595	597	5	283	578	571

Çizelge 11. 1x19 8 mm halat tipi için analitik analiz, sonlu elemanlar analizi ve deneyde elde edilen doğal frekans değerleri karşılaştırılması

1x19 8 mm							
1000 N				800 N			
Mod Şekli	Analitik	Sonlu Elemanlar	Deney	Mod Şekli	Analitik	Sonlu Elemanlar	Deney
1	58	70	-	1	52	65	-
2	116	195	-	2	104	188	-
3	174	393	-	3	156	385	-
4	232	666	-	4	208	658	-
5	291	1016	-	5	260	1008	-
500 N				400 N			
Mod Şekli	Analitik	Sonlu Elemanlar	Deney	Mod Şekli	Analitik	Sonlu Elemanlar	Deney
1	41	60	-	1	37	54	-
2	82	194	-	2	74	173	-
3	123	412	-	3	110	368	-
4	164	714	-	4	147	641	-
5	205	1020	-	5	184	990	-

Çizelge 12. 1x37 5 mm halat tipi için analitik analiz, sonlu elemanlar analizi ve deneyde elde edilen doğal frekans değerleri karşılaştırılması

1x37 5 mm							
1000 N				800 N			
Mod Şekli	Analitik	Sonlu Elemanlar	Deney	Mod Şekli	Analitik	Sonlu Elemanlar	Deney
1	93	98	97	1	83	89	90
2	186	224	225	2	166	208	202
3	279	396	400	3	249	374	376
4	371	620	621	4	332	596	593
5	464	901	910	5	415	875	892
500 N				400 N			
Mod Şekli	Analitik	Sonlu Elemanlar	Deney	Mod Şekli	Analitik	Sonlu Elemanlar	Deney
1	66	73	64	1	59	67	62
2	131	181	185	2	117	171	185
3	197	342	335	3	176	330	335
4	263	560	566	4	235	548	545
5	328	837	839	5	294	824	820

### KAYNAKLAR (REFERENCES)

- [1] Kösemen, Ö., Asansör Taşıyıcı Halatlarının Statik Yük Altında Deneysel Gerilme Analizi, Yüksek Lisans Tezi, İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, 2008.
- [2] Jiang W., G., Yao M., S., Walton J., M., A Concise Finite Element Model For Simple Straight Wire Rope Strand, International Journal of Mechanical Sciences, 41:143-161, 1999.
- [3] Ghoreishi S.R., Messenger T., Cartraud P., Davies P., Validity and Limitations of Linear Analytical Models For Steel Wire Strands Under Axial Loading Using a 3D FE Model, International Journal of Mechanical Sciences, 49:1251-1261, 2007.
- [4] Spak K., Agnes G., Inman D., Cable Modelling and Internal Damping Developments, Applied Mechanics Reviews, 65 10801:1-18, (2013).
- [5] Stanova E., Federko G., Fabian M., Kmet S., Computer Modelling of Wire Stands and Ropes Part 1: Theory and Computer Implementation, Advances in Engineering Software 42:305-315, 2011.
- [6] Stanova E., Federko G., Fabian M., Kmet S., Computer Modelling of Wire Stands and Ropes Part 2: Finite Element Based Applications, Advances in Engineering Software 42:322-331, 2011.
- [7] Wu J., The Finite Element Modelling of Spiral Ropes, International Journal of Coal Science Technology 1(3): 346-353, 2014.
- [8] Yu Y., Chen Z., Liu H., Wang X., Finite Element Study of Behavior and Interface Force Conditions of Seven Wire Strand Under Axial and Lateral Loading, Construction and Building Materials, 66:10-18, 2014.
- [9] Feyrer K., Wire Ropes Tension, Endurance, Reliability, Second Edition, Springer, Berlin, 2015.
- [10] Zweifel O., Zugkraftmessung in Drahtseilen mit Transversalwellen, Schweizerische Bauzeitung, 79:347-358, 1961.
- [11] Lee H., Finite Element Simulations with Ansys Workbench 15, First Edition, SDC Publications, Kansas, 2014.
- [12] Ansys Release 14.0 Mechanical User's Guide, Ansys Inc., 2011.