Trakya Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi
Aralık 2012 Cilt 14 Sayı 2 (301-314)

AKTÜERYAL DEĞERLEMEDE MARKOV YAKLAŞIMI

Mehmet Kenan TERZİOĞLU*

ÖZET

Günümüzde sigorta ürünleri sadece korunma aracı olarak değil aynı zamanda önemli bir yatırım aracı olarak ortaya çıkmaktadır. Bu makale yatırım amaçlı, kar paylı işlemler olarak kullanılan karma sigortayı göz önüne almaktadır. Kar paylı işlemler şirketin büyümesi için sermaye kaynağı oluşturduğundan çekici bir ürün olmaktadır. Kar paylı işlemlerde, poliçe sahiplerinin yatırım fonlarına katıldığı varsayılmaktadır. Poliçe sahiplerinin ödedikleri primden masraflar, sigorta türüne göre vade sonunda elde edeceği tazminat miktarları ve aldığı opsiyonlar karşılandıktan sonra, kalan miktar yatırım fonunda değerlendirilmektedir. Sigorta poliçeleri, uzun süreli sözleşmeler olduğundan faiz oranlarındaki değişimlerden önemli ölçüde etkilenmektedir.

Bu makale, Gompertz-Makeham fonksiyonunun parametre değerlerinin anlık ölüm oranlarının belirlenmesinde kullanılmasını ve sabit prim ödemeli bireysel karma hayat sigorta poliçesinin gelişiminin sırasıyla yaşam ve ölüm durumu olmak üzere iki durumlu sürekli Markov zinciri olarak modellenmesini kapsamaktadır. Bu modelleme prim hesaplamalarında, rezerv ayrımlarında ve risk masraflarının belirlenmesinde diğer yöntemlere göre daha etkili sonuçlar vermekte ve işlem yoğunluğu açısından kolaylık sağlamaktadır.

Anahtar Kelimeler: *Gompertz-Makeham fonksiyonu, Karma sigorta, Markov zinciri, Thiele diferansiyel denklemi.*

MARKOV APPROACH IN ACTUARIAL VALUATION

ABSTRACT

In today's world, insurance products emerge not only as a means of protection but also an important investment tool. This paper takes into consideration the endowment insurance policy, dividend transactions, used as an investment tool. Dividend transactions are an attractive product due to the fact that it provides a

* Arş. Gör., Trakya Üniversitesi, İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi, Ekonometri Bölümü, kenanterzioglu@trakya.edu.tr

source of capital for the company's growth. It is assumed that policyholders participate the investment funds in dividend transactions. After expenses, amounts of damages to be obtained according to the type of insurance at maturity and the options are met by the premiums paid by policyholders; the remaining amount is valuated in the investment fund. Since insurance policies are long term contracts, they are strongly influenced by changes in interest rates.

The paper covers determining the force of mortality by using Gompertz-Makeham function parameter values and modeling two state time-continues Markov chain in which development of a single endowment insurance policy with a level premium payment is modeled as a alive and dead. The modeling process provides convenience in terms of density on calculations and gives more effective results than other methods in premium calculations, division of the reserves and determining the cost of risk.

Key Words: *Gompertz-Makeham function, Endowment insurance, Markov chain, Thiele's differential equation.*

1. GİRİŞ

İleri yaşlarında alıştıkları yaşam düzeyini sürdürebilmek ve ekonomik olarak kendilerini güvence altına almak isteyen bireyler güven duydukları yatırım araçlarına yönelmektedirler. Bu bireylerin yatırımlarını gerçekleştirecekleri kuruluşların başında sigorta şirketleri gelmektedir.

Sigorta şirketlerine yapılan yatırımların diğer yatırım kuruluşlarına yapılan yatırımlardan ayrılmasının en önemli nedeni, sigorta şirketlerinin aynı yaş grubunda ve aynı risklere maruz kalan bireyleri göz önüne alarak portföy oluşturulmasıdır. Poliçeye sahip olan aynı yaş ve özelliklerdeki kişilerin sayısı arttığında sigorta riski çeşitlenmekte ve sahip olunan portföy büyüdüğü için risk azalmaktadır (Terzioğlu, 2009).

Sigorta yükümlülüklerinin değerlemesi yapılırken dikkat edilmesi gereken risklerin başında kaza, maluliyet, hastalık ve ölüm gibi riskleri içeren aktüeryal riskler gelmektedir. Sigorta şirketleri maruz kalınan bu aktüeryal riskleri, risk havuzları oluşturarak veya çeşitlendirerek azaltmakta ve yönetmektedirler (Babbel ve Merrill,1998).

Hoem (1969) hayat sigortası matematiğinde sürekli çok durumlu Markov zinciri kullanarak olasılıksal bir taban oluşturmuştur. Bu araştırmada, tek bir hayat sigortası poliçesinin gelişimi yaşam ve ölüm durumu olmak üzere iki durumlu sürekli Markov zinciri olarak modellenmektedir.

Bu makalede, hayat sigortaları modelinin temel tanımları verilerek Gompertz-Makeham fonksiyonu anlatılmaktadır. Markov zincirlerinin

Trakya Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi
Aralık 2012 Cilt 14 Sayı 2 (301-314)

aktüeryal hesaplar ile ilişkisi incelendikten sonra iki durumlu karma hayat sigortasına yönelik hesaplamalar hakkında bilgi verilmektedir.

2. ÖLÜMLÜLÜK

Rastgele seçilmiş yeni doğan birinin yaşam süresi negatif olmayan bir T rastgele değişkeni ile gösterilebilmektedir. T'nin birikimli dağılım fonksiyonu,

$$F(t) = P\,[T \leq t] \tag{2.1}$$

şeklinde verilmektedir.

Birikimli dağılım fonksiyonu sabit bir t zamanı için, bireyin t yıl içinde ölme olasılığını (${}_tq_0$) vermektedir. Yeni doğan birinin yaşam süresi sıfıra eşit olmadığı için, F(0)=0 olarak kabul edilmektedir.

Yeni doğan bireyin t yaşına kadar yaşama olasılığını gösteren ${}_tp_0$ yaşam fonksiyonu

$$S(t) = P[T > t] = 1 - F(t) \tag{2.2}$$

olarak tanımlanmaktadır. S(t) artmayan bir fonksiyondur ve S(0)= 1 olarak alınmaktadır. F'in sürekli olduğu varsayımı altında yoğunluk fonksiyonu $f(t) = \frac{d}{dt}F(t) = -\frac{d}{dt}S(t)$ şeklinde hesaplanmaktadır (Bowers ve ark.,1997).

Aktüeryal literatürde, x yaşında bulunan ve T_x kadar yaşam süresi olan bir bireye ilişkin olan sigorta, bireysel sigorta olarak adlandırılmaktadır. t yıl süresinde yaşama durumu, ${}_tp_x$ başarı olasılığı ile bir rastgele binom değişken olan It=1[T_x>t] gösterge fonksiyonu ile gösterilmektedir. t yıl içinde ölme durumu ise ${}_tq_x=1-{}_tp_x$ başarı olasılığı ile bir rastgele binom değişken olan $1-I_t=1[T_x<t]$ gösterge fonksiyonu olarak gösterilmektedir (Norberg, 2002).

2.1. Anlık Ölüm Hızı

Bireyin t zamanında yaşadığı bilindiğine göre, (t , t+dt) küçük zaman aralığında ölme olasılığı $P(T \leq t + dt|T > t)$ olarak gösterilmekte ve bu olasılık

$$P(T \leq t + dt|T > t) = \frac{P(t < T \leq t + dt, T > t)}{P(T > t)}$$

$$= \frac{P(t<T\leq t+dt)}{P(T>t)} = \frac{f(t)dt}{S(t)} \quad , \quad S(t) \neq 0 = \mu(t)dt \tag{2.3}$$

biçiminde yazılır.

Trakya Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi
Aralık 2012 Cilt 14 Sayı 2 (303-316)

Oransal faktör olan $\mu(t)$ ulaşılan yaşa bağlıdır ve t yaşındaki anlık ölüm hızı veya ölüm yoğunluğu olarak adlandırılmaktadır. t yaşındaki bireyin, dt anında ölme olasılığı, dt zaman aralığının uzunluğuna bağlı olmaktadır. $S(0) = 1$ kullanılarak 0 dan t zamanına kadar yukarıdaki eşitliğin integrali alındığında

$$S(t) = e^{-\int_0^t \mu(t)dt} \tag{2.4}$$

eşitliği ile bireyin (0, t) aralığında yaşama olasılığı hesaplanmaktadır. $(t, t + dt)$ yaş aralığında ölmenin $f(t)$ olasılığı; t zamanına kadar yaşama olasılığı $S(t)$ ve $t + dt$ yaşından önce koşullu ölme olasılığı $\mu(t)$'nin çarpımı olarak

$$f(t) = S(t)\mu(t) = e^{-\int_0^t \mu(t)}\mu(t) \tag{2.5}$$

düzenlenmektedir. $S(\infty) = 0$ olduğu için $\int_0^\infty \mu(t)dt = \infty$ ifadesine ulaşılmaktadır (Rotar, 2007).

2.2. Kalan Hayat Süresinin Dağılımı

Yeni doğan bir bireyin x yaşına kadar yaşadığı bilindiğine göre, bireyin x ve x+t yaşları arasındaki ölme olasılığı, tüm x'ler için $S(x) > 0$ koşulu altında,

$$F(t|x) = P(x < T \leq x + t|T > x) = \frac{F(x+t) - F(x)}{1 - F(x)} = \frac{S(x) - S(x+t)}{S(x)} \tag{2.6}$$

birikimli dağılım fonksiyonu ile verilmektedir.

Bireyin bulunduğu yaş x, bireyin gelecek yaşam süresi, T(x) olarak verilmektedir. Yaşam fonksiyonu ise,

$$S(t|x) = P(T > x + t|T > x) = \frac{S(x+t)}{S(x)} \tag{2.7}$$

olarak bulunmaktadır. Bu koşullu dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(t|x) = \frac{f(x+t)}{S(x)}$ eşitliğinden bulunmaktadır. $F(t|x)$ dağılımına ilişkin anlık ölümlülük hızı $\mu(t|x) = \frac{f(x+t)}{\bar{F}(x+t)} = \mu(x + t)$ (2.8)

biçiminde bulunmaktadır. Anlık ölüm hızına bağlı olarak, yaşam fonksiyonu,

$$S(t|x) = e^{-\int_x^{x+t} \mu(t)dt} = e^{-\int_0^t \mu(x+\tau)d\tau} \tag{2.9}$$

eşitliği ile verilebilir (Norberg, 2002).

x yaşındaki bireyin beklenen kalan yaşam süresi

$$\bar{e}_x = \int_0^\infty S\,(t|x)dt \tag{2.10}$$

eşitliğinden hesaplanmaktadır (Bowers ve ark.,1997).

Trakya Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi
Aralık 2012 Cilt 14 Sayı 2 (301-314)

2.3. Gompertz- Makeham Fonksiyonu

Hayat sigortaları kapsamında insan hayatlarının yaşam sürelerini modellemek için yaygın olarak kullanılan bir dağılımdır. Ölüm yoğunluklarını hesaplamak için bu dağılım kullanılabilmektedir. Bu fonksiyona göre ölüm yoğunluğu,

$$\mu(t) = \alpha + \beta e^{\gamma t} \quad \alpha,\beta \geq 0 \tag{2.11}$$

şeklinde verilmektedir.

İlgili yaşam fonksiyonu ise,

$$S(t) = e^{-\int_0^t (\alpha+\beta e^{\gamma s})ds} = e^{\frac{(-\alpha t-\beta(e^{\gamma t}-1)}{\gamma}} \tag{2.12}$$

eşitliğinden bulunmaktadır. Eğer $\beta > 0$ ve $\gamma > 0$ ise $\mu(t)$ zamanın artan bir fonksiyonu olmaktadır. α, yaşdan bağımsız kaynaklanan ölüm oranları için bir sabit terimi, $\beta e^{\gamma t}$ terimi ise yaşa bağlı olarak gerçekleşen tüm ölümler için ölüm oranını temsil etmektedir (Norberg, 2002).

2.4. Karma Hayat Sigortası

Karma hayat sigortası tek ödemeli yaşam sigortası ve dönem sigortasının birleştirildiği sigorta türüdür. Bu sigorta kapsamında, vade sonunda sigortalının yaşaması durumunda kendisine toplu bir para veya istenildiği takdirde maaş verilmekte ve poliçe vadesi sona ermeden önce sigortalının ölümü durumunda ise poliçe lehtarına poliçede belirtilen tazminat ödemesi yapılmaktadır (Terzioğlu, 2009).

b; sigortalıya n yıl içinde ölmesine bağlı olarak veya n yılın sonunda yaşamasına bağlı olarak ödenecek bir birimlik tazminatı göstermek üzere,

$b_t = 1 \quad t \geq 0$ biçiminde, $v(t)$ iskonto oranı olmak üzere,

$v(t) = \begin{cases} v^t & t \leq n \\ v^n & t > n \end{cases}$ biçiminde, Z; sigortalıya ödenecek tazminatın $v(t)$ iskonto oranıyla hesaplanmış bügünkü değeri ise

$Z = \begin{cases} v^t & t \leq n \\ v^n & t > n \end{cases}$ eşitliği ile, ödenecek tazminatın aktüeryal bügünkü değeri,

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|},\ \bar{A}_{x:\overline{n}|} = \bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} = \int_0^\infty v^t\, {}_tp_x\, \mu_x(t)dt + v^n\, {}_np_x \tag{2.13}$$

şeklinde hesaplanmaktadır.

Bu tür poliçelerde hem ölme riski hem de yaşama riski teminat altına alındığından net primleri diğer hayat sigortaları primlerinden nispeten daha yüksektir. Yatırım amacına en uygun olan karma hayat poliçeleri, kar paylı

Trakya Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi
Aralık 2012 Cilt 14 Sayı 2 (303-316)

ya da endeksli olarak düzenlenebilmektedir (Nomer ve ark., 2004). Bu makalede, kar paylı hayat sigortaları incelenmektedir.

3. MARKOV ZİNCİRİ

İnsanların genetik yapılarına, bulundukları yaşam koşullarına ya da maruz kaldıkları çevresel faktörlere bağlı olarak yaşam süreleri farklılık göstermektedir. Yapılan istatistiksel çalışmalarla, her ülke için farklı özelliklere göre hayat tabloları oluşturulmaya çalışılmaktadır (Norberg, 2002).

Bireysel hayat sigortası sözleşmesinin gelişimi sırasıyla yaşam ve ölüm durumları olmak üzere iki durumlu sürekli zamanlı Markov zinciri olarak ifade edilmektedir. Bu durumlar sigortalının mevcut durumundaki değişimine göre tazminatlar ödendiğinde veya sigortalı bulunduğu durumu korurken ortaya çıkmaktadır.

Sıfır zamanında yürürlülüğe girmiş n yıllık bir hayat sigortası poliçesine ait tazminatlar ve primler poliçenin belirlenmiş kesin durumları arasındaki geçişlere bağlı olmaktadır. Poliçenin bulunduğu durumlar; poliçe yürürlüğe girdiği zaman sıfır durumunda başlayan ve gözlemlenen herhangi bir zaman biriminde poliçenin sadece tek bir durumda olduğu, $\mathcal{X} = \{0,1,\dots r\}$ şeklinde sonlu bir küme ile ifade edilmektedir. t zamanında poliçenin durumu $\mathrm{X}(t)$ ile gösterilmektedir. Poliçenin rastgele durumunun hesaplanması için t zamanındaki poliçenin durumu $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{P})$ olasılık uzayında stokastik süreç olarak modellenmektedir.

Olasılık modeli belirlenirken, kullanılacak modelin hem gerçeği yansıtması hem de matematiksel olarak kolayca çözümlenmesi gerekmektedir. Bu yüzden, makalede gerek beklenen değer gerekse ilgili olasılıkların hesaplanmasında kolaylık sağlayan Markov varsayımları üzerinde durulmaktadır.

3.1. Markov Süreci

Stokastik süreçler sonlu boyutlu dağılımlardan oluşmaktadır. X'nin sadece sonlu durum uzayına sahip olduğu durumda, bu dağılımlar [0,n] aralığında ve $j_1, \dots j_p \in \mathcal{X}$ iken $\bigcap_{h=1}^{p}[X(t_h) = j_h]$, $t_1 < \cdots < t_p$ başlangıç olaylarının olasılıkları tarafından $g = 0, \dots, h-1$ olmak üzere

$$\mathbb{P}\,(X(t_h) = j_h\ , h = 1, \dots, p) = \prod_{h=1}^{p} \mathbb{P}\big(X(t_h) = j_h \big| X(t_g) = j_g\,\big) \qquad (3.1)$$

olarak belirlenmektedir.

Trakya Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi
Aralık 2012 Cilt 14 Sayı 2 (301-314)

Başlangıç olarak, $t_0 = 0$ ve $j_0 = 0$ olarak kabul edildiğinde $[X(t_0) = j_0]$, 1 olasılığıyla başlangıç olayı olmaktadır. Sonuç olarak, $\mathbb{P}$ nin belirlenmesi (3.1) eşitliğinin sağında yer alan koşullu olasılıklarla gerçekleşmektedir. $t_1 < \cdots < t_p$ zamanlarının [0, n] aralığında olduğu ve $j_1, \dots j_p \in \mathcal{X}$ olduğu varsayımı altında

$$\mathbb{P}\left(X(t_p) = j_p \middle| (X(t_h) = j_h\ )\right) = \mathbb{P}\big(X(t_p) = j_p | X(t_{p-1}) = j_{p-1}\big)$$

$h = 1, \dots, p-1$ olmak üzere, biçiminde basit bir yapı belirlenmektedir. Bu bulunan basit yapı $j, k \in \mathcal{X}$ ve [0, n] aralığında t<u koşulu altında sürecin tamamıyla

$$p_{jk}(t, u) = \mathbb{P}(X(u) = k | X(t) = j) \tag{3.2}$$

basit geçiş olasılıkları tarafından belirlendiğini göstermektedir. [0,n] aralığında herhangi bir $t_1 < \cdots < t_p < t_{p+1} < \cdots < t_{p+q}$ ve $\mathcal{X}$'de $j_1, \dots j_p, j_{p+1}, \dots j_{p+q}$ için

$$\mathbb{P}\big(X(t_h) = j_h, h = p+1, \dots, p+q \big| X(t) = j, (X(t_h) = j_h\ , h = 1, \dots, p)\big)$$
$$= \mathbb{P}(\mathrm{X}(\mathrm{t_h}) = \mathrm{j_h}, \mathrm{h} = \mathrm{p}+1, \dots, \mathrm{p}+\mathrm{q} | \mathrm{X}(\mathrm{t}) = \mathrm{j}) \tag{3.3}$$

eşitliği kanıtlanabilmektedir.

"t", şimdiki zaman olarak düşünüldüğünde ve tüm geçiş zamanlarında olan olaylar düşünüldüğünde, Eşitlik (3.3)'ün sol tarafı t zamanında sürecin tüm gelişiminin bilindiği koşulu altında sürecin gelecekte bulunacağı durumun $\mathcal{X}$ durum uzayında olma olasılığını göstermektedir. Eşitlik (3.3)'ün sağ tarafı ise, durum uzayında her bir zaman birimi için bulunulan durum, sürecin geçmiş zamanlarda bulunduğu durumlarla değil bir önceki zamanda bulunulan durumun koşullu olasılığına bağlı olduğunu göstermektedir. Bugünkü durum biliniyorsa, sürecin geleceği geçmişinden bağımsız olmaktadır. Bu markov özelliği olarak adlandırılmaktadır (Rotar, 2007). Bu makalede, X, $\mathcal{X}$ durum uzayında sürekli zamanlı Markov zinciri olarak kabul edilmektedir.

3.2. Geçiş Olasılığı

$p_{jk}(t)$, $\mathrm{j}, \mathrm{k} \in \mathcal{X}$ geçiş olasılıkları,

$$0 \leq p_{jk}(t) \leq 1, \quad \mathrm{j}, \mathrm{k} \in \mathcal{X}\ ;\ \mathrm{t} \geq 0\ , \tag{3.4}$$

$$\textstyle\sum_{\mathrm{k}} p_{jk}(t) = 1, \quad \mathrm{j}, \mathrm{k} \in \mathcal{X}\ ;\ \mathrm{t} \geq 0 \tag{3.5}$$

ve

$$p_{jk}(0) = \begin{cases} 1, & \mathrm{j} = \mathrm{k} \\ 0, & \mathrm{j} \neq \mathrm{k} \end{cases} \tag{3.6}$$

özelliklerine sahiptir.

$0 \leq s \leq t \leq u$ koşulu altında (u-s) zaman aralığında i durumundan k durumuna geçiş olasılığı,

$$\mathrm{P(X(u) = k,\ X(t) = j\ /X(s) = i)} = \frac{\mathrm{P(X(u) = k, X(t) = j, X(s) = i)}}{\mathrm{P(X(s) = i)}}$$

$$= \mathrm{p_{ij}(s,t\,) * p_{jk}(t,u\,)} \qquad (3.7)$$

biçimindedir.

Eğer Z markov süreci ise ve $0 \leq s \leq t \leq u$ için Chapman Kolmogrov denklemi $p_{ik}(s,u) = \sum_{j \in Z} p_{ij}(s,t) p_{jk}(t,u)$ (3.8)
biçiminde elde edilmektedir (İnal,1988).

3.3. Geçiş Yoğunluğu

Her bir $\mathrm{j,k} \in \mathcal{Z}$, $\mathrm{j \neq k}$ ve $\mathrm{t} \in [0,\mathrm{n})$ için geçis yoğunlukları

$$\mu_{\mathrm{jk}}(\mathrm{t}) = \lim_{\mathrm{h}\to\infty} \frac{\mathrm{p_{jk}(t,t+h)}}{\mathrm{h}} \qquad (3.9)$$

şeklinde verilmektedir. Diğer bir ifade ile $\mathrm{dt} \to 0$ iken $\frac{\mathrm{o(dt)}}{\mathrm{dt}} \to 0$ için $\mathrm{p_{jk}(t,t+dt)} = \mu_{\mathrm{jk}}(\mathrm{t})\mathrm{dt} + \mathrm{o(dt)}$ olarak yazılabilmektedir.

Kısa zaman aralığındaki geçiş olasılıklarının, aralığın uzunluğuyla orantılı olduğu ve oran faktörünün sadece zamana bağlı olan yoğunluklar olduğu varsayılmaktadır. t zamanında, j durumundan diğer durumlara toplam geçiş yoğunluğu $\mu_{j.}(t) = \sum_{k;k \neq j} \mu_{jk}(t)$ (3.10)
şeklinde bulunmaktadır (Hoem, 1969).

Aynı durumda bulunma olasılığı
$\mathrm{p_{jj}(t,t+dt)} = 1 - \mu_{\mathrm{j.}}(\mathrm{t})\mathrm{dt} + 0(\mathrm{dt})$ (3.11) eşitliği ile yazılmaktadır.

3.4. Kolmogrov Diferansiyel Denklemleri

Geçiş olasılıkları zamanın iki boyutlu fonksiyonudur. Hesaplanması güç olan durumlarda tutarlı bir şekilde geçiş olasılıklarını belirlemek genellikle mümkün olmamaktadır. Bununla birlikte, geçiş yoğunlukları zamanın bir boyutlu fonksiyonudur. Kolayca uygulanabilir olmalarından dolayı modelin belirlenmesindeki başlangıç noktasını oluşturmaktadırlar. Aynı zamanda geçiş olasılıklarını belirledikleri için sistemdeki temel unsuru oluşturmaktadır.

X sürecinin t zamanında j durumunda bulunduğu varsayımı altında, verilen gelecek u zamanında sürecin k durumunda olma olasılığının

Trakya Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi
Aralık 2012 Cilt 14 Sayı 2 (301-314)

hesaplanması için, (t; t+dt) kısa zaman aralığında gerçekleşen olaylar incelenmektedir.

X süreci t zamanında j durumunda olduğuna göre, ilk durumda *X*, $(1-\mu_{j.}(t)dt)$ olasılığı ile j durumunda kalmaktadır. Bu duruma bağlı olarak sürecin u zamanında k durumunda sonlanması olasılığı ise $p_{jk}(t+dt,u)$ ile ifade edilmektedir. İkinci durumda *X*, ($\mu_{jg}(t)dt$) olasılığı ile başka bir g durumuna atlayabilir ve bu duruma bağlı olarak sürecin u zamanında k durumunda sonlanması olasılığı $p_{gk}(t+dt,u)$ olarak hesaplanmaktadır. X'in u zamanında k durumunda olma olasılığı,

$$p_{jk}(t,u) = \left(1-\mu_{j.}(t)dt\right)\, p_{jk}(t+dt,u) + \sum_{g;g\neq j} \mu_{jg}(t)dt\, p_{gk}(t+dt,u) + o(dt) \qquad (3.12)$$

şeklinde verilmektedir.

Eşitlik (3.12)'de küçük zaman aralığı için $d_t p_{jk}(t,u) = p_{jk}(t+$ dt,u−pjkt,u eşitliği yerleştirildiğinde,

$$d_t p_{jk}(t,u) = \mu_{j.}(t)dt\, p_{jk}(t,u) - \sum_{g;g\neq j} \mu_{jg}(t)dt\, p_{gk}(t,u) \qquad (3.13)$$

eşitliğine ulaşılmaktadır. Eşitlik (3.13)'de bulunan ifade

$$\frac{d}{dt} p_{jk}(t,u) = \mu_{j.}(t)\, p_{jk}(t,u) - \sum_{g;g\neq j} \mu_{jg}(t)dt\, p_{gk}(t,u) \qquad (3.14)$$

şeklinde de yazılabilmektedir. Eşitlik (3.14) Kolmogrov geriye dönük diferansiyel denklemi olarak adlandırılmaktadır (Norberg, 2002).

X süreci s zamanında i durumunda olduğuna göre, ilk durumda *X*, $(1-\mu_{j.}(t)dt)$ olasılıkla s durumunda kalmaktadır. Bu duruma bağlı olarak sürecin t zamanında j durumunda sonlanması olasılığı $p_{ij}(s,t)$ ile ifade edilmektedir. İkinci durumda *X*, ($\mu_{gj}(t)dt$) olasılığı ile başka bir g durumuna atlayabilir ve bu duruma bağlı olarak sürecin (t+dt) zamanında j durumunda sonlanması olasılığı $p_{ij}(s,t+dt)$ olarak hesaplanmaktadır. *X*'nin (t+dt) zamanında j durumunda olma olasılığı,

$$p_{ij}(s,t+dt) = \sum_{g;g\neq j} p_{ig}(s,t)\, \mu_{gj}(t)dt + p_{ij}(s,t)\left(1-\mu_{j.}(t)dt\right) + o(dt)$$

ve Kolmogrov ileriye doğru diferansiyel denklemi

$$d_t p_{ij}(s,t) = \sum_{g;g\neq j} p_{ig}(s,t)\, \mu_{gj}(t)dt - p_{ij}(s,t)\mu_{j.}(t)dt \qquad (3.15)$$

olarak gösterilmektedir (Hoem, 1988).

Sürecin devamlı olarak zamanın belli bir süresinde o anki durumda kalma olasılığı eşitlik (3.11) kullanılarak ve geriye dönük işlemler tekrarlanarak

$$p_{\overline{jj}}(t,u) = \left(1 - \mu_{j.}(t)dt\right)\, p_{\overline{jj}}(t+dt,u) + o(dt) \qquad (3.16)$$

elde edilmektedir.

Eşitlik (3.16)'e ek olarak $p_{\overline{jj}}(u,u) = 1$ eşitliği kullanıldığında

$$p_{\overline{jj}}(t,u) = e^{-\int_t^u \mu_j dt} \qquad (3.17)$$

ifadesine ulaşılmaktadır (Norberg, 2002).

4.KOLMOGROV DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

Makalede, durumlar arasındaki anlık geçiş matrisi ayrıştırılarak, geçiş olasılık matrisi hesaplanmaktadır. Olasılıklar üstel fonksiyonun doğrusal kombinasyonları olduğundan, hesaplanması gereken çeşitli durumlardaki beklenen kalma sürelerinin ve aktüeryal değerlerin integrasyonları yapılmaktadır. Anlık geçişler ve geçiş olasılıkları fonksiyonu Kolmogrov ileri ve geriye doğru denklemleriyle ilişkilidir. Anlık geçişler ve geçiş olasılıkları fonksiyonu matris formunda ifade edilebilmektedir.

Q; $k*k$ boyutlu (i,j) girişli μ_{ij} ve $P(t)$; $k*k$ boyutlu (i,j) girişli $p_{ij}(s,s+t)$ temsil etmek üzere, $P(0)=I$ koşulu altında Kolmogrov ileriye doğru ve geriye doğru denklemleri kullanılarak,

$$P'(t) = P(t) \qquad (4.1)$$

$$P'(t) = QP(t) \qquad (4.2)$$

olarak yazılmaktadır.

Eşitlik (4.1) ve (4.2)'da bulunan denklemlerinin çözümünden

$$P(t) = e^{Qt} = I + Qt + \frac{Q^2t^2}{2!} + \cdots \qquad (4.3)$$

eşitliğine ulaşılmaktadır.

Q'nun $d_1, d_2, \dots, d_k$ şeklinde ayrı özdeğerleri bulunduğunda $C = A^{-1}$, $D = diag(d_1, \dots, d_k)$ ve A'nın i. kolonu d_i ile ilgili dik özvektörü iken $Q = ADC$ yazılabilmektedir. Bu durumda (4.3) eşitliği,

$$P(t) = \mathrm{A}diag(d_1, \dots, d_k)\mathrm{C} \qquad (4.4)$$

şekline dönüşmektedir.

Geçiş olasılıklarının hesaplanması, anlık geçiş matrisi Q'nun özdeğer ve özvektörlerinin belirlenmesi durumuna dönüşmektedir. Bu makalede kullanılan iki durumlu model için geçiş matrisi

Trakya Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi
Aralık 2012 Cilt 14 Sayı 2 (301-314)

$Q = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} -\mu_{01} & \mu_{01} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$ biçimindedir.

Buradan $d_1 = -\mu_{01}\ ve\ \ d_2 = 0$ olarak ve özvektörler sırasıyla $(1,0)'$ ve $(1,1)'$ olarak hesaplanmaktadır. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ve $C = A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olmak üzere $P(t) = \text{Adiag}(\text{e}^{d_1(t)}, \text{e}^{d_2(t)})$ Cz

$= \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} e^{-\mu_{01}(t)} & 1 - e^{-\mu_{01}(t)} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$ elde edilmektedir.

$p_{00}(t) = e^{\int_0^t -\mu_{01}(t)dt}$, $p_{01}(t) = 1 - e^{\int_0^t -\mu_{01}(t)dt}$, $p_{10}(t) = 0$ ve $p_{11}(t) = 1$ şeklinde işlemlere dahil edilmektedir (Jones, 1994).

Sigorta süresi boyunca ortaya çıkacak olayın durumu, zamanı ve o durumda ödemesi taahüt edilen yapılacak her bir ödemenin miktarı tam olarak önceden tahmin edilememektedir. Bu yüzden, genelde uzun süreli olan sigorta ve annüite sözleşmeleri için primler ve rezervler sözleşme koşulları altında yapılan ödemelerin bugünkü değerine dayanmaktadır. Beklenen bugünkü değer x yaşındaki bireyin ölümüne kadar geçen süreyi ifade eden T(x) rastgele değişkeni ile iki durumlu olay için hesaplanabilmektedir.

Yaşam olasılığı, $P_{00}(s,t) = P\{X(t) = "yaşam" | X(s) = "yaşam"\}$ (4.5) şeklinde verilmektedir.

Sigorta kapsamındaki [0,n] dönemi boyunca t zamanındaki sigortalının bulunduğu durum $X(t)$ sembolü ile gösterilir.

Ölüm yoğunluğu ise $\mu(t) = \lim_{t \to s} \left(\frac{1 - p_{00}(s,t)}{t - s} \right) = \sum_{i \neq j} \mu_{ij}$ (4.6) eşitliğinden hesaplanmaktadır.

Tüm s zamanları için limitlerin var olduğu ve zamanın bir fonksiyonu olduğu için ölüm yoğunluğunun sürekli olduğu kabul edilmektedir. Anlık faiz oranı $\delta(t)$ simgesi ile gösterilmektedir. $\delta(t)$, t zamanının bir fonksiyonu olduğundan sürekli varsayılmaktadır. İskonto faktörü $v(s,t) = e^{-\int_s^t \delta(t)dt}$ (4.7) şeklinde hesaplanmaktadır (Linnemann, 2004).

t zamanında sigortalının yaşamasına bağlı olarak ödenecek bir birim tazminatın bugünkü değeri $E(s,t) = e^{-\int_s^t \delta(t)dt} p_{00}(s,t)$ (4.8) olarak tanımlanmaktadır.

Makalede, S sigorta tazminat seviyesini göstermek üzere sigortalının t zamanında ölmesi durumunda sigorta sözleşmesi çerçevesinde belirlenen sigorta tazminatı $\alpha(t)S$ ve sigorta süresi bitim tarihi olan n zamanına kadar yaşaması durumunda vade sonu tazminatı $\beta(n)S$ olmaktadır. $\alpha(t) \geq 0$ ve $\beta(n) \geq 0$ koşulu altında, $\alpha(t)$ değişkeni zamanın sürekli bir fonksiyonu olarak kabul edilmekte ve verilen tazminat birleşenlerini zamana bağlı olarak ifade etmektedirler. Bu değişkenler 0 zamanında sigorta yürürlüğe girdiğinde olasılıksal olarak sabit olmaktadır.

Sigorta şirketinin herhangi bir t zamanındaki yükümlülüğü, $t \in [0, n)$ için $\bar{A}_{x+t:\overline{n-t|}} > 0$ koşulu altında, (t,n] süresinde ödenecek olan $\alpha(u)$ ve $\beta(n)$ sigorta tazminatlarının aktüeryal değeri

$$\bar{A}_{x+t:\overline{n-t|}} = k(t) = \int_t^n E(t,u)\mu(u)\alpha(u)du + E(t,n)\beta(n)$$
(4.9)

olarak hesaplanmaktadır.

Sigortalının yükümlülüğü ise, (t,n] zaman süresi boyunca her bir zaman birimde ödenecek birim primlerdir. Bu primlerin aktüeryal değeri

$$\bar{a}_{x+t:\overline{n-t|}} = a(t) = \int_t^n E(t,u)du \qquad (4.10)$$

olarak hesaplanmaktadır (Linnemann, 2003).

Yürürlükteki sigorta tazminat seviyesinin S olduğu bilindiği ve sigorta sözleşmesi için ödenecek sabit primin π'ye eşit olduğu varsayımı altında, denklik ilkesi kullanılarak

$$\pi a(0) = Sk(0) \qquad (4.11)$$

olarak bulunmaktadır.

Herhangi bir t zamanındaki poliçe için hesaplanan ileriye dönük net prim rezervi $V(t)$; (t, n] süresi boyunca ödenecek tüm sigorta tazminatların beklenen değerinden (t, n] süresi boyunca ödenecek ilişkili primlerin beklenen değerlerinin çıkarılması ve t zamanına iskonto edilmesiyle hesaplanmaktadır.

$t \in [0, n]$ için $V(t) \geq 0$ varsayımı altında $V(t) = Sk(t) - \pi a(t)$ (4.12)

denklemine ulaşılmaktadır.

$\square(0) = 0$ koşulu altında, ileriye dönük net prim rezervi t zamanına göre diferansiyellendiğinde,

$$\frac{\square}{\square\square}\square(\square) = \square(\square)\square(\square) + \square - \square(\square)[\square(\square)\square - \square(\square)] \qquad (4.13)$$

Thieles diferansiyel denklemine ulaşılmaktadır (Linnemann, 1993).

Thieles diferansiyel denklemi t zamanındaki prim rezervindeki her bir zaman birimindeki artış oranının birleşenlerini göstermektedir. Bu artış, prim gelirine her bir t zamanındaki faizin eklenmesi ve risk masraflarının çıkarılması biçiminde oluşmaktadır.

Trakya Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi
Aralık 2012 Cilt 14 Sayı 2 (301-314)

5.SONUÇ

Hayat sigortaları uzun süreli ürünler olduklarından, sigorta şirketleri finansal ve demografik değişimlere maruz kalmaktadırlar. Bu durumda yükümlülüklerin değerlemesi sigorta şirketlerince önem kazanmaktadır. Sigorta şirketleri meydana gelen olumsuz finansal ve demografik değişimler karşısında hem yükümlülüklerini karşılayacakları hem de büyümelerini sağlayacak ek bir getiri elde etmeyi amaçlamaktadır. Sigorta şirketleri piyasadaki rekabetlerini riskleri azaltarak daha çok kar elde ederek sürdürmeye çalıştıkları için akademisyenler var olan aktüeryal değerleme yöntemlerini geliştirmeye çalışmaktadırlar.

Sigortalının verilen durumda bulunması veya bir durumdan diğer duruma geçişi bazı finansal sonuçlar ortaya çıkarmaktadır. Bu makalede; sıfır anında yürürlüğe giren ve sigortalının ölümünü temsil eden bir durumunda ödenen veya sigortalının sigorta süresinin sonuna kadar yaşaması koşuluna bağlı olarak sigorta süresi sonunda ödenebilen, belli bir toplam tazminatlı sabit prim ödemeli hayat sigortası poliçesi incelenmektedir. Poliçe, ölüm ve yaşam durumunu kapsayan karma hayat sigortası olarak ele alınmış ve Markov zinciri olarak modellenmektedir.

Bu makalede, Markov yaklaşımı kullanılarak Thiele diferansiyel denklemine geçiş yapılmaktadır. Thiele diferansiyel denkleminin sigorta portföyü için karın birikimini ve matematiksel rezervin beklenen gelişimi ile ilgili çıkarsamaları elde ettiği gösterilmektedir. Thiele diferansiyel denklemi sayesinde teknik tabandaki değişmelerden kaynaklanan matematiksel rezervlerin, t zamanındaki her birim zamandaki değişiminin etkileri ortaya çıkarılabilmektedir. Aynı zamanda teknik taban elemanlarının bazılarında meydana gelen kayıpların, diğer elemanlarından elde edilen kazançlarla nasıl dengelendiği Thiele diferansiyel denklemi kullanılarak bulunabilmektedir. Bu durumlar göz önüne alındığında hayat sigortalarının modellemesinin Markov yaklaşımı ile yapılması önem kazanmaktadır.

Markov yaklaşımı kullanılarak elde edilen Thiele diferansiyel denklemi hem yaşayan her bir poliçe sahibine ait fonun her birim zamandaki değişimini göstermekte hem de bu artış oranının, t zamanındaki prim gelirinden, kazanılan faizden ve ölenlerin fonda yaşayanlara ödenmek üzere bıraktıkları miktarlardan sağlandığını açık olarak gösterebilmektedir. Bununla birlikte Thiele diferansiyel denklemi kullanılarak her birim zamanda diğer bir duruma geçişte oluşacak risk altındaki net miktarı ve başka bir duruma geçişte meydana gelecek risk maliyeti de hesaplanabildiği

Trakya Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi
Aralık 2012 Cilt 14 Sayı 2 (303-316)

gösterilmektedir. Aktüeryal değerlemenin amacı, poliçe sahiplerinin yatırımlarını değişen piyasa koşullarını göz önünde bulundurarak risk yönetimi kapsamında kontrol altına almak ve poliçe sahiplerinin yatırımlarının getirisini arttırmaktır. Bu makale kapsamında, hem aktüeryal değerleme hesaplamalarını kolaylaştırdığı hem de yükümlülüklerinin karşılanmasında ortaya çıkan riski, diğer yöntemler göz önüne alındığında, daha kesin olarak hesaplayarak yatırımcılara geniş bir yatırım özgürlüğü sağlandığı için Markov yaklaşımının kullanılması önerilmektedir.

KAYNAKÇA

Babbel, D. F., Merrill, C., "Economic valuation models for insurers", *North American Actuarial Journal*, 2, 1998, 1-17.

Bowers, N. L., Gerber, H. U., Hickman, J. C., Jones, D. A., Nesbitt, C. J., "Actuarial Mathematics", *Society of Actuaries*,Schaumburg, IL., 1997.

Hoem, J. M., "Markov chain models in life insurance", *Blatter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik*, 9, 1969, 97-107.

Hoem, J. M., "The Versatility of Markov chain as a tool in the mathematics of life insurance", *Transactions of 23rd International Congress of Actuaries*, 1988, 171-202.

İnal, C., *Olasılıksal Süreçlere Giriş*, Hacettepe Üniversitesi Yayınları,1988.

Jones, B. L., "Actuarial calculation using a Markov Model", *Transactions of the Society of Actuaries*, 46, 1994, 69-77.

Linnemann, P., "On the application of Thiele's differential equation in life insurance", *Insurance:Mathematics and Economics*, 13, 63-74,1993.

Linnemann, P., "An actuarial analysis of participating life insurance", *Scandanavian Actuarial Journal*, 2, 2003, 153-176.

Linnemann, P., "Valuation of participating life insurance liabilities", *Scandanavian Actuarial Journal*, 2, 2004, 81-104.

Nomer, C., Yalçın, B., Yunak, H., Ersöz, F., Evren, C., Yücel, A., Özünal, F., Karaman, M., Çuhacı, Y. K., "Açıklamalı Sigorta ve Reasürans Terimleri Sözlüğü", *Milli Reasürans T.A.Ş.*, 2004.

Norberg, R., *Basic Life Insurance Mathematics*, *Cambridge University Press*, 552, 2002.

Rotar,V. I., *Actuarial Models*, Chapman&Hall, 632, 2007.

Terzioğlu, M. K., *Hayat Sigortalarında Değerleme Yaklaşımları*, Hacettepe Üniversitesi, Aktüerya Bilimleri, Yüksek Lisans Tezi, 2009.