

## **İÇİ SIVI DOLU İKİ KATMANLI VE KOLAJEN LİFLİ KOMPOZİT TÜPLERDE DALGA YAYILMASI**

Selim ŞENGEL<sup>1</sup>, M. Tacettin SARIOĞLU<sup>2</sup>

**ÖZET :** *Bu çalışmada içi sıvı dolu iki katmanlı kolajen lifli kompozit tüplerde dalga yayılması problemi ele alınmıştır. İnce cidarlı kompozit tüp, içerisinde lifler bulunan elastik bir malzeme olarak modellenmiş, içerisindeki sıvı ise sıkışmaz ve Newtonian bir akışkan olarak düşünülmüştür. Bu model (Media+ Adventitia) damarlardaki kan akışını modellemekte kullanılabilir diye düşünülmektedir. Modelde kullanılan lifli elastik tüp ve içerisindeki akışkan için alan denklemleri ayrı ayrı elde edilmiş ve bu işlem sırasında iç basıncın üniform, dolayısıyla ilk konumun dengede olduğu varsayılmıştır. Kompozit elastik tüpe ait denklemler elde edilirken küçük şekil değiştirmelerin büyük statik şekil değiştirmeler üzerine süperpozisyonu teorisi kullanılarak, hareket denklemleri ve sınır koşulları elde edilmiştir.*

**ANAHTAR KELİMELEER :** *Lif, Harmonik, Adventitia.*

## **PROPAGATION OF WAVES IN TWO LAYERED COMPOSITES TUBES CONTAINING A FLUID**

**ABSTRACT :** *Wave propagation in thin cylindrical composite tubes filled with a Newtonian fluid is studied in this work. The thin elastic tube is considered to be elastic and laminated composite with continuous fibers, and the fluid is assumed to be a non-viscous incompressible fluid for simplicity in the mathematical analysis. We think that this model (Media+ Adventitia) can be employed in the analysis of blood flow in the arteries. The field equations for the composites and fluid continuums are obtained assuming a constant internal pressure, thus the initial position is assumed to be in equilibrium. The governing differential equations of the composite elastic material are obtained in cylindrical polar coordinates utilizing the theory of small deformations superimposed on large initial static deformations.*

**KEYWORDS :** *Fiber, Harmonic, Adventitia.*

---

<sup>1,2</sup> Osmangazi Üniversitesi, Mühendislik-Mimarlık Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü,  
Batı Meşelik, 26480 ESKİŞEHİR

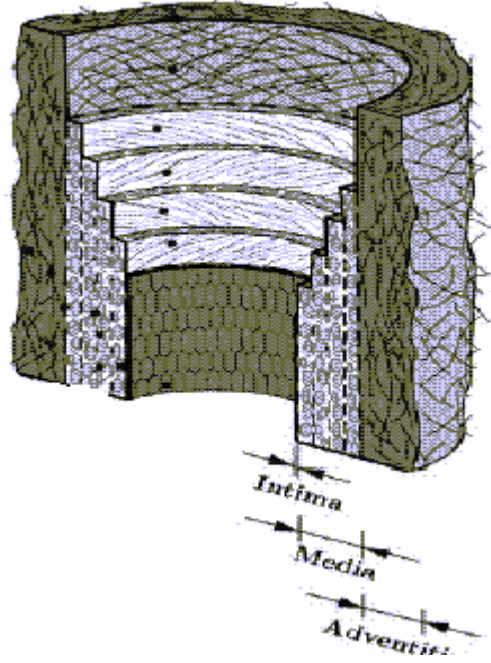
## ***I. GİRİŞ***

İçi sıvı dolu ince cidarlı tüplerde dalga yayılması problemi ile ilgili olarak geçmişte yapılmış çalışmalara bir katkı ve farklı bir model önerme düşüncesiyle hareket ederek başlanan bu çalışmada özellikle biyomühendislikte önemli uygulama alanı bulan ve damardaki kan hareketinin modellenmesinde kullanılan bir problem ele alınmış ve içi sıvı dolu ince cidarlı, içerisinde kolajen liflerin bulunduğu iki tabakalı kompozit ortamda harmonik dalga yayılması problemi incelenmiştir. Damar ince cidarlı elastik, tabakalı ve lifli bir kompozit ortam, kan ise sıkışmaz Newtonian akışkanı olarak düşünülmüş, “Büyük şekil değiştirmeler üzerine küçük dinamik yer değiştirmelerin süperpozisyonu” teorisi kullanılarak elde edilen denklemler katı ve sıvı ortamın bünye denklemlerini de devreye sokarak yönetici diferansiyel denklemler silindirik koordinatlarda yazılmıştır. Akışkan ortam için kapalı formda bir çözüm vermek mümkün olduğu halde, katı faz için bu mümkün olmamış, bu nedenle bir kuvvet serisi çözümü verilmeye çalışılmıştır. Problemimizde kullanılan model için gerçekte kalın kabuk yaklaşımı kullanılması gerektiği halde literatürde rastladığımız çözümlerde karşılaştırma yapabilmek amacıyla bu çalışmada da ince kabuk yaklaşımı kullanılmıştır. Elastik lifli kompozit tüpün iç ve dış yüzeylerinde, katmanlı modelin sınır yüzeylerinde sağlanması gereken sınır koşulları kullanılarak dalgaya ait dispersiyon bağıntısı en genel haliyle elde edilmiştir. Bu bağıntı özelleştirilerek tek tabakalı kompozit model için de elde edilmiştir.[1]

Bu çalışmada tabakalı (Media + Adventitia) ve içerisinde kolajen liflerin bulunduğu model kullanılmıştır. Bu modelde kullandığımız şekil değiştirme enerjisi fonksiyonları daha önce bu konuda yapılmış çalışmalarda kullanılan sadece mühendislik malzemeleri için, ya da sadece biyomühendislik malzemeleri için önerilen fonksiyonlar olmayıp bunların her ikisini de temsil edecek bir fonksiyondur. Bu fonksiyonda uygun dönüştürmeler yapılarak yukarıda sözü edilen mühendislik malzemeleri ve biyomühendislik için özel fonksiyonlar elde edilebilmektedir. [1]

Genel olarak bir arteri duvarı içten dışa doğru sıralanmak kaydıyla intima, media ve adventisya olmak üzere üç tabakadan meydana gelmiştir. Aslında intima arterinin en iç tabakası olup yük taşıma özelliğinden çok koruma özelliğine sahiptir. Bu nedenle mekanik açıdan arteri duvarını media ve adventisya diye iki kısımdan ibaretmiş gibi düşünmek mümkündür. Media, elastik mambran ve kas liflerinden meydana gelmiştir;

kolajen lifleri oldukça azdır. Halbuki en dıştaki adventisya tabakası ise bağ dokularıyla sarılı kolajen liflerinden oluşmuştur. Ayrıca bu lifler rastgele dağılmışlardır, belirli bir doğrultuya yönelmemişlerdir.[2]



**Şekil 1.1.** Aort Damarının İç Yapısı

İçerisinde viskoz veya viskoz olmayan akışkan bulunan ön gerilmeli veya ön gerilmemiş elastik veya viskoelastik silindirik tüpler içerisindeki harmonik dalga yayılımı problemi mühendisliğin bir çok dalında önemli uygulama alanları bulmuştur. Bu çalışmada ele alınacak olan konu, büyük kan damarlarındaki (arteriler) pulsatif kan akımı problemdir. Bu problemin incelenmesinin biyomühendislik açısından önemi, dalga hızının ve taşıma (transmission) katsayılarının damarın elastik veya viskoelastik özelliklerine bağlı olmaları nedeniyle, bu büyüklükleri deneysel olarak ölçmek suretiyle damar malzemesinin mekanik özelliklerini tayin etme ve bunların değişimini gözleme imkanı vermesindedir.[3]

## ***II. ALAN DENKLEMLERİ VE SINIR KOŞULLARI***

Bu çalışmaya esas teşkil edecek olan konu, damar içerisinde dalga yayılımı olduğundan damarın ve kanın davranışını ayrı ayrı incelemek gerekecektir. Gerçekte pulsatif hareket kalp tarafından kana uygulanmakta ise de kanın damara uyguladığı iç basınç ve

viskozitenin çeperde oluşturduğu sürtünme nedeniyle kandakine benzer bir hareket de damar içersinde oluşur. Bu hareketlerin incelenmesi için kanın ve damarın hareketini yöneten diferansiyel denklemlerin elde edilmesi gerekmektedir. Bu denklemler aşağıda incelenmiştir.

### **II.1 Akışkanın Hareket Denklemleri**

Kanın koşullara göre Newtonian olmayan bir akışkan gibi davrandığı biliniyorsa da, matematiksel kolaylığı nedeniyle kanın sıkışmaz bir Newton akışkanı olduğu varsayılacaktır.[4] Başlangıçta  $P_i$  üniform basıncının etkisiyle dengede bulunan akışkana  $p(r,z)$  biçiminde bir basınç artımı verildiğinde akışkan içerisinde  $\hat{u} = \hat{u}(r,z)$  ve  $\hat{w} = \hat{w}(r,z)$  biçiminde aksel simetrik bir hız alanı oluşacaktır. Bu durumda hareket denklemleri silindirik koordinatlarda aşağıdaki şekilde verilebilir. [5]

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \hat{p}}{\partial r} + \mu \left( \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{u}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial z^2} - \frac{\hat{u}}{r^2} \right) &= \bar{\rho} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \\ -\frac{\partial \hat{p}}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{w}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial z^2} \right) &= \bar{\rho} \frac{\partial \hat{w}}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

ve sıkışmazlık koşulu

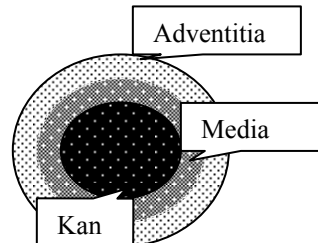
$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial r} + \frac{\hat{u}}{r} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial z} = 0 \quad (2.1.2)$$

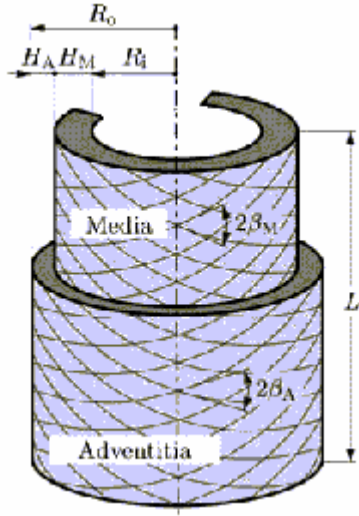
şeklini alır. Bu hız alanı sonucu oluşacak gerilme alanı ise,

$$\hat{t}_{rr} = -\hat{p} + 2\mu \frac{\partial \hat{u}}{\partial r}, \quad \hat{t}_{rz} = \mu \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial z} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial r} \right) \quad (2.1.3)$$

elde edilir.

### **II.2. Elastik Tüpün Bünye ve Hareket Denklemleri**





**Şekil 2.1.** Çalışmada Seçilen Damar Modelin Önden Ve Üstten Görünüşü

Biyolojik yumuşak dokuların davranışı genelde viskoelastik özellik göstermektedir. Ancak küçük şekil değiştirme anları durumunda viskoelastik etkiler ihmal edilebilir. Bu nedenle ve matematiksel kolaylık sağlamak amacı ile damar malzemesi hiper-elastik malzeme olarak kabul edilecektir. Diğer yandan bu çalışmada göz önüne alınan damar modeli iki farklı katmandan yani Media ve Adventitia'dan oluşmaktadır. Bu durumda tüm damar için tek bir bünye denklemi vermek mümkün olmayacaktır. Ayrıca bu katmanların belli doğrultularda lifli bir yapıya sahip olduğu kabul edileceğinden izotrop malzemeler için elde edilen sonuçlar geçerli olmayacaktır. Göz önüne alınan modelde malzeme anizotrop yapıya sahip olacaktır. Bu çalışmada damar için iki katmanlı bir model oluşturulmuş ve şekil değiştirmeden önce damarın geometrisi Şekil 2.1'de gösterilmiştir. Burada  $H_M$  ve  $H_A$  sırasıyla Media ve Adventitia'nın kalınlıklarını göstermektedir. Bu yapıdaki damar  $P_i$  iç basıncına ve  $N$  aksenal kuvvete maruz kalmış olsun. Bu kuvvetler altında damar aksenal doğrultuda  $\lambda$  sabit germesine maruz kalırken radyal doğrultuda genişleyecektir. Bu şekil değiştirme alanı  $(R, \Theta, Z)$  silindirik maddesel koordinatları,  $(r, \theta, z)$  silindirik uzaysal koordinatları göstermek üzere,

$$r = r(R), \quad \theta = \Theta, \quad z = \lambda Z \quad (2.2.1)$$

biçiminde ifade edilebilir.

Bu şekil değiştirme alanlarına bağlı olarak  $\mathbf{c}^{-1}$  Finger şekil değiştirme tansörü elde edilir ve bu şekil değiştirme altında oluşacak gerilme alanını belirlemek için gerekli olan  $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$  büyüklükleri aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$\Sigma = \Sigma(I_1, I_4, I_6) \quad (2.2.2)$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{trace } \mathbf{C} \\ I_4 &= f(\mathbf{C}, \mathbf{a}_{01}) & \mathbf{A}_1 &= \mathbf{a}_{01} \otimes \mathbf{a}_{01} \\ I_6 &= f(\mathbf{C}, \mathbf{a}_{02}) & \mathbf{A}_2 &= \mathbf{a}_{02} \otimes \mathbf{a}_{02} \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

$$d_{1kl} = A_{1KL} x_{k,K} x_{l,L} \quad d_{2kl} = A_{2KL} x_{k,K} x_{l,L} \quad (2.2.4)$$

$\mathbf{A}_1$  ve  $\mathbf{A}_2$  elde edilirken [2]'de verildiği gibi  $\mathbf{a}_{01}$  ve  $\mathbf{a}_{02}$  vektörleri kullanılmıştır.

Ön şekil değiştirme sonucu oluşacak  $t_{kl}^0$  gerilme bileşenleri aşağıdaki gibi verilir.

$$\begin{aligned} t_{rr}^0 &= P^0 + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_1} \frac{x^2}{\lambda^2} \\ t_{\theta\theta}^0 &= P^0 + 2 \left[ \frac{1}{x^2} \frac{\partial \Sigma}{\partial I_1} + \frac{1}{x^2} \cos^2 \beta \left( \frac{\partial \Sigma}{\partial I_4} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_6} \right) \right] \\ t_{zz}^0 &= P^0 + 2 \left[ \lambda^2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_1} + \lambda^2 \sin^2 \beta \left( \frac{\partial \Sigma}{\partial I_4} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_6} \right) \right] \\ t_{\theta z}^0 &= 2 \frac{\lambda}{x} \cos \beta \sin \beta \left( \frac{\partial \Sigma}{\partial I_4} - \frac{\partial \Sigma}{\partial I_6} \right) \\ t_{rz}^0 &= t_{r\theta}^0 = 0 \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

[2]'de arteriler için çeşitli şekil değiştirme enerjisi fonksiyonları önerilmiştir. Bu çalışmada, [2]'de önerilen çeşitli şekil değiştirme enerji fonksiyonlarından gerçeğe en yakını olan iki katmanlı ve bünyesinde kolajen liflerin bulunduğu fonksiyonu kullandık. Ayrıca modelimizde hem izotrop kısmın bulunduğunu, ayrıca liflerden dolayı da anizotrop kısmın bulunduğunu hesaba katarak aşağıdaki fonksiyonu çalışmamızda tercih edilmiştir.

İzotrop kısım için şekil değiştirme enerji fonksiyonu,

$$\Sigma(I_1) = \frac{c}{2} (I_1 - 3) \quad (2.2.6)$$

Anizotrop, yani lifli kısım için şekil değiştirme enerji fonksiyonu,

$$\Sigma(I_4, I_6) = \frac{k_1}{2k_2} \sum_{i=4,6} \left\{ \exp \left[ k_2 (I_i - 1)^2 \right] - 1 \right\} \quad (2.2.7)$$

olarak alınmıştır.

Bu çalışmada tüm damar malzemesi için  $\Sigma$ , şekil değiştirme enerjisi fonksiyonu [2]' de önerildiği gibi

$$\Sigma = \frac{c}{2}(I_1 - 3) + \frac{k_1}{2k_2} \left[ e^{k_2(I_4-1)^2} + e^{k_2(I_6-1)^2} - 2 \right] \quad (2.2.8)$$

alınacaktır. Ancak daha önce de belirtildiği gibi  $c, k_1, k_2$  malzeme sabitleri Media ve Adventitia için farklı olacağı için daha sonra her iki ortam için ayrı ayrı  $\Sigma_A$  ve  $\Sigma_M$  tanımlanacaktır. Ayrıca  $I_4$  ve  $I_6$  invaryantları,

$$\begin{aligned} I_4 &= f(\mathbf{C}, \mathbf{a}_{01}) = \frac{1}{x^2} \cos^2 \beta + \lambda^2 \sin^2 \beta, \\ I_6 &= f(\mathbf{C}, \mathbf{a}_{02}) = \frac{1}{x^2} \cos^2 \beta + \lambda^2 \sin^2 \beta \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

şeklinde verilir. Yukarıdaki ifadelerden  $I_4 = I_6$  olduğu görülmektedir. Bundan böyle

$I_4 = I_6 = \tilde{I}$  alınacaktır. Buna göre (2.2.5)' de

$$\begin{aligned} t_{rr}^0 &= P^0 + c \frac{x^2}{\lambda^2} \\ t_{\theta\theta}^0 &= P^0 + \frac{1}{x^2} \left[ c + 4k_1 \cos^2 \beta (\tilde{I} - 1) e^{k_2(\tilde{I}-1)^2} \right] \\ t_{zz}^0 &= P^0 + \lambda^2 \left[ c + 4k_1 \sin^2 \beta (\tilde{I} - 1) e^{k_2(\tilde{I}-1)^2} \right] \\ t_{\theta z}^0 &= t_{rz}^0 = 0 \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

elde edilir. Bu gerilme bileşenleri Media ve Adventitia için ayrı ayrı yazılmalıdır.  $c_M, k_{1M}, k_{2M}, \beta_M, \tilde{I}_M$  Media ortamına karşı gelen,  $c_A, k_{1A}, k_{2A}, \beta_A, \tilde{I}_A$  Adventitia ortamına karşı gelen büyüklükleri göstermek üzere,

$$\begin{aligned} {}_M t_{rr}^0 &= P_M^0 + c_M \frac{x^2}{\lambda^2} \\ {}_M t_{\theta\theta}^0 &= P_M^0 + \frac{1}{x^2} \left[ c_M + 4k_{1M} \cos^2 \beta_M (\tilde{I}_M - 1) e^{k_{2M}(\tilde{I}_M-1)^2} \right] \\ {}_M t_{zz}^0 &= P_M^0 + \lambda^2 \left[ c_M + 4k_{1M} \sin^2 \beta_M (\tilde{I}_M - 1) e^{k_{2M}(\tilde{I}_M-1)^2} \right] \\ {}_M t_{\theta z}^0 &= {}_A t_{\theta z}^0 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}_A t_{rr}^0 &= P_A^0 + c_A \frac{x^2}{\lambda^2} \\
{}_A t_{\theta\theta}^0 &= P_A^0 + \frac{1}{x^2} \left[ c_A + 4k_{1A} \cos^2 \beta_A (\tilde{I}_A - 1) e^{k_{2A} (\tilde{I}_A - 1)^2} \right] \\
{}_A t_{zz}^0 &= P_A^0 + \lambda^2 \left[ c_A + 4k_{1A} \sin^2 \beta_A (\tilde{I}_A - 1) e^{k_{2A} (\tilde{I}_A - 1)^2} \right]
\end{aligned} \tag{2.2.11}$$

Bu ifadelerde  $P_M^0$  ve  $P_A^0$  belirlenmesi gereken büyüklüklerdir.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial {}_M t_{rr}^0}{\partial r} + \frac{1}{r} ({}_M t_{rr}^0 - {}_M t_{\theta\theta}^0) &= 0 \quad r_i \leq r \leq \bar{r} \\
\frac{\partial {}_A t_{rr}^0}{\partial r} + \frac{1}{r} ({}_A t_{rr}^0 - {}_A t_{\theta\theta}^0) &= 0 \quad \bar{r} \leq r \leq r_0
\end{aligned} \tag{2.2.12}$$

denge denklemlerini ve,

$${}_M t_{rr}^0 \Big|_{r=r_i} = -P_i \quad {}_A t_{rr}^0 \Big|_{r=r_0} = 0 \quad {}_M t_{rr}^0 \Big|_{r=\bar{r}} = {}_A t_{rr}^0 \Big|_{r=\bar{r}} \tag{2.2.13}$$

sınır koşullarını sağlamalıdır. O halde (2.2.12) denklemlerinin (2.2.13) sınır koşulları altında çözümünden  ${}_M t_{rr}^0$  ve  ${}_A t_{rr}^0$  gerilme bileşenleri elde edilir ve

$${}_M P^0 = {}_M t_{rr}^0 - \frac{x^2}{\lambda^2} \quad {}_A P^0 = {}_A t_{rr}^0 - \frac{x^2}{\lambda^2} \tag{2.2.14}$$

şeklinde  ${}_M P^0$  ve  ${}_A P^0$  belirlenir.

Bilinen öngerilme ifadelerine bağlı olarak artımsal gerilme tansörleri ve Piola-Kirchhoff gerilme tansörü bileşenleri elde edilebilir.

Elastik cisme ait hareket denklemleri aşağıdaki biçimde verilebilir.

$$\frac{\partial p}{\partial r} + \beta_1(r) \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \beta_2(r) \frac{\partial u}{\partial r} + \beta_3(r) \frac{u}{r^2} + \beta_4(r) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{2.2.15}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \beta_1(r) \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \beta_5(r) \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r} \beta_6(r) \frac{\partial u}{\partial z} + \beta_7(r) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

Burada  $\beta_i$  katsayıları aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= t_{rr}^0 - P_0 \\
\beta_2 &= r \frac{d}{dr} (t_{rr}^0 - 2P_0) + t_{rr}^0 - P_0 + 2\alpha_2 = \frac{d}{dr} [r(t_{rr}^0 - 2P_0)] + P_0 + 2\alpha_2 \\
\beta_3 &= 2(\alpha_2 - \alpha_1) - P_0 - t_{\theta\theta}^0 \\
\beta_4 &= t_{zz}^0 - P_0 \\
\beta_5 &= -r \frac{dP_0}{dr} + r \frac{dt_{rr}^0}{dr} - P_0 + t_{rr}^0 = \frac{d}{dr} [r(t_{rr}^0 - P_0)] = \frac{d}{dr} (r\beta_1)
\end{aligned} \tag{2.2.16}$$



$$\beta_6 = -r \frac{dP_0}{dr} + 2\alpha_3$$

$$\beta_7 = 2\alpha_4 + t_{zz}^0 + P_0$$

Yukarıdaki denklemler elde edilirken sıkışmazlık koşulu kullanılarak bazı bilinmeyenler elimine edilmiştir.

### III. ALAN DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

Çalışmanın bu bölümünde fizyolojik olayın oluşumunu da dikkate alarak alan denklemlerine harmonik dalga tipinde çözümler aranacaktır. Bu amaçla alan büyüklükleri,

$$\hat{u} = \hat{U}(r) \exp[i(\omega t - kz)] \quad \hat{w} = \hat{W}(r) \exp[i(\omega t - kz)] \quad \hat{p} = \hat{P}(r) \exp[i(\omega t - kz)] \quad (3.1)$$

şeklinde ifade edilecektir. Burada  $\omega$  açısal frekansı,  $k$  dalga sayısını ve  $\hat{U}(r)$ ,  $\hat{W}(r)$  ve  $\hat{P}(r)$  ise kompleks genlik fonksiyonları olup diferansiyel denklemlerin çözümünden elde edilmesi gerekir. Bu alan büyüklükleri hareket denklemlerinde yerine konacak olursa akışkana ait büyüklükler,

$$\hat{U}(r) = -k [I_1(kr)A + J_1(sr)B] \quad s^2 = -\left( \frac{i\bar{\rho}\omega}{\mu} + k^2 \right)$$

$$\hat{W}(r) = i[kI_0(kr)A + sJ_0(sr)B] \quad \hat{P}(r) = i\bar{\rho}\omega I_0(kr)A \quad (3.2)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada  $I_0(kr)$  ve  $J_0(sr)$  sıfırıncı mertebede Bessel fonksiyonu,  $A$  ve  $B$  integrasyon sabitidir.

Elastik tüpe ait alan denklemlerinin çözümünü bulabilmek için (3.1) ifadesi (2.2.15)' de yerine yazılacak olursa aşağıdaki adi türevli diferansiyel denklem takımı elde edilir. Ve (2.2.14)' de verilen damar için denklemler sıkışmazlık koşulu göz önüne alınarak çözülecektir. Damar daha önce belirtildiği gibi iki katmandan oluştuğu için bu denklemler her iki katman için ayrı ayrı aşağıdaki gibi yazılacaktır. Burada ifade edilen diferansiyel denklemlerdeki  $A$  terimi (Adventitia) için,  $M$  terimi (Media) için kullanılmaktadır.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p^A}{\partial r} + \beta_1^A(r) \frac{\partial^2 u^A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \beta_2^A(r) \frac{\partial u^A}{\partial r} + \beta_3^A(r) \frac{u^A}{r^2} + \beta_4^A(r) \frac{\partial^2 u^A}{\partial z^2} &= \rho^A \frac{\partial^2 u^A}{\partial t^2} \\
\frac{\partial p^A}{\partial z} + \beta_1^A(r) \frac{\partial^2 w^A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \beta_5^A(r) \frac{\partial w^A}{\partial r} + \frac{1}{r} \beta_6^A(r) \frac{\partial u^A}{\partial z} + \beta_7^A(r) \frac{\partial^2 w^A}{\partial z^2} &= \rho^A \frac{\partial^2 w^A}{\partial t^2} \\
\frac{\partial u^A}{\partial r} + \frac{u^A}{r} + \frac{\partial w^A}{\partial z} &= 0
\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p^M}{\partial r} + \beta_1^M(r) \frac{\partial^2 u^M}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \beta_2^M(r) \frac{\partial u^M}{\partial r} + \beta_3^M(r) \frac{u^M}{r^2} + \beta_4^M(r) \frac{\partial^2 u^M}{\partial z^2} &= \rho^M \frac{\partial^2 u^M}{\partial t^2} \\
\frac{\partial p^M}{\partial z} + \beta_1^M(r) \frac{\partial^2 w^M}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \beta_5^M(r) \frac{\partial w^M}{\partial r} + \frac{1}{r} \beta_6^M(r) \frac{\partial u^M}{\partial z} + \beta_7^M(r) \frac{\partial^2 w^M}{\partial z^2} &= \rho^M \frac{\partial^2 w^M}{\partial t^2} \\
\frac{\partial u^M}{\partial r} + \frac{u^M}{r} + \frac{\partial w^M}{\partial z} &= 0
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Bu denklemlerin çözümleri de yine harmonik dalga tipinde olacaktır. Bu nedenle,

$$\begin{aligned}
u^A &= U^A(r) \exp[i(\omega t - kz)] \\
w^A &= W^A(r) \exp[i(\omega t - kz)] \\
p^A &= \bar{P}^A(r) \exp[i(\omega t - kz)] \\
u^M &= U^M(r) \exp[i(\omega t - kz)] \\
w^M &= W^M(r) \exp[i(\omega t - kz)] \\
p^M &= \bar{P}^M(r) \exp[i(\omega t - kz)]
\end{aligned} \tag{3.5}$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifadeler (3.3) ve (3.4)'de kullanıldığında aşağıdaki adi türevli diferansiyel denklem takımı elde edilir.

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{P}^A}{dr} + \beta_1^A \frac{d^2 U^A}{dr^2} + \frac{1}{r} \beta_2^A \frac{dU^A}{dr} + \left[ \beta_3^A \frac{1}{r^2} - \beta_4^A k^2 + \rho^A \omega^2 \right] U^A &= 0 \\
-ik\bar{P}^A + \beta_1^A \frac{d^2 W^A}{dr^2} + \frac{1}{r} \beta_5^A \frac{dW^A}{dr} - \frac{ik}{r} \beta_6^A U^A + (\rho^A \omega^2 - \beta_7^A k^2) W^A &= 0 \\
\frac{dU^A}{dr} + \frac{U^A}{r} - ikW^A &= 0
\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{P}^M}{dr} + \beta_1^M \frac{d^2 U^M}{dr^2} + \frac{1}{r} \beta_2^M \frac{dU^M}{dr} + (\beta_3^M \frac{1}{r^2} - \beta_4^M k^2 + \rho^M \omega^2) U^M &= 0 \\
-ik\bar{P}^M + \beta_1^M \frac{d^2 W^M}{dr^2} + \frac{1}{r} \beta_5^M \frac{dW^M}{dr} - \frac{ik}{r} \beta_6^M U^M + (\rho^M \omega^2 - \beta_7^M k^2) W^M &= 0 \\
\frac{dU^M}{dr} + \frac{U^M}{r} - ikW^M &= 0
\end{aligned} \tag{3.7}$$

(3.6) ve (3.7) denklem sistemleri değişken katsayılı olup analitik çözümler oluşturmak mümkün gözükmemektedir. Bu nedenle kuvvet serisi çözümleri aranacaktır. Her iki ortam için şekil değişiminden sonraki yarıçapların kalınlıklara oranı küçük kabul edilecektir.

$$\text{Media için, } r = \bar{r}(1 + \xi_M) \quad , \quad \frac{-h_M}{\bar{r}} \leq \xi_M \leq 0 \quad (3.8)$$

$$\text{Adventitia için, } r = \bar{r}(1 + \xi_A) \quad , \quad 0 \leq \xi_A \leq \frac{h_A}{\bar{r}} \quad (3.9)$$

olacaktır. Burada  $h_M$  ve  $h_A$  şekil değişiminden sonraki kalınlıklardır. Bu durumda (3.6) ve (3.7) denklemleri aşağıdaki şekli alır.

$$\begin{aligned} & \bar{r} \frac{d\bar{P}^A}{d\xi_A} + \bar{\beta}_1^A \frac{d^2 U^A}{d\xi_A^2} + \frac{1}{(1 + \xi_A)} \bar{\beta}_2^A \frac{dU^A}{d\xi_A} \\ & + \left( \bar{\beta}_3^A \frac{1}{(1 + \xi_A)^2} - \bar{\beta}_4^A \bar{r}^2 k^2 + \bar{r}^2 \rho^A \omega^2 \right) U^A = 0 \\ & - ik\bar{r}^2 \bar{P}^A + \bar{\beta}_1^A \frac{d^2 W^A}{d\xi_A^2} + \frac{1}{(1 + \xi_A)} \bar{\beta}_5^A \frac{dW^A}{d\xi_A} \\ & - \left( \frac{ik\bar{r}}{(1 + \xi_A)} \right) \bar{\beta}_6^A U^A + \left( \rho^A \bar{r}^2 \omega^2 - \bar{\beta}_7^A k^2 \bar{r}^2 \right) W^A = 0 \\ & \frac{dU^A}{d\xi_A} + \frac{U^A}{(1 + \xi_A)} - ik\bar{r} W^A = 0 \\ & \bar{r} \frac{d\bar{P}^M}{d\xi_M} + \bar{\beta}_1^M \frac{d^2 U^M}{d\xi_M^2} + \frac{1}{(1 + \xi_M)} \bar{\beta}_2^M \frac{dU^M}{d\xi_M} \\ & + \left( \bar{\beta}_3^M \frac{1}{(1 + \xi_M)^2} - \bar{\beta}_4^M \bar{r}^2 k^2 + \bar{r}^2 \rho^M \omega^2 \right) U^M = 0 \\ & - ik\bar{r}^2 \bar{P}^M + \bar{\beta}_1^M \frac{d^2 W^M}{d\xi_M^2} + \frac{1}{(1 + \xi_M)} \bar{\beta}_5^M \frac{dW^M}{d\xi_M} \\ & - \left( \frac{ik\bar{r}}{(1 + \xi_M)} \right) \bar{\beta}_6^M U^M + \left( \rho^M \bar{r}^2 \omega^2 - \bar{\beta}_7^M k^2 \bar{r}^2 \right) W^M = 0 \\ & \frac{dU^M}{d\xi_M} + \frac{U^M}{(1 + \xi_M)} - ik\bar{r} W^M = 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Büyük damarlar göz önüne alındığında  $|\xi_A| \ll 1$ ,  $|\xi_M| \ll 1$  olacaktır. Bu nedenle katsayılar  $\xi_A$  ve  $\xi_M$  cinsinden kuvvet serisine açılarak çözümler aranacaktır.

Bu durumda aşağıdaki seri açılımları yapılabilir.

$$\begin{aligned}
\bar{P}^A &= \bar{C}_A (\bar{P}_0^A + \bar{P}_1^A \xi_A + \bar{P}_2^A \xi_A^2 + \dots) & \bar{P}^M &= \bar{C}_M (\bar{P}_0^M + \bar{P}_1^M \xi_M + \bar{P}_2^M \xi_M^2 + \dots) \\
U^A &= \bar{r} (U_0^A + U_1^A \xi_A + U_2^A \xi_A^2 + \dots) & U^M &= \bar{r} (U_0^M + U_1^M \xi_M + U_2^M \xi_M^2 + \dots) \\
W^A &= \bar{r} (W_0^A + W_1^A \xi_A + W_2^A \xi_A^2 + \dots) & W^M &= \bar{r} (W_0^M + W_1^M \xi_M + W_2^M \xi_M^2 + \dots) \\
\bar{\beta}_i^A &= \bar{C}_A (\bar{\beta}_{i0}^A + \bar{\beta}_{i1}^A \xi_A + \bar{\beta}_{i2}^A \xi_A^2 + \dots) & \bar{\beta}_i^M &= \bar{C}_M (\bar{\beta}_{i0}^M + \bar{\beta}_{i1}^M \xi_M + \bar{\beta}_{i2}^M \xi_M^2 + \dots) \quad (i = 1, 2, \dots, 7)
\end{aligned} \tag{3.11}$$

burada, 
$$\bar{C} = c_M + c_A \tag{3.12}$$

şeklinde tanımlanmıştır. (3.11) ifadeleri (3.10)' de kullanılırsa ve (3.10)<sub>1</sub>, (3.10)<sub>2</sub>, (3.10)<sub>4</sub>, (3.10)<sub>5</sub> denklemlerinde sabit terimlerin (3.10)<sub>3</sub>, (3.10)<sub>6</sub> denklemlerinde sabit terimlerin ve  $\xi$ ' nin katsayılarının sıfıra eşitlenmesi ile aşağıdaki,

$$\bar{P}_0^A, \bar{P}_1^A, U_0^A, U_1^A, U_2^A, W_0^A, W_1^A, W_2^A, \bar{P}_0^M, \bar{P}_1^M, U_0^M, U_1^M, U_2^M, W_0^M, W_1^M, W_2^M$$

cinsinden lineer denklem takımı elde edilir.

$$\begin{aligned}
\bar{P}_1^A + 2\bar{\beta}_{10}^A U_2^A + \bar{\beta}_{20}^A U_1^A + \left( \bar{\beta}_{30}^A - \bar{\beta}_{40}^A \eta^2 + \Omega^2 \right) U_0^A &= 0 \\
-i\eta \bar{P}_0^A + 2\bar{\beta}_{10}^A W_2^A + \bar{\beta}_{50}^A W_1^A - i\eta \bar{\beta}_{60}^A U_0^A + \left( \Omega^2 - \bar{\beta}_{70}^A \eta^2 \right) W_0^A &= 0 \\
U_1^A + U_0^A - i\eta W_0^A &= 0 \\
2U_2^A + U_1^A - U_0^A - i\eta W_1^A &= 0 \\
\bar{P}_1^M + 2\bar{\beta}_{10}^M U_2^M + \bar{\beta}_{20}^M U_1^M + \left( \bar{\beta}_{30}^M - \bar{\beta}_{40}^M \eta^2 + \gamma^2 \Omega^2 \right) U_0^M &= 0 \\
-i\eta \bar{P}_0^M + 2\bar{\beta}_{10}^M W_2^M + \bar{\beta}_{50}^M W_1^M - i\eta \bar{\beta}_{60}^M U_0^M + \left( \Omega^2 - \eta^2 \bar{\beta}_{70}^M \right) W_0^M &= 0 \tag{3.13} \\
U_1^M + U_0^M - i\eta W_0^M &= 0 \\
2U_2^M + U_1^M - U_0^M - i\eta W_1^M &= 0
\end{aligned}$$

Burada

$$\eta = k\bar{r}, \quad \Omega^2 = \frac{\bar{r}^2 \omega^2 \rho_A}{C}, \quad \gamma = \frac{\rho_M}{\rho_A} \tag{3.14}$$

olarak tanımlanmıştır.  $\bar{\beta}_{i0}^A, \bar{\beta}_{i1}^A, \dots, \bar{\beta}_{i0}^M, \bar{\beta}_{i1}^M$  ( $i = 1, 2, \dots, 7$ ) katsayıları,

Adventitia için aşağıdaki gibi,

Media için ise,

$$\begin{aligned}
\bar{\beta}_{10}^A &= \frac{\bar{x}^2}{\lambda^2} = {}_A t_{rr0}^0 - {}_A P_0^0 & \bar{\beta}_{10}^M &= \frac{\bar{x}^2}{\lambda^2} = {}_M t_{rr0}^0 - {}_M P_0^0 \\
\bar{\beta}_{20}^A &= (-{}_A P_0^0 - 2{}_A P_1^0 + 2{}_A \alpha_{20} + {}_A t_{rr1}^0 - {}_A t_{rr0}^0) & \bar{\beta}_{20}^M &= (-{}_M P_0^0 - 2{}_M P_1^0 + 2{}_M \alpha_{20} + {}_M t_{rr1}^0 - {}_M t_{rr0}^0) \\
\bar{\beta}_{30}^A &= [2({}_A \alpha_{20} - {}_A \alpha_{10}) - {}_A P_0^0 - {}_A t_{\theta\theta 0}^0] & \bar{\beta}_{30}^M &= [2({}_M \alpha_{20} - {}_M \alpha_{10}) - {}_M P_0^0 - {}_M t_{\theta\theta 0}^0] \\
\bar{\beta}_{40}^A &= ({}_A t_{zz0}^0 - {}_A P_0^0) & \bar{\beta}_{40}^M &= ({}_M t_{zz0}^0 - {}_M P_0^0) \\
\bar{\beta}_{50}^A &= ({}_A t_{rr0}^0 + {}_A t_{rr1}^0 - {}_A P_0^0 - {}_A P_1^0) & \bar{\beta}_{50}^M &= ({}_M t_{rr0}^0 + {}_M t_{rr1}^0 - {}_M P_0^0 - {}_M P_1^0) \\
\bar{\beta}_{60}^A &= (-{}_A P_0^0 + 2{}_A \alpha_{30}) & \bar{\beta}_{60}^M &= (-{}_M P_0^0 + 2{}_M \alpha_{30}) \\
\bar{\beta}_{70}^A &= (2{}_A \alpha_{40} + {}_A t_{zz0}^0 + {}_A P_0^0) & \bar{\beta}_{70}^M &= (2{}_M \alpha_{40} + {}_M t_{zz0}^0 + {}_M P_0^0)
\end{aligned}
\tag{3.15}$$

şeklinde verilir, burada

$$\bar{x} = \left( \lambda \left( 1 - \frac{r_i^2}{\bar{r}^2} \right) + \frac{R_i^2}{\bar{r}^2} \right)^{1/2}, \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}
{}_A P_0^0 &= {}_A t_{rr0}^0 - \frac{\bar{x}^2}{\lambda^2} \\
{}_A t_{\theta\theta 0}^0 &= {}_A P_0^0 + \frac{1}{\bar{x}^2} \left[ c_A + \frac{1}{c_A} 4k_{1A} \cos^2 \beta_A (\tilde{I}_A(\bar{x}) - 1) F_A(\bar{x}) \right] \\
{}_A t_{zz0}^0 &= {}_A P_0^0 + \lambda^2 \left[ c_A + \frac{1}{c_A} 4k_{1A} \sin^2 \beta_A (\tilde{I}_A(\bar{x}) - 1) F_A(\bar{x}) \right] \\
{}_A P_1^0 &= {}_A t_{rr1}^0 - \frac{2}{\lambda^2} (\lambda - \bar{x}^2)
\end{aligned}
\tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}
{}_M P_0^0 &= {}_M t_{rr0}^0 - \frac{\bar{x}^2}{\lambda^2} \\
{}_M t_{\theta\theta 0}^0 &= {}_M P_0^0 + \frac{1}{\bar{x}^2} \left[ c_M + \frac{1}{c_M} 4k_{1M} \cos^2 \beta_M (\tilde{I}_M(\bar{x}) - 1) F_M(\bar{x}) \right] \\
{}_M t_{zz0}^0 &= {}_M P_0^0 + \lambda^2 \left[ c_M + \frac{1}{c_M} 4k_{1M} \sin^2 \beta_M (\tilde{I}_M(\bar{x}) - 1) F_M(\bar{x}) \right] \\
{}_M P_1^0 &= {}_M t_{rr1}^0 - \frac{2}{\lambda^2} (\lambda - \bar{x}^2)
\end{aligned}
\tag{3.18}$$

$$\tilde{I}_A(\bar{x}) = \frac{1}{\bar{x}^2} \cos^2 \beta_A + \lambda^2 \sin^2 \beta_A, \quad \tilde{I}_M(\bar{x}) = \frac{1}{\bar{x}^2} \cos^2 \beta_M + \lambda^2 \sin^2 \beta_M \tag{3.19}$$

$$F_A(\bar{x}) = \exp \left[ k_{2A} (\tilde{I}_A(\bar{x}) - 1)^2 \right], \quad F_M(\bar{x}) = \exp \left[ k_{2M} (\tilde{I}_M(\bar{x}) - 1)^2 \right] \tag{3.20}$$

olarak tanımlanmıştır. Sırayla Adventitia ve Media için  ${}_A \alpha_{i0}$  ve  ${}_M \alpha_{i0}$  değerleri ise,

$$\begin{aligned} {}_A \alpha_{10} &= -{}_A P_0^0 + \frac{8 \cos^4 \beta_A}{\bar{x}^4 c_A} k_{1A} k_{2A} (\tilde{I}_A(\bar{x}) - 1)^2 F_A(\bar{x}) \\ {}_A \alpha_{20} &= \frac{8 \lambda^2}{\bar{x}^2 c_A} \sin^2 \beta_A \cos^2 \beta_A k_{1A} k_{2A} (\tilde{I}_A(\bar{x}) - 1)^2 F_A(\bar{x}) \\ {}_A \alpha_{30} &= \frac{8 \lambda^2}{\bar{x}^2 c_A} \sin^2 \beta_A \cos^2 \beta_A (\tilde{I}_A(\bar{x}) - 1)^2 F_A(\bar{x}) \\ {}_A \alpha_{40} &= -{}_A P_0^0 + \frac{1}{c_A} 8 \lambda^4 \sin^4 \beta_A k_{1A} k_{2A} (\tilde{I}_A(\bar{x}) - 1)^2 F_A(\bar{x}) \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} {}_M \alpha_{10} &= -{}_M P_0^0 + \frac{8 \cos^4 \beta_M}{\bar{x}^4 c_M} k_{1M} k_{2M} (\tilde{I}_M(\bar{x}) - 1)^2 F_M(\bar{x}) \\ {}_M \alpha_{20} &= \frac{8 \lambda^2}{\bar{x}^2 c_M} \sin^2 \beta_M \cos^2 \beta_M k_{1M} k_{2M} (\tilde{I}_M(\bar{x}) - 1)^2 F_M(\bar{x}) \\ {}_M \alpha_{30} &= \frac{8 \lambda^2}{\bar{x}^2 c_M} \sin^2 \beta_M \cos^2 \beta_M (\tilde{I}_M(\bar{x}) - 1)^2 F_M(\bar{x}) \\ {}_M \alpha_{40} &= -{}_M P_0^0 + \frac{1}{c_M} 8 \lambda^4 \sin^4 \beta_M k_{1M} k_{2M} (\tilde{I}_M(\bar{x}) - 1)^2 F_M(\bar{x}) \end{aligned} \quad (3.22)$$

olarak tanımlanmıştır. Ancak  ${}_A t_{rr0}^0$ ,  ${}_M t_{rr0}^0$  ifadeleri (2.2.12) denklemlerinin (2.2.13) sınır koşulları altında çözümünden elde edilecektir. Bu ifadeler aşağıda verilmektedir.

$${}_A t_{rr0}^0 = {}_M t_{rr0}^0 = \frac{1}{c_A} {}_A t_{rr} \Big|_{r=\bar{r}} = \frac{1}{c_M} {}_M t_{rr} \Big|_{r=\bar{r}} \quad (3.23)$$

Diğer yandan (2.2.12) denklemlerinden

$$\begin{aligned} {}_A t_{rr1}^0 &= {}_A t_{\theta\theta 0}^0 - {}_A t_{rr0}^0 \\ {}_M t_{rr1}^0 &= {}_M t_{\theta\theta 0}^0 - {}_M t_{rr0}^0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

olduğu açık olarak görülmektedir.

Problemin çözümünü tamamlayabilmek için (3.7) denklemlerine ek olarak sınır koşullarının da seri açılımı ile ifade ederek ve T Piola-Kirchhoff tansörünün bileşenleri kullanılarak modele ait gerilme ve sınır şartlarımıza bağlı ifadeler aşağıda verilmiştir.

Ortak yüzeyde yer değiştirme bileşenlerinin eşit olmasından

$$\begin{aligned} U_0^A &= U_0^M \\ W_0^A &= W_0^M \end{aligned} \quad (3.25)$$

elde edilir. Media tabakasının iç yüzeyinde akışkan ile katının hız bileşenlerinin eşitlenmesi ile de,

$$\frac{\Omega^2}{\alpha} q_1 \frac{1}{(1+\xi_i)} (U_0^M + U_1^M \xi_i + U_2^M \xi_i^2) = f \bar{A} + \bar{\eta} \bar{B}$$

$$i \frac{\Omega^2}{\alpha} q_1 \frac{1}{(1+\xi_i)} (W_0^M + W_1^M \xi_i + W_2^M \xi_i^2) = \bar{\eta} \bar{A} + g \bar{B}$$
(3.26)

bulunur. Burada,

$$\xi_i = -\frac{h_M}{\bar{r}}, \quad \xi_0 = \frac{h_A}{\bar{r}}, \quad q_1 = \frac{\bar{\rho}}{\rho_A}, \quad \alpha = \left[ \frac{\bar{\rho} \bar{r}^2 \omega}{\mu} \right]^{1/2},$$

$$\bar{\eta} = \eta(1+\xi_i), \quad \hat{\gamma} = s\bar{r}, \quad \bar{\gamma} = \hat{\gamma}(1+\xi_i), \quad f = \frac{\bar{\eta} I_1(\bar{\eta})}{I_0(\bar{\eta})},$$

$$g = \frac{\bar{\gamma} J_0(\bar{\gamma})}{J_1(\bar{\gamma})}, \quad \bar{A} = \frac{i\mu I_0(\bar{\eta})}{\bar{r}^2(1+\xi_i^2)C} A, \quad \bar{B} = \frac{i\mu J_1(\bar{\gamma})}{\bar{r}^2(1+\xi_i^2)C} B$$
(3.27)

şeklinde tanımlanmıştır. Piola-Kirchoff gerilme tansörü bileşenlerini ve sınır koşullarını kullanarak bilinmeyenlerimize bağlı olarak aşağıdaki denklem sistemi elde edilir.

$$\bar{M} \bar{P}_0 + \xi_i \bar{M} \bar{P}_1 + \Gamma_1 U_1^M + \Gamma_2 U_2^M + [\alpha(1+\xi_i)^2 - 2i(\bar{\eta}^2 - f(\bar{\eta}))] \bar{A} - 2\eta i(g(\bar{\gamma}) - 1) \bar{B} = 0$$

$$i\eta \Gamma_3 U_0^M + i\eta \Gamma_4 U_1^M + \Gamma_5 W_1^M + \Gamma_6 W_2^M - 2\bar{\eta} f(\bar{\eta}) \bar{A} + (\bar{\gamma}^2 - \bar{\eta}^2) \bar{B} = 0$$

$$\bar{P}_0^A + \xi_0 \bar{P}_1^A + \Gamma_7 U_1^A + \Gamma_8 U_2^A = 0$$

$$i\eta \Gamma_9 U_0^A + i\eta \Gamma_{10} U_1^A + \Gamma_{11} W_1^A + \Gamma_{12} W_2^A = 0$$

$$\bar{P}_0^M + \Gamma_{13} U_1^M - \bar{P}_0^A + \Gamma_{14} U_1^A = 0$$

$$i\eta \Gamma_4 U_0^M - i\eta \Gamma_{16} U_0^A + \Gamma_{15} W_1^M - \Gamma_{17} W_1^A = 0$$
(3.28)

Dispersiyon bağıntısını elde etmek için 18 bilinmeyenin bulunduğu denklem takımının katsayılarından (18x18) şeklinde bir kare matris oluşturulmuştur. Problemimizin gerçekte bir stabilite problemi olması sebebiyle, bu katsayılar matrisinin determinantının sıfıra eşitlenmesi ile dispersiyon bağıntısı elde edilir. Elde edilen bağıntı çok büyük olması sebebiyle burada verilememiştir.

Bu bağıntıyı oldukça karmaşık olması sebebiyle analitik olarak incelemek mümkün değildir.

$$\left(\frac{c}{c_0}\right) = \frac{\Omega^2}{\eta^2}, \quad c_0^2 = \frac{\bar{C}}{\rho}$$

tanımları yapılmıştır. Mevcut teoriler ile bir karşılaştırmasını yapabilmek için başlangıç şekil değiştirmesi (0) olarak alındığında ve uzun dalga yaklaşımı altında (Büyük damarlarda bile  $\bar{r}$  ortalama yarıçap çok küçük olduğundan dalga boyunun uzun olması

halinde  $\eta = k\bar{r} \ll 1$  kabul edilebilir. Bu özel halde  $f = \eta^2 / 2$  şeklinde verilebilir.), dispersiyon bağıntısı aşağıdaki şekli almaktadır.

$$\left(\frac{c}{c_0}\right)^4 q_1 (\xi_o - Z \xi_i q_2) + \left(\frac{c}{c_0}\right)^2 q_1 (6\xi_o - 5\xi_i + 1) + (\xi_i - \xi_o) = 0 \quad (3.29)$$

$\xi_i$  ve  $\xi_o$  'yu küçük kabul edersek ince tüpler için (3.2.27)' nin kökleri

$$\left(\frac{c}{c_0}\right)_1^2 = -\frac{1}{\xi_o} - \frac{1}{\xi_o^2} (q_2 Z \xi_i) - \frac{1}{\xi_o^3} (q_2 Z \xi_i)^2 \dots, \quad \left(\frac{c}{c_0}\right)_2^2 = \frac{\xi_o}{q_1} - \frac{\xi_i}{q_1} \quad (3.30)$$

bulunmaktadır. Literatürde katmanlı hal için Lamb ve Young (Moens-Korteweg) modları bulunmamaktadır, bu modlar ancak tek katmanlı yapı için bulunmaktadır. Bundan dolayı oluşturduğumuz bu modeli yani iki katmanlı modeli daha basit hale getirerek Media ve Adventitia' dan oluşturduğumuz modelin dıştaki kısmı olan Adventitia tabakası kaldırılmış ve sadece Media'nın bulunduğu tek tabakalı model için katsayılar matrisi tekrar oluşturulmuş, bu durumda Lamb ve Young (Moens-Korteweg) modları [1]'de elde edilmiştir. İki katmanlı modelin özel hali olan tek katmanlı halde bulunan modların literatürdeki modlarla uyum içinde olması iki katmanlı model için şu ana kadar yapılanın doğru olduğunu göstermektedir.

Sayısal inceleme için [6], [7] tarafından önerilen boyutsuz kompleks faz hızı ,

$$\frac{c}{c_0} = X + iY \quad (3.31)$$

olarak tanımlanırsa, dalga hızları ( $V$ ) ve taşıma katsayıları ( $\chi$ )

$$V = \frac{X^2 + Y^2}{X}, \quad \chi = \exp(-2\pi Y / X) \quad (3.32)$$

şeklinde yazılabilir. Bu çalışmada sayısal inceleme de kullanılmak üzere [2]'de verilen aşağıdaki değerler kullanılmıştır.

$$\begin{aligned} c_M &= 3.0 \text{ kPa} & k_{1M} &= 2.3632 \text{ kPa} & k_{2M} &= 0.8393 \\ \beta_M &= 29.0^\circ & H_M &= 0.26 \text{ mm} & R_i &= 0.71 \text{ mm} \\ c_A &= 0.3 \text{ kPa} & k_{1A} &= 0.5620 \text{ kPa} & k_{2A} &= 0.7112 \\ \beta_A &= 62.0^\circ & H_A &= 0.13 \text{ mm} \end{aligned}$$

Problemimize ait dispersiyon bağıntılarını analitik olarak incelemek mümkün olmadığından uzun dalga yaklaşımında denklemler bilgisayarda sayısal olarak incelenmiş, sonuçlar ve grafikler aşağıda verilmiştir.



#### IV. MODELE AİT GRAFİKLERİN İRDELENMESİ

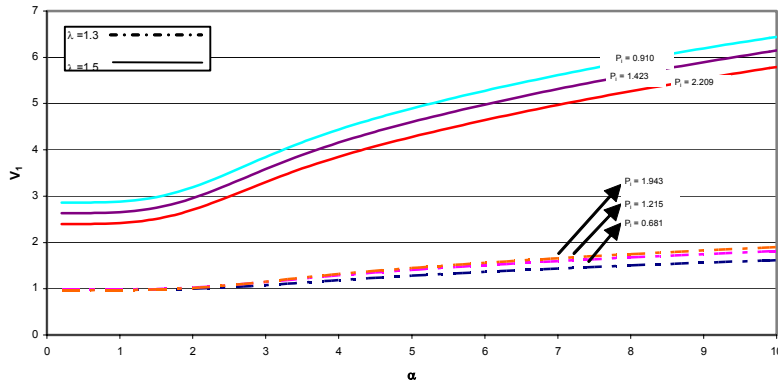
Şekil 3.1.'de birincil dalga hızının Womersley parametresi ile değişimi farklı germe değerlerinde gösterilmiştir. Tabakasız ortamdakine benzer küçük basınç değerlerinde dalga hızının değişimi sabit kalırken, basınç arttıkça artmaktadır. Tabakalı durumda da büyük germe değerlerinde büyük hızlar elde edilmektedir. Dalga hızı değerleri tabakasız ortama göre daha büyük olmaktadır.

Şekil 3.2.'de ikincil dalga hızının Womersley parametresi ile değişimi farklı germe değerlerinde verilmiştir. Şekilden görüldüğü gibi tabakasız durumda olduğu gibi küçük  $\alpha$  değerlerinde hızlı bir artım olurken büyüyen  $\alpha$  değerlerinde bu artım hemen hemen sabit kalmaktadır. Dalga hızının küçük germe değerlerindeki değeri daha büyük olmaktadır.

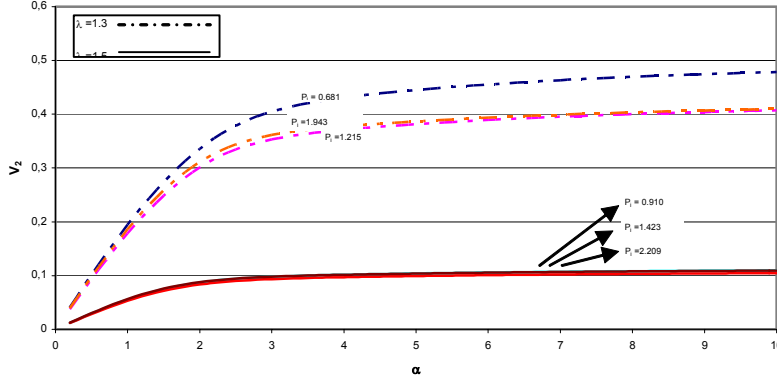
Şekil 3.3.'de birincil dalgaya ait taşıma katsayısı ile Womersley parametresinin değişimi farklı germe değerlerinde gösterilmiştir. Tabakasız duruma benzer şekilde  $\alpha$ 'nın yaklaşık 3 değerine kadar katsayı değerlerinde hızlı bir azalma ve sonrasında küçük bir artım gözlenmektedir. Tabakasız ortamın tersine küçük germe değerlerinde büyük katsayı değerlerinin olduğu net olarak gözükmektedir.

Şekil 3.4.'de ikincil dalgaya ait taşıma katsayısının değişik germe değerlerinde  $\alpha$  ile değişimi verilmiştir. Tabakalı duruma benzer olarak  $\alpha$  sıfıra giderken katsayı da sıfıra gitmektedir.  $\alpha$ 'nın artan değerlerinde artım daha hızlı olmaktadır. Ayrıca büyük germe değerlerinde büyük değerler almaktadır.

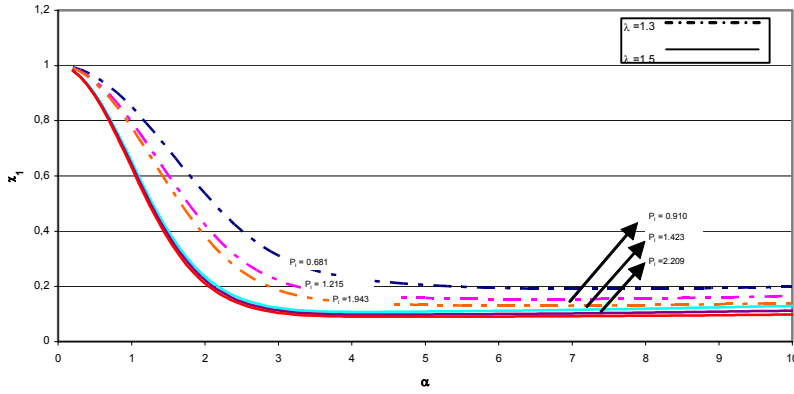
Şekil 3.1., Şekil 3.2., Şekil 3.3., Şekil 3.4.'dan görüldüğü gibi tabakalı durumda hızların ve taşıma katsayılarının germe, basınç ve Womersley parametresine bağlılığı, tabakasız ortama göre daha düzgün davranış göstermektedir.



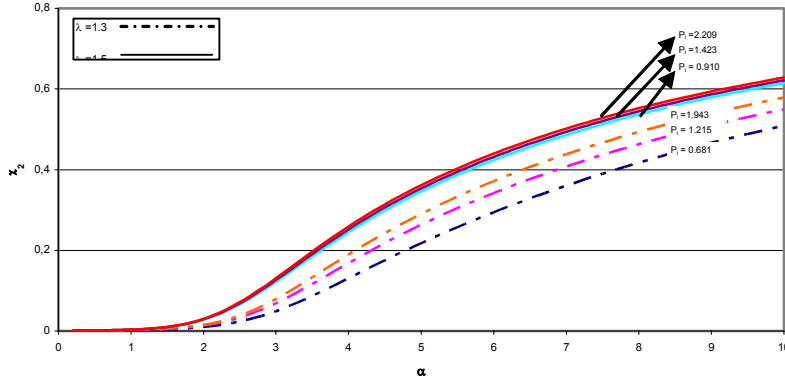
**Şekil 3.1.** İnce Kabuk, **Tabakalı (Media + Adventitia) Durumda** Birincil Dalga Hızının Womersley Parametresi, İç Basınç Ve Germe İle Değişimi



**Şekil 3.2.** İnce Kabuk, **Tabakalı (Media + Adventitia) Durumda** İkincil Dalga Hızının Womersley Parametresi, İç Basınç Ve Germe İle Değişimi



**Şekil 3.3.** İnce Kabuk, **Tabakalı (Media + Adventitia) Durumda** Birincil Dalgaya Ait Taşıma Katsayısının Womersley Parametresi, İç Basınç Ve Germe İle Değişimi



**Şekil 3.4.** İnce Kabuk, **Tabakalı (Media + Adventitia) Durumda** İkincil Dalgaya Ait Taşıma Katsayısının Womersley Parametresi, İç Basınç Ve Germe İle Değişimi

## ***V. SONUÇ VE ÖNERİLER***

İçi sıvı dolu ince cidarlı tüplerde dalga yayılması problemi ile ilgili olarak geçmişte yapılmış çalışmalara bir katkı ve farklı bir model önerme düşüncesiyle hareket ederek başlanan bu çalışmada özellikle biyomühendislikte önemli uygulama alanı bulan ve damardaki kan hareketinin modellenmesinde kullanılan bir problem ele alınmış ve içi sıvı dolu ince cidarlı, içerisinde kolajen liflerin bulunduğu iki tabakalı kompozit ortamda harmonik dalga yayılması problemi incelenmiştir. Damar ince cidarlı elastik, tabakalı ve lifli bir kompozit ortam, kan ise sıkışmaz Newtonian akışkanı olarak düşünülmüş, “Büyük şekil değiştirmeler üzerine küçük dinamik yer değiştirmelerin süperpozisyonu” teorisi kullanılarak elde edilen denklemler katı ve sıvı ortamın bünye denklemlerini de devreye sokarak yönetici diferansiyel denklemler silindirik koordinatlarda yazılmıştır. Akışkan ortam için kapalı formda bir çözüm vermek mümkün olduğu halde, katı faz için bu mümkün olmamış, bu nedenle bir kuvvet serisi çözümü verilmeye çalışılmıştır. Problemimizde kullanılan model için gerçekte kalın kabuk yaklaşımı kullanılması gerektiği halde literatürde rastladığımız çözümlerde karşılaştırma yapabilmek maksadıyla bu çalışmada da ince kabuk yaklaşımı kullanılmıştır. Elastik lifli kompozit tüpün iç ve dış yüzeylerinde, katmanlı modelin

sınır yüzeylerinde sağlanması gereken sınır koşulları kullanılarak dalgaya ait dispersiyon bağıntısı en genel haliyle elde edilmiştir.

Bu çalışmada iki tabakalı (Media + Adventitia) ve içerisinde kolajen liflerin bulunduğu model kullanılmıştır. Bu modelde kullandığımız şekil değiştirme enerjisi fonksiyonları daha önce bu konuda yapılmış çalışmalarda kullanılan sadece mühendislik malzemeleri için, ya da sadece biyomühendislik malzemeleri için önerilen fonksiyonlar olmayıp bunların her ikisini de temsil edecek bir fonksiyondur. Bu fonksiyonda uygun dönüştürmeler yapılarak yukarıda sözü edilen mühendislik malzemeleri ve biyomühendislik için özel fonksiyonlar elde edilebilmektedir.

Yapılmış olan literatür araştırmasında damarın bu biçimde modellendiği bir çalışmaya rastlanmamış o nedenle de böyle bir çalışma yapmaya karar verilmiştir. Ancak bu çalışmanın deneysel çalışmalarla da desteklenmesi halinde biyomalzemelerle çalışan araştırmacılara oldukça önemli ipuçları verebileceği düşünülmektedir.

#### **KAYNAKLAR**

- [1] Şengel, H.S., “İçi Sıvı Dolu İnce Cidarlı Kompozit Tüplerde Dalga Yayılması”, Doktora Tezi, Osmangazi Üniversitesi, F.B.E. İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı, Mekanik Bilim Dalı, 2003, Eskişehir.
- [2] Holzapfel, G.A., Gasser, T.C., “A New Constitutive Framework for Arterial Wall Mechanics and a Comparative Study of Material Models”, Journal of Elasticity, Vol. 61, pp. 1-48, 2000.
- [3] Ercengiz, A., “İçerisinde Akışkan Bulunan Öngerilmeli Elastik Tüplerde Harmonik Dalga Yayılımı”, Doktora Tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi, F.B.E. Mühendislik Bilimleri Anabilim Dalı, 1992, İstanbul.
- [4] Demiray, H., Erbay, H.A., ve Erbay, S., “Arterilerde Harmonik Dalga Yayılımı”, V.Ulusal Mekanik Kongresi, ss. 389-399, Kirazlıyayla, Eylül, 1987.
- [5] Demiray, H., Ercengiz, A., “Non-Symmtrical Waves in a Prestressed Elastic Tube Filled With an Inviscid Fluid”, International Journal of Engineering Science, Vol. 32, No. 4, pp. 605-616, 1994.

- [6] Atabek, H.B., and Lew, H.S., "Wave Propagation Through a Viscous Incompressible Fluid Contained in an Initially Stressed Elastic Tube", *Biophysics. J.*, Vol. 6, pp. 481-503, 1966.
- [7] Atabek, H.B., "Wave Propagation Through a Viscous Fluid Contained in a Tethered, Initially Stressed Orthotropic Elastic Tube", *Biophysics. J.*, Vol. 8, pp. 626-649, 1968.