

İSTANBUL MENKUL KIYMETLER BORSASI' NDA HİSSE SENEDİ GETİRİ VOLATİLİTESİNİN KLASİK VE BAYESYEN GARCH MODELLERİ İLE ANALİZİ

Selahattin GÜRİŞ*
İrem SAÇAKLI SAÇILDI**

ÖZET

Son yıllarda finansal piyasalarda artan işlem hacimleri, gelişen yeni yatırım araçları finansal analizlerin önemini arttırmıştır ve arttırmaya da devam etmektedir. Finansal piyasalarda oluşan volatilitenin analizi ise ayrı bir önem taşımaktadır. Klasik GARCH modelleri volatilitenin incelemesi için yaygın olarak kullanılmaktadır. Bayes Teoremi, istatistik literatüründe yer alan oldukça eski bir teoremdir ve bu teoreme dayanarak geliştirilen Bayes yaklaşımı pek çok alanda uzun yıllardır uygulanmaktadır. GARCH modelleri de Bayes yaklaşımı ile geliştirilerek bayesyen olarak tahmin edilebilir. Bu çalışmada İstanbul Menkul Kıymet Borsası' nda (İMKB) işlem gören hisse senedi getirileri için klasik ve bayesyen GARCH modelleri tahmin edilerek karşılaştırılmıştır. Burada amaçlanan İMKB için hangi modelin daha iyi sonuç verebileceğini araştırmaktır. Tahmin edilen modellerin karşılaştırılması sonucu İMKB için çalışılan dönemde anlamlı bir klasik GARCH modeli bulunamazken bayesyen GARCH modellerinin anlamlı sonuç verdiği görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Volatilité, Markov Zinciri Monte Carlo yöntemleri, Bayesyen GARCH modelleri.

* Prof. Dr., Marmara Üniversitesi, İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi, Ekonometri Bölümü, sgoris@marmara.edu.tr

** Dr., Marmara Üniversitesi, İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi, Ekonometri Bölümü, iremsacakli@marmara.edu.tr

ANALYSIS OF STOCK RETURN VOLATILITY USING CLASSICAL AND BAYESIAN GARCH MODELS IN ISTANBUL STOCK EXCHANGE

ABSTRACT

Increasing trading volume and developing new investments raise the importance of financial analysis in recent years. Analysis of volatility has a particular importance and classical GARCH models are widely used for this aim. Bayes Theorem is a very old theorem that takes part in statistical literature and the Bayesian Approach, which based on this theorem are applied in several areas for many years. GARCH models can be developed via Bayesian Approach in order to explain volatility better. In this study, the classical and bayesian GARCH models are estimated and compared for the stock return volatility of Istanbul Stock Exchange. The aim of this study is to research which models explain stock return volatility better. In contrast to classical GARCH models, the bayesian GARCH models give significant results for stock return volatility.

Key Words: *Volatility, Markov Chain Monte Carlo methods, Bayesian GARCH models.*

1. GİRİŞ

Ekonomide volatilité, zaman serisinin tesadüfi bileşenindeki değişkenlik anlamına gelmekte ve getirilerin standart sapması veya varyansı ile ölçülebilmektedir. Belirli bir zaman dönemindeki hisse senedi fiyat değişkenliği “hisse senedi volatilitesi” olarak adlandırılmaktadır. Getiri volatilitesi finansal ekonominin temel konusunu oluşturmaktadır. Volatilité, zaman serilerindeki dalgalanmaların büyüklük ve hızını belirterek finansal karar almada belirsizliği simgelemektedir¹. Genellikle risk, olumsuz bir durum yani tehlike olarak tanımlanmaktadır volatilité ise olumlu sebeplerden dolayı da meydana gelebilmektedir². Yüksek volatilité, getiri endeksinin geniş değer aralığı içerisinde yayılacağını ve endeksin riskli olacağını ifade edecek, endeks fiyatı da kısa sürede önemli ölçüde değişim

¹ Svetlozar T. Rachev ve diğerleri, *Bayesian Methods in Finance*, 1. Basım, John Wiley & Sons, Kanada 2008, s.185.

² Ser-Huang Poon, *A Practical Guide to Forecasting Financial Market Volatility*, 1. Basım, John Wiley & Sons, İngiltere 2005, s.1.

gösterebilecektir³. Düşük volatilité durumunda ise endeks fiyatı zaman içerisinde istikrarlı salınımlar izleyecek, aşırı değişimler göstermeyecektir⁴.

Volatilité analizinde yaygın olarak kullanılan GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, Genelleştirilmiş Otoregresif Şartlı Değişen Varyans) modelleri farklı yaklaşımlarla tahmin edilebilmektedir. İstatistik literatüründe yer alan ve oldukça eski bir teorem olan Bayes Teoremi' ne dayanarak geliştirilen Bayes yaklaşımı pek çok alanda uzun yıllardır uygulanmaktadır. Volatilité modelleri de Bayes yaklaşımı ile tahmin edilebilmektedir. Bu çalışmanın temel amacı, getiri volatilitelerinin tahmininde GARCH modellerini klasik yaklaşım ve Bayes yaklaşımı ile ayrı ayrı tahmin ederek sonuçları karşılaştırmaktır.

Mandelbrot (1963)⁵ ilk kez fiyatlardaki büyük dalgalanmaları yine büyük dalgalanmaların takip edeceğini, ufak dalgalanmaları yine ufak dalgalanmaların izleyeceğini ileri sürmüştür. Engle (1982)⁶ ilk kez volatilité sürekliliğini ifade etmek için ARCH modelini kullanmıştır. Bayesyen GARCH modelleri Kleibergen ve Van Dijk (1993) ile Bauwens ve Lubrano (1998)⁷ tarafından geliştirilmiştir.

Geweke (1989), Kleibergen ve van Dijk (1993) Önem örnekleme ile, Geweke (1994b)⁸ Metropolis Hastings algoritması ile Bauwens ve Lubrano (1998) ise Griddy-Gibbs örnekleycisi ile ARCH modellerinin Bayesyen tahminini yapmıştır. Uygulamada GARCH modelinin Bayesyen tahmini M-H algoritması kullanılarak incelenmiştir. Ayrıca artıkların normal ve Student-t dağıldığı bayesyen GARCH(1,1) modelleri de tahmin edilmiştir.

³ G. Andrew Karolyi, "Why Stock Return Volatility Really Matters", *Strategic Investor Relations, Institutional Investor Journals Series*, March 2001, s.2.

⁴ Volatilité, <http://www.investopedia.com/terms/v/volatility.asp>, (18.04.2009)

⁵ B. Mandelbrot, "The variation of Certain Speculative Prices", *Journal of Business*, Vol.36, No.4, 1963, s.394.

⁶ R. Engle, "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimation of the Variance of United Kingdom Inflation", *Econometrica*, Vol 50, No 4, 1982, s. 987-1007.

⁷ Luc Bauwens, Michel Lubrano, "Bayesian Inference on GARCH Models Using the Gibbs Sampler", *Econometrics Journal*, Vol. 1, 1998, s. 23-46.

⁸ J. Geweke, "Bayesian Comparison of Econometric Models", Working Paper 532, *Research Department, Federal Reserve Bank of Minneapolis*, 1994b.

2.BAYESYEN GARCH MODELLERİ

Getirilerin volatilitesi zamanla değişmektedir. Getiriler heteroskedastik yani değişen varyanslıdır. Finansal varlık getirilerinin dalgalanmaları yığılı olabilir. Volatilité kümelemesi yığın olarak adlandırılır ve volatilité kümelemesi getirilerin düşük volatilité ve yüksek volatilité periyotlarında olma eğilimini ifade etmektedir. Engle (1982)' nin ileri sürdüğü ARCH modelinin otoregresif olması volatilitenin sürme eğiliminde olduğunu, şartlı olması zamanla ya da zamanın herhangi bir noktasına göre değiştiğini, değişen varyans ise sabit volatilité olmaması durumunu ifade etmektedir. Bu modelde σ_t^2 ' nin geçmiş dönem hata terimlerine bağımlı olduğu varsayılır ve,

$$\sigma_t^2 = \sigma^2 h(\varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t-p}, \alpha)$$

olarak gösterilir. ARCH modellerinde y_t ' nin şartlı varyansı, artıkların karelerinin gecikmeli değerlerine göre zamanla değişmektedir. Bollerslev (1986)⁹ ARCH modellerinin genelleştirilmiş hali olan, analitik olarak daha kolay hesaplanabilen ve serilerin özelliklerini daha iyi ifade edebilen GARCH modellerini ileri sürmüştür. Genelleştirme şartlı varyansın gecikmeli değerinin ARCH terimlerine eklenmesi ile olmaktadır. GARCH (p,q) modeli ARCH (p) modeline q sayıda pozitif parametrenin eklenmesi ile,

$$h_t = \omega + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p y_{t-p}^2 + \gamma_1 h_{t-1} + \dots + \gamma_q h_{t-q}$$

olarak ifade edilebilir. Birçok finansal uygulama sonucunda GARCH(1,1) modelinin yeterli olduğu belirlenmiştir¹⁰. $p = q = 1$ olan GARCH(1,1) süreci,

$$h_t = \omega + \alpha y_{t-1}^2 + \gamma h_{t-1}$$

olarak ifade edilebilir.

Klasik yaklaşımda GARCH modelinin parametreleri En Çok Benzerlik Yöntemi ile tahmin edilir. Yapılan çalışmalarda artıkların

⁹ T. Bollerslev, "Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity", *Journal of Econometrics*, Vol. 31, 1986, s.307-327.

¹⁰ Robert F. Engle, "Statistical Models for Financial Volatility", *Financial Analysts Journal*, Vol. 49, No 1, 1993, s.72-88; P. Bologna, Laura Cavallo, "Does the Introduction of Index Futures Effectively Reduce Stock Market Volatility? Is the Futures Effect Immediate? Evidence from the Italian Stock Exchange Using GARCH", *Applied Financial Economics*, Vol. 12, No. 3, 2002, s. 183-192.

dağılımının normallikten sapma gösterdiği, kalın kuyruk ve eğiklik özelliğine sahip olduğu tespit edilmiştir. Bu sebeple getirileri modellemek için simetrik student-t dağılımı, genelleştirilmiş hata dağılımı (GED), kararlı (stable) pareto dağılımı ve normal dağılımların kesikli karışımı şartlı dağılımları da önerilmiştir.

Bayesyen tahminde durağanlık kısıtı gibi eşitsizlik kısıtları klasik GARCH modellerinde olduğundan çok daha kolay sağlanmaktadır¹¹. Bayesyen yaklaşımda durağan dağılım kolayca belirlenebilir. Benzerlik fonksiyonunun parametrelere göre doğrusal olmadığı durumlarda optimizasyonu çok güç olmaktadır. Markov Chain Monte Carlo (MCMC) sadece model parametrelerinin değil, aynı zamanda fonksiyonlarının da son olasılık dağılımlarını bulmada esneklik sağlamaktadır.

Bollerslev ve diğerleri (1992)¹² Student-t artıklarına sahip GARCH(1,1) modelini (Student-GARCH(1,1)),

$$\begin{aligned} y_t &= \varepsilon_t \sqrt{h_t} \\ \varepsilon_t | \mathfrak{F}_{t-1} &\sim \text{Student}(0, 1, \nu) \\ h_t &= \omega + \alpha y_{t-1}^2 + \gamma h_{t-1} \end{aligned}$$

olarak ifade etmiştir. Burada $t = 1, \dots, T$ dir. Student yoğunluğu, kalın kuyruklu olması nedeni ile finansal serilerdeki aşırı basıklık özelliğini normal yoğunluktan daha iyi yansıtmaktadır. Geçmiş bilgiye (\mathfrak{F}_{t-1}) şartlı olarak y_t sıfır ortalama, $h_t \nu / (\nu - 2)$ varyansla ($\nu > 2$ varsayımı ile) Student-t dağılmaktadır. Varyans denkleminin parametreleri, h_t ' nin pozitifliğini sağlayacak şekilde $\omega \geq 0$, $\alpha > 0$ ve $\gamma \geq 0$ ile kısıtlanmıştır. y_t sürecinin kovaryans durağanlığını sağlamak için $\nu > 2$ varsayımı ile,

$$0 \leq \alpha \frac{\nu}{\nu-2} + \gamma < 1$$

kısıtı konulabilir. Zayıf ve güçlü durağanlık için $\gamma < 1$ şartı gerek şarttır. T gözlem sayılı son olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$\varphi(\theta|y) \propto \varphi(\theta) l(\theta|y)$$

olarak gösterilir¹³. Burada $\varphi(\theta)$ marjinal olasılık yoğunluğunu, $l(\theta|y)$ de benzerlik fonksiyonunu ifade etmektedir. θ , $(\omega, \alpha, \gamma, \nu)$ parametre vektörünü

¹¹ J. Geweke, "Bayesian Inference in Econometric Models Using Monte Carlo Integration", *Econometrica*, Vol. 57, No. 6, 1989a, s. 1317-1339.

¹² T. Bollerslev, R. Y. Chou, K. F. Kroner, "ARCH Modelling in Finance: A Review of the Theory and Empirical Evidence", *Journal of Econometrics*, Vol. 52, 1992, s. 5-59.

¹³ Bauwens, Lubrano, *Bayesian Inference on GARCH Models Using the Gibbs Sampler*, s. 25.

göstermektedir. Benzerlik fonksiyonu,

$$l(\theta; y, \mathfrak{S}_0) \propto \prod_{t=1}^T \left[\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{v}{2}\right) \right] [(v-2)h_t]^{-1/2} \left[1 + \frac{y_t^2}{(v-2)h_t} \right]^{-(v+1)/2}$$

olarak ifade edilmektedir. Klasik GARCH modelinde h_t şartlı varyanstır. $\varepsilon_t \sim t(0,1,1/v, v)$ ise benzerlik fonksiyonu,

$$l(\theta; y, \mathfrak{S}_0) \propto \prod_{t=1}^T \left[\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{v}{2}\right) \right] (vh_t)^{-1/2} \left[1 + \frac{y_t^2}{vh_t} \right]^{-(v+1)/2}$$

olarak gösterilebilir..

$\varphi(\theta)$ ilk olasılık yoğunluk fonksiyonu parametreler üzerindeki pozitiflik kısıtını ve $\gamma < 1$ şartını sağlamalıdır. Bauwens ve Lubrano (1998) v için sıfır etrafına merkezlenmiş Cauchy dağılımının sağ-yarı tarafını (üst yarısını) ilk dağılım olarak önermiştir. v için başka bir ilk seçenek de $[0, K]$ aralığında uniform dağılımdır. K herhangi bir sonlu sayıdır. Finansal getiri verileri ile yapılan uygulamalı çalışmalar, serbestlik derecesi parametresinin genelde 20' den küçük değerlerde olduğunu göstermiştir. Bu sebeple v aralığının K üst sınırı 20' ye sabitlenebilir.

GARCH (1,1) modelinin M-H algoritması ile tahmini artıkların normal ve Student-t dağıldığı durumlar için ayrı ayrı incelenecektir.

3. ARTIKLARIN NORMAL DAĞILDIĞI GARCH(1,1) MODELİNİN BAYESYEN TAHMİNİ

GARCH modellerinin tahmininde parametrelerin pozitiflik ve modelde kovaryans durağanlık şartının sağlanması kısıtları optimizasyon sürecini karmaşıklaştırmaktadır. GARCH modelinin En Çok Benzerlik tahminicisinin ve test istatistiklerinin performansı da sınırlıdır. LM, Wald ve LR test istatistikleri büyük örnek hacimlerinde iyi sonuçlar vermektedir. Bayesyen yaklaşımda parametreler üzerindeki herhangi kısıt MCMC yöntemi ile sağlanabilir, küçük örneklerde kesin sonuçlara ulaşılabilir¹⁴.

Daha önce ifade edildiği gibi normal-GARCH(1,1) hatalarına sahip doğrusal regresyon modeli $t = 1, \dots, T$ için,

$$y_t = x_t' \beta + e_t$$

$$e_t = \sqrt{h_t} \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0,1)$$

¹⁴ David Ardia, "Bayesian Estimation of the GARCH(1,1) Model with Normal Innovations", *Student*, 5(3-4), pp.283-298, ISSN:1420-1011, September 2006, s.284.

$$h_t = \omega + \alpha e_{t-1}^2 + \gamma h_{t-1}$$

olarak ifade edilmektedir. Burada $\omega > 0$, $\alpha \geq 0$ ve $\gamma \geq 0$ olmalıdır. $N(0,1)$, standart normal yoğunluk fonksiyonudur. y_t bağımlı değişken, x_t (mx1) boyutlu dışsal ya da gecikmeli bağımlı değişken vektörüdür. β regresyon katsayılarının (mx1) boyutlu vektörüdür. h_t geçmiş şokların karelerinin ve geçmiş varyansın doğrusal bir fonksiyonudur. Parametreler üzerindeki pozitiflik kısıtı, şartlı varyansın pozitif olmasını sağlamaktadır. Benzerlik fonksiyonunu yazmak için $y = (y_1, \dots, y_T)'$ ve $\lambda = (\omega \alpha)'$ vektörleri tanımlanmıştır. X ise t. ci satırı x_t' olan (Txm) boyutlu matristir. Parametreler de $\theta = (\beta, \lambda, \gamma)$ vektörü ile gruplanmıştır. (TxT) köşegen matrisi $\Sigma = \Sigma(\theta) = \text{diag}(\{h_t(\theta)\}_{t=1}^T)$ olarak tanımlanarak,

$$h_t(\theta) = \omega + \alpha e_{t-1}^2 + \gamma h_{t-1}(\theta)$$

$$e_t(\beta) = y_t - x_t' \beta$$

yazılabilir. θ ' nın benzerlik fonksiyonu,

$$I(\theta|y, X) \propto (\det \Sigma)^{-1/2} \exp \left[-\frac{1}{2} e' \Sigma^{-1} e \right]$$

olarak yazılır. İlk gözlem başlangıç değeri olarak kullanılır ve başlangıç varyansı ω ' ya sabitlenir. Bu benzerlik GARCH sürecinin şartlı benzerlik fonksiyonudur. β, λ ve γ parametreleri için,

$$p(\beta) \propto N_m(\beta | \mu_\beta, \Sigma_\beta) I_{[\beta > 0]}$$

$$p(\lambda) \propto N_2(\lambda | \mu_\lambda, \Sigma_\lambda) I_{[\lambda > 0]}$$

$$p(\gamma) \propto N(\gamma | \mu_\gamma, \Sigma_\gamma) I_{[\gamma > 0]}$$

integrali alınabilen ilk olasılık dağılımları önerilmiştir. Burada μ_\bullet ve Σ_\bullet hiperparametrelerdir^{15*}, I_\bullet ise kısıtın geçerli olması durumunda bire, olmaması durumunda sıfıra eşit olan gösterge fonksiyonudur. N_d , d-boyutlu normal dağılımdır ($d > 1$). β, λ ve γ arasında ilk olasılıkların bağımsız

* Hiyerarşik modeller sayesinde farklı düzeydeki değişkenlere aynı istatistikel modelde yer verilmektedir. Bilindiği gibi bayesyen modellerde benzerlik fonksiyonu ile ilk olasılık dağılım fonksiyonu çarpılarak son olasılık dağılım fonksiyonu $\pi(\theta|X) \propto L(\theta|X)p(\theta)$ olarak ifade edilebilir. Burada θ parametresinin bilinmeyen başka bir γ parametresine şartlı olduğu düşünülürse son olasılık fonksiyonu, $\pi(\theta, \gamma|X) \propto L(\theta|X)p(\theta|\gamma)p(\gamma)$ olarak hesaplanmaktadır. Burada $p(\gamma)$, γ ' nın ilk olasılık dağılımıdır. Yukarıdaki ifadede θ ' nın marjinal dağılımını elde etmek için çoğu zaman MCMC yönteminin kullanılması gerekmektedir. Burada θ ilk olasılık dağılımı $p(\theta|\gamma)$, kendi ilk olasılık dağılımı olan başka bir γ parametresine şartlı olmaktadır. $p(\gamma)$, “hiperparametre” ya da “hiper ilk olasılık” olarak adlandırılmaktadır.

olduğu varsayılmıştır ve ortak son olasılık yoğunluk fonksiyonu Bayes Kuralı ile,

$$p(\theta|y, X) \propto I(\theta|y, X)p(\theta)$$

olarak gösterilir¹⁶.

Varyans denklemi ardışık yapıda olduğundan benzerlik fonksiyonu ile ortak ilk olasılık yoğunluk fonksiyonu arasında eşlenikliğe olanak vermemektedir. Bu nedenle ortak son olasılık dağılımının simülasyonu gerekmektedir. Dağılımdan örnekler Metropolis-Hastings (M-H) algoritması ile çekilir. Buradaki algoritma Nakatsuma (1998)' in özel bir halidir. Ortak ilk olasılık dağılımından bir başlangıç değeri çekilir $\theta^0 = (\beta^0, \lambda^0, \gamma^0)$ ve θ için iteratif olarak J geçiş yapılır. Tek bir geçiş,

$$\beta^j \sim p(\beta|\lambda^{j-1}, \gamma^{j-1}, y, X)$$

$$\lambda^j \sim p(\lambda|\beta^j, \gamma^{j-1}, y, X)$$

$$\gamma^j \sim p(\gamma|\beta^j, \lambda^j, y, X)$$

olarak ayrıştırılır. Şartlı dağılımın tamamı analitik olarak bilinmediğinden β, λ ve γ önerilen bu üç yoğunluktan çekilir.

M-H algoritması ile bayesyen GARCH (1,1) modelinin β katsayıları, ARCH katsayıları ve GARCH katsayıları ayrı ayrı elde edilebilir¹⁷.

4. ARTIKLARIN STUDENT-T DAĞILDIĞI GARCH(1,1) MODELİNİN BAYESYEN TAHMİNİ

Student-t artıklarına sahip klasik GARCH(1,1) süreci doğrusal regresyon modeli için,

$$y_t = x_t' \beta + e_t \quad (t = 1, \dots, T)$$

$$e_t = \sqrt{\frac{v-2}{v}} h_t \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim s(0, 1, v)$$

$$h_t = \omega + \alpha e_{t-1}^2 + \gamma h_{t-1}$$

olarak ifade edilmektedir. En Çok Benzerlik Yöntemi ile parametrelerin

¹⁶ David Ardía, *Financial Risk Management with Bayesian Estimation of GARCH Models: Theory and Applications*, Volume 612 of Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 1. Basım, Springer-Verlag, Berlin 2008, s. 40.

¹⁷ Ardía, *Bayesian Estimation of the GARCH(1,1) Model with Normal Innovations*, s.286; Ardía, *Financial Risk Management with Bayesian Estimation of GARCH Models: Theory and Applications*, s. 20; S. Chib, E. Greenberg, "Bayes Inference in Regression Models with ARMA(p,q) Errors", *Journal of Econometrics*, Vol 64, No 1-2, 1994, s. 183-206.

tahmininde parametre vektörü θ ' nın ($\theta = (\beta, \omega, \gamma, \nu)$) benzerlik fonksiyonu klasik çıkarımda kullanılabilir ancak bayesyen açıdan kullanılamamaktadır. Parametreleri, özellikle de serbestlik derecesi parametresi ν ' yi elde etmek için önerilen yoğunlukları bulmak çok güçtür. Bu sorunu ortadan kaldırmak için hata süreci $\{e_t\}$ Geweke (1993)' ün önerdiği şekilde ifade edilebilir ve,

$$e_t = \sqrt{\frac{\nu-2}{\nu}} \varpi h_t \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0,1), \quad \varpi_t \sim IG\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2}\right),$$

olarak yazılabilir. ϖ_t ' ye şartlı olarak e_t hata terimi sıfır ortalama, $\varpi_t \frac{\nu-2}{\nu} h_t$ varyans ile normal dağılmaktadır. $\frac{\nu-2}{\nu} h_t$ değişen varyanslı fonksiyon ϖ_t gizil değişkeni ile çarpılmıştır. ϖ_t ' nin dağılımı ters (inverted) gamma dağılımıdır*. Yukarıdaki gösterim Student-t dağılımının normal dağılımların ölçek karışımı gösterimidir¹⁸. Birçok kalın kuyruklu dağılım normal dağılımların ölçek karışımı olarak gösterilebilir. Bu gösterimler iteratif yöntemlere dayanan tahminin daha kolay yapılmasını sağlar ve son olasılık dağılımının matematiksel olarak çözülebilmesini sağlar çünkü doğrusal olmayan benzerlik fonksiyonu doğrusal hale gelir ve parametrelerin şartlı dağılımından örnek almak kolaylaşır. ϖ_t aslında karışım değişkenlerinin vektörüdür. Bu durumda ilave olarak $\varpi = (\varpi_1, \dots, \varpi_T)'$ parametrelerinin şartlı son olasılık dağılımının da simüle edilmesi gerekir.

Gizil değişkenler (Tx1) boyutlu $\varpi = (\varpi_1, \dots, \varpi_T)'$ vektörü ile yeniden gruplanır. Arttırılmış (augmented) parametre kümesi de $\psi(\theta, \varpi)$ olarak tanımlanır. Daha önce ifade edildiği gibi yine $y = (y_1, \dots, y_T)'$, $\lambda = (\omega, \alpha)'$, $\theta = (\lambda, \gamma, \nu)'$ olarak alınmıştır. TxT köşegen matrisi,

$$\Sigma = \Sigma(\psi) = \left(\text{diag} \left(\left\{ \varpi_t \frac{\nu-2}{\nu} h_t(\beta, \lambda, \gamma) \right\}_{t=1}^T \right) \right)$$

olarak tanımlanmıştır. ψ 'nin benzerlik fonksiyonu,

$$I(\psi|y, X) \propto (\det \Sigma)^{-1/2} \exp \left[-\frac{1}{2} e' \Sigma^{-1} e \right]$$

olarak ifade edilebilir. β, λ ve γ parametreleri için daha önce artıkların normal dağıldığı bayesyen GARCH(1,1) modelinde belirtilen ilk olasılık dağılımları önerilmektedir. ϖ_t bileşenlerinin ters Gamma yoğunluk

* Ters (inverted/inverse) gamma dağılımı iki parametrelili sürekli olasılık dağılımıdır ve gamma dağılımına uyan bir değişkenin tersinin dağılımıdır. Ters gamma dağılımı normal dağılımın varyansının eşlenik ilk olasılık dağılımı olması sebebi ile Bayesyen istatistikte yaygın olarak kullanılmaktadır. (http://en.wikipedia.org/wiki/Inverse-gamma_distribution)

¹⁸ Geweke, *Bayesian Treatment of the Independent Student-t Linear Model*, s. 23.

fonksiyonundan bağımsız olarak özdeş dağıldığı varsayımı ile ϖ vektörünün v ' ye şartlı olarak elde edilen ilk olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$p(\varpi|v) = \left(\frac{v}{2}\right)^{\frac{Tv}{2}} \left[\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\right]^{-T} \left(\prod_{t=1}^T \varpi_t\right)^{-\frac{v}{2}-1} \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^T \frac{v}{\varpi_t}\right]$$

olarak ifade edilir. v ' nin ilk olasılık dağılımı çevrilmiş (translated) üstel dağılımdır¹⁹. $\mu_\lambda, \Sigma_\lambda, \mu_\gamma, \Sigma_\gamma$ hiperparametrelerinin ilk olasılıkları belirsizdir. İlk olasılıkların bağımsızlığı varsayımı ile ortak ilk olasılık,

$$p(\theta) = p(\lambda)p(\gamma)p(\varpi|v)p(v)$$

olarak ifade edilir. Bu ortak ilk olasılık ile benzerlik fonksiyonu, Bayes Kuralı ile birleştirilerek son olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$p(\psi|y, X) \propto I(\psi|y, X)p(\psi)$$

olarak gösterilir. Benzerlik fonksiyonu ile ilk olasılık yoğunluk fonksiyonu arasında eşleniklik olmadığından örnekler M-H algoritması ile ortak son olasılık yoğunluk fonksiyonundan elde edilir.

Ortak son olasılık dağılımından örnekler Metropolis-Hastings (M-H) algoritması ile çekilir. Ortak ilk olasılık dağılımından bir başlangıç değeri çekilir $\theta^0 = (\beta^0, \lambda^0, \gamma^0, \varpi^0, v^0)$ ve θ için iteratif olarak J sayıda geçiş yapılır. Tek bir geçiş,

$$\beta^j \sim p(\beta|\lambda^{j-1}, \gamma^{j-1}, \varpi^{j-1}, v^{j-1}, y, X)$$

$$\lambda^j \sim p(\lambda|\beta^j, \gamma^{j-1}, \varpi^{j-1}, v^{j-1}, y, X)$$

$$\gamma^j \sim p(\gamma|\beta^j, \lambda^j, \varpi^{j-1}, v^{j-1}, y, X)$$

$$\varpi^j \sim p(\varpi|\beta^j, \lambda^j, \gamma^j, v^{j-1}, y, X)$$

$$v^j \sim p(v|\varpi^j)$$

olarak ayrıştırılır. Sadece ϖ vektörü bilinen bir ifadeden simüle edilebilir, v parametresinin örneklenmesi optimize edilmiş red tekniğine dayanır²⁰.

M-H algoritması ile artıkların Student-t dağıldığı bayesyen GARCH (1,1) modelinin β katsayıları, ARCH katsayıları ve GARCH katsayıları ayrı ayrı elde edilebilir.

¹⁹Çevrilmiş üstel dağılımın $(Exp(\alpha, \underline{\mu}))$ yoğunluğu $g_\alpha(z) = \alpha e^{-\alpha(x-\underline{\mu})} \mathbb{I}_{z \geq \underline{\mu}}$ olarak gösterilmektedir. $\underline{\mu}, \mu$ ile karşılaştırıldığında dah büyük sınır değerini ifade etmektedir. (Christian P. Robert, George Casella, *Monte Carlo Statistical Methods*, 2nd edition, Springer, New York 2004, s. 53.)

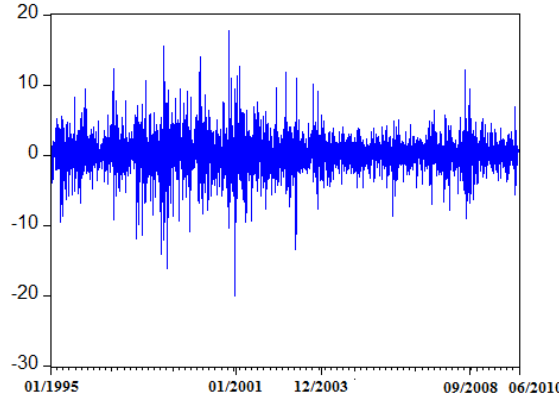
²⁰ Ardia, *Financial Risk Management with Bayesian Estimation of GARCH Models: Theory and Applications*, s. 59.

5. UYGULAMA

Getirilerde oluşan volatilité, modeller kurularak açıklanmak istendiğinde volatilité modelleri olarak adlandırılan klasik ARCH/GARCH tipi modeller kullanılabilir. Volatilitenin daha iyi açıklanabilmesi için kullanılacak modeller Bayes yaklaşımı ile geliştirilerek bayesyen olarak da tahmin edilebilir. Burada amaç İMKB' de işlem gören hisse senedi getirileri için klasik ve bayesyen GARCH modellerini tahmin ederek, hangi tür modelin daha iyi sonuç verebileceğini araştırarak sonuçları karşılaştırmaktır.

Uygulamada 04.01.1995-18.06.2010 tarihleri arasındaki İMKB-100 endeksinin günlük getiri serileri kullanılmıştır. Getiri serisi $y_t = (\log p_t - \log p_{t-1}) * 100$ formülü ile hesaplanmıştır. Burada p_t endeksin t günündeki kapanış fiyatını, p_{t-1} ise $(t - 1)$ günündeki kapanış fiyatını ifade etmektedir.

Grafik 1' de İMKB-100 getiri endeksinin zaman serisi grafiği görülmektedir. Grafik incelendiğinde 1995-2003 yılları arasında volatilitenin diğer dönemlere göre daha yüksek olduğu ve Ocak 2001' de en yüksek seviyeye ulaştığı sonraki dönemlerde azaldığı 2008 yıllarının sonlarında ise volatilitede tekrar bir artış olduğu gözlenmektedir.



Grafik 1. İMKB-100 getiri endeksinin zaman serisi grafiği

Tablo 1' de getiri endekslerinin tanımlayıcı istatistikleri yer almaktadır. Serinin ortalaması 0.14' tür. Eğikliği incelendiğinde sola çarpık olduğu, basıklığına bakıldığında ise sivri olduğu, yani dağılımın kalın

kuyruklu olduğu görülmektedir. Jarque-Bera normal dağılım testi sonucuna bakıldığında serinin normal dağılmadığı görülmektedir.

Tablo 1. İMKB-100 getiri endeksinin tanımlayıcı istatistikleri

	Ort	Me	Ma	Mi	SS	E	B	JB	Olas.	N
İM	0.14	0.15	17.8	-19.9	2.7	-0.04	7.6	3460.6	0.0	3841

*Tabloda ort; ortalama, me; medyan, ma; maksimum, mi; minimum, SS; standart sapma, E; eğiklik, B; basıklık, JB; Jarque-Bera Test istatistiği, Olas; Jarque-Bera Testi olasılık değerini, N; gözlem sayısını ifade etmektedir.

5.1 Durağanlık Analizi

İMKB-100 getiri endeksinin durağan olup olmadığını incelemek için Augmented Dickey-Fuller (1979, ADF) Testi ile parametrik olmayan Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (1992, KPSS), Phillips-Perron (1988, PP) testleri yapılmıştır.

Phillips-Perron testinde temel hipotez birim kök var şeklindedir ve hipotezler: $H_0: \alpha = 0$ ve $H_1: \alpha < 0$ olarak kurulur. Test istatistiğinin asimtotik dağılımı ADF testi ile aynıdır. Bu nedenle test istatistiği MacKinnon kritik değerleri ile karşılaştırılarak karar verilir.

KPSS testinde ise temel hipotez birim kök yok şeklindedir. Artıkların sıfır frekansta spektrum tahmincisine dayanarak bir LM istatistiği hesaplanır ve bu test istatistiği KPSS (1992) kritik değerleri ile karşılaştırılarak karar verilir.

Tablo 2' de analiz sonuçları yer almaktadır. ADF Testi için % 1, % 5 ve % 10 kritik değerler -2.57, -1.94, -1.62, KPSS Testi için % 1, % 5 ve % 10 kritik değerler 0.739, 0.46, 0.35, PP Testi için % 1, % 5 ve % 10 kritik değerler -3.43, -2.86, -2.57' dir. Bu sonuçlara göre İMKB-100 getiri endeksi her üç teste göre de %1, % 5 ve % 10 hata payına göre durağandır.

Tablo 2. İMKB-100 getiri endeksinin birim kök analizi sonuçları

	ADF	KPSS	PP
İMKB-100	-60.41	0.380	-60.60

5.2 Klasik GARCH Modellerinin Tahmini

GARCH modellerinin tahmin edilebilmesi için öncelikle ortalama denklemi olarak adlandırılan, serinin yapısına uygun ARMA modeli

belirlenir. Çalışmada belirlenen gecikme uzunluklarının minimum Akaike (AIC) ve Schwarz (SC) değerlerini verdiği, % 5 hata payı ile katsayıların istatistiksel olarak anlamlı olduğu, durağanlık ve çevrilebilirlik şartlarının sağlandığı model en uygun ortalama denklemi olarak belirlenmiştir. Ortalama denkleminde hesaplanan artık terimlerinde ARCH etkisinin varlığı ARCH-LM Testi ile tespit edilmiş ve ardından GARCH modelleri tahmin edilmiştir. GARCH modelinin yorumlanabilmesi için koşullu ortalama denkleminin parametreleri de dahil bütün parametrelerin istatistiksel olarak anlamlı olması gerekmektedir. GARCH modelinde tüm parametrelerin pozitif olması, durağanlık şartının sağlanabilmesi için de ARCH ve GARCH parametrelerinin toplamının 1' den küçük olması gerekmektedir. GARCH modelinden elde edilen hatalar için tekrar ARCH-LM testinin uygulanması ve neticesinde hesaplanan değerlerin ki-kare tablo değerinden küçük olarak ARCH etkisinin olmadığını ifade eden sıfır hipotezinin reddedilememesi ve artıkların saf hata terimi olması gerekmektedir. Tahmin edilen modellerde otokorelasyonun varlığı elde edilen artıkların korelogramı incelenerek Q Test istatistiklerinin ki-kare tablo değerleri ile karşılaştırılması sonucu belirlenmiştir.

İMKB-100 getiri endeksi için Tablo 3' te normal-ARMA(1,2)-GARCH(1,1) modeli yer almaktadır. Bu modelin katsayıları istatistiksel olarak anlamlıdır, ARCH etkisi de ortadan kalkmıştır ancak artıklarda otokorelasyon bulunmakta ve GARCH modeli anlamlı olmamaktadır. Birçok model denenmiş ancak İMKB-100 getiri endeksi için anlamlı GARCH modeli bulunamamıştır.

Tablo 3. İMKB-100 getiri endeksinin klasik GARCH analizi sonuçları

	AR(1)	MA(1)	MA(2)	C	e_{t-1}^2	h_{t-1}	AL(1)	AL(5)
İM	0.998	-0.955	-0.041	0.146	0.120	0.864	1.780	6.596
	(0.001)	(0.017)	(0.017)	(0.022)	(0.008)	(0.008)		

*Tabloda AL(1) olarak ifade edilen ARCH-LM (1) Testi sonucu $\chi_1^2 = 3.841$ tablo değeri ile, AL(5) olarak ifade edilen ARCH-LM (5) Testi sonucu $\chi_5^2 = 11.070$ tablo değeri ile karşılaştırılmıştır.

**Tabloda parantez içerisindeki değerler standart hatalardır.

***Modelin logaritmik olabilirlik değeri -8837' dir.

5.3 GARCH (1,1) Modellerinin Bayes Yaklaşımı ile Tahmini

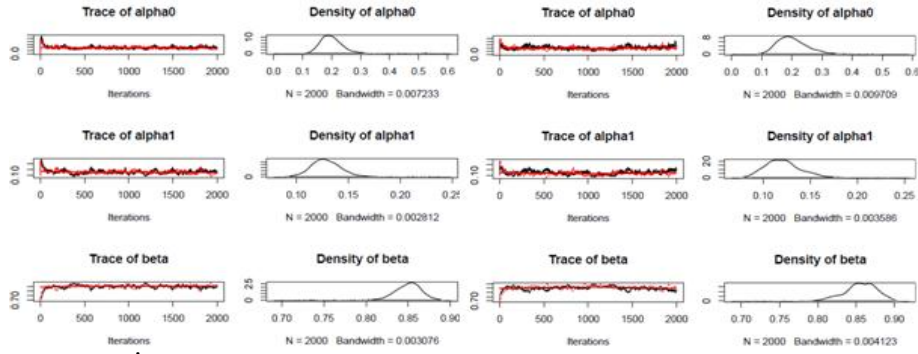
Daha önce belirtildiği gibi yapılan çalışmalar finansal piyasalarda genelde endeks getirilerinin GARCH (1,1) modeline uyduğunu gösterdiğinden Bayesyen GARCH (1,1) modelleri tahmin edilmiştir.

Artıkların normal ve Student-t dağıldığı GARCH(1,1) modelleri M-H algoritması ile R programının bayesGARCH modülü kullanılarak bayesyen olarak tahmin edilmiştir. Yoğunluklar gözlem kareleri için oluşturulan yardımcı bir ARMA sürecinden oluşturulmuştur.

Normal ve Student-t artıklarına sahip modellerin Bayesyen tahmininde sıfır ortalama vektörüne ve diyagonal kovaryans matrisine sahip kesilmiş üçboyutlu (tridimensional) Normal Dağılım, ilk dağılım olarak seçilmiştir. Herbiri 2000 iterasyonlu iki zincir işletilmiştir.

Normal artıklara sahip modelde, çevrilmiş üstel dağılıma uyan v parametresinin hiperparametresi lambda, 100 alınmıştır. Delta ise şartlı varyansın varlığını sağlayacak şekilde 500 alınmıştır. Student-t artıklarına sahip modelde ise lambda 0,01 alınmıştır. Delta ise şartlı varyansın varlığını sağlayacak şekilde 2 alınmıştır.

Hem normal dağılım hem de Student-t dağılımı için bayesyen GARCH model parametrelerinin tahmininde, MCMC ile oluşturulan örnek çizimleri (trace) ve son olasılık yoğunluk fonksiyonları Grafik 2' de yer almaktadır. Grafikte ilk iki sütun normal dağılım için son iki sütun ise Student-t dağılımı için bayesyen GARCH modelinin MCMC sonuçlarını ifade etmektedir. Örnek çizimleri, t zamanındaki iterasyon sayısına denk gelen parametre değerlerinin grafiğini göstermektedir. Grafikler incelendiğinde parametre değerlerinde yakınsamanın sağlandığı görülmektedir. Son olasılık yoğunluk fonksiyonları incelendiğinde İMKB-100 getiri endeksi için hem normal hem de Student-t dağılımlı bayesyen GARCH modellerinin α_0 ve α_1 parametreleri “sağa çarpık” bir dağılım gösterirken, beta “sola çarpık” dağılım göstermektedir.



Grafik 2. İMKB-100 için normal ve student-t dağılımlı bayesyen GARCH tahmininde oluşturulan örnek çizimleri ve son olasılık yoğunluk fonksiyonları

Normal ve Student-t artıklarına sahip GARCH(1,1) model parametrelerinin son olasılık dağılım ortalamaları ve standart hataları Tablo 4’ te görülmektedir. Tabloda P_0 ; son olasılık dağılımı ortalamasını, sd ; standart hata değerlerini, % ; belirtilen olasılık düzeyinde tahmin edilen son kantil değerlerini ifade etmektedir. Standart hatalar Parzen kernel ve AR(1) hazırlık süreci kullanılarak Andrew yöntemi ile tahmin edilmiştir. Bu sayede optimum sınır (bandwidth) seçimi sağlanmış olmaktadır²¹. MCMC analizinde ilk 500 iterasyon atılmıştır. Yakınsama tanıları, zincirlerin 500.’ cü iterasyondan itibaren yakınsadığını göstermektedir.

Daha önce de belirtildiği gibi $(\alpha_1 + \beta)$ sürekliliği ifade etmekte ve varyans sürecindeki kümeleme yoğunluğunu kontrol etmektedir. Süreklilik parametresinin 1’ e yakın değerleri, geçmiş şok ve varyansların gelecekteki şartlı varyans üzerinde etkisinin olmayacağını belirtmektedir. Süreklilik parametresinin 1’ e eşit çıkması da birim kökün varlığını ifade etmektedir. Hem normal artıklara sahip hem de student-t artıklarına sahip GARCH(1,1) modellerinin bayesyen tahmin sonuçlarına bakıldığında $(\alpha_1 + \beta)$ süreklilik parametresinin tahmin edilen değerlerinin hepsinin 1’ den küçük olduğu görülmektedir. Modellerdeki $(\alpha_1 + \beta - 1)$ değerlerinin tümü sıfırdan küçük olduğundan Nelson (1991)’ in ileri sürdüğü kovaryans durağanlık şartı tüm modeller için sağlanmaktadır.

Normal ve Student-t artıklarına sahip Bayesyen GARCH modellerinin

²¹ D. W. K. Andrews. “Heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix estimation”, *Econometrica*, 59(3):817–858, May 1991.

tahmin sonuçları incelendiğinde normal dağılım için tahmin edilen α_0 parametresi Student-t dağılımı için tahmin edilenden küçük, α_1 parametresi ise Student-t dağılımı için tahmin edilenden büyüktür. Süreklilik parametresinin değeri tüm modellerde 1' den küçüktür.

Tablo 4. Normal ve student-t artıklarına sahip GARCH(1,1) modelinin bayesyen tahmin sonuçları

İMKB-100		Bayesyen GARCH(1,1) – Normal					
	po	s.d.	2.5 %	25 %	50 %	75 %	97.5 %
α_0	0.142	0.014	0.114	0.132	0.141	0.1516	0.172
α_1	0.156	0.013	0.129	0.147	0.155	0.1639	0.182
β	0.796	0.013	0.770	0.788	0.796	0.8055	0.824
İMKB-100		Bayesyen GARCH(1,1) – Student- t					
α_0	0.199	0.047	0.121	0.166	0.194	0.227	0.303
α_1	0.119	0.017	0.088	0.107	0.118	0.130	0.156
β	0.857	0.020	0.813	0.845	0.858	0.871	0.893

Gelman ve Rubin Tanı Testi sonuçları Tablo 5' te yer almaktadır. Gelman ve Rubin (1992)²² nin ileri sürdüğü tanı ile zincir içi varyans ile zincirler arasındaki varyansların karşılaştırılarak iki veya daha fazla Markov zincirinin hedef dağılıma yakınsama durumu belirlenmektedir. Son dağılımın marjinal varyansı (\hat{V}) zincir içi varyanslar (W) ile zincirler arası varyansların (B) ağırlıklı ortalaması olarak elde edilir. Zincirlerin hepsi hedef dağılıma yakınsıyorsa bu son dağılımın varyans tahmininin zincir içi varyansa çok yakın çıkması gerekmektedir. Bu nedenle \hat{V}/W oranının 1' e yakın olması beklenmektedir. Bu oranın karekökü “potansiyel ölçek indirgeme faktörü” (potential scale reduction factor, PSRF) olarak adlandırılmaktadır. PSRF' nin 1' e yakın olması her zincir için kararlılığın ve hedef dağılıma yakınsamanın sağlandığını göstermektedir.

Normal ve student-t artıklarına sahip GARCH(1,1) modellerinin Bayesyen tahmin sonuçlarına bakıldığında genel olarak normal artıklara sahip modelin potansiyel ölçek indirgeme faktörlerinin (PSRF) 1' e daha yakın olduğu görülmektedir. Hem normal hem de Student-t artıklarına sahip bayesyen GARCH modelleri için 2000 iterasyon sonrasında zincirin yakınsadığı görülmektedir ancak PSRF değerleri 1' e daha yakın olduğundan

²² A. Gelman and D. B. Rubin, “Inference from Iterative Simulation Using Multiple Sequences,” *Statistical Science*, Vol. 7, 1992, s. 457–472.

normal artıklara sahip modelde Student-t artıklarına sahip modelden daha iyi yakınsama sağlandığı söylenebilmektedir.

Tablo 5. Gelman ve Rubin tanı testi sonuçları

BGARCH (1,1) - Normal					
		α_0	α_1	β	MPSRF
IM	PSRF	1.02	1.03	1.04	1
BGARCH (1,1) - Student-t					
		α_0	α_1	β	MPSRF
IM	PSRF	1.12	1.13	1.16	1.08

*Tabloda BGARCH, Bayesyen GARCH Modelini MPSRF ise Çok Değişkenli Potansiyel Ölçek İndirgeme Faktörünü ifade etmektedir.

6. SONUÇ

Bayes Yaklaşımı subjektif ve objektif bilgilerin birleştirilmesini sağladığından pekçok alanda kullanılmakta, farklı ve yararlı sonuçlar verebilmektedir. Finansal piyasalarda getiri volatilitelerini açıklamak için kullanılan volatilitite modelleri de Bayes Yaklaşımı ile pekçok farklı model türünde olduğu gibi tahmin edilebilirler. Volatilitiyi belirlemek için kullanılan GARCH modelleri Bayesyen olarak da tahmin edilebilirler.

Modellerin verdiği sonuçlar arasındaki ilişkiyi araştırmak için İMKB-100 hisse senedinin günlük getirileri için GARCH ve bayesyen GARCH modelleri denenerek karşılaştırılmıştır.

Klasik GARCH modelinin sonucuna bakıldığında İMKB endeksi için anlamlı klasik GARCH modeli bulunamazken bayesyen GARCH modeli anlamlı sonuçlar vermiştir. Normal artıklara sahip bayesyen GARCH modelinde Student-t artıklarına sahip bayesyen GARCH modelinden daha iyi yakınsama sağlandığından İMKB-100 getiri endeksi için bu modelin volatilitiyi açıklamada en uygun model olduğu söylenebilir.

KAYNAKÇA

Akaike, H., "Information Theory and an Extension of the Maximum Likelihood Principle", *In Proceedings of the 2nd International Symposium on Information Theory*, N. Petrov ve F. Caski (Ed.), Budapest: Akademiai Kiado, 1973, s. 176-723.

Andrews, D. W. K., "Heteroskedasticity and autocorrelation

consistent covariance matrix estimation”, *Econometrica*, 59(3):817–858, May 1991.

Ardia, D., “Bayesian Estimation of the GARCH(1,1) Model with Normal Innovations”, *Student*, 5(3-4), pp.283-298, ISSN:1420-1011, September 2006.

Ardia, D., *Financial Risk Management with Bayesian Estimation of GARCH Models: Theory and Applications*, Volume 612 of Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 1. Basım, Springer-Verlag, Berlin, 2008.

Bauwens, Luc., Michel Lubrano, “Bayesian Inference on GARCH Models Using the Gibbs Sampler”, *Econometrics Journal*, Vol. 1, 1998.

Bollerslev, T., “Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity”, *Journal of Econometrics*, Vol. 31, 1986.

Bollerslev, T., R. Y. Chou, K. F. Kroner, “ARCH Modelling in Finance: A Review of the Theory and Empirical Evidence”, *Journal of Econometrics*, Vol. 52, 1992.

Bologna, P., Laura Cavallo, “Does the Introduction of Index Futures Effectively Reduce Stock Market Volatility? Is the Futures Effect Immediate? Evidence from the Italian Stock Exchange Using GARCH”, *Applied Financial Economics*, Vol. 12, No. 3, 2002.

Chib, S., E. Greenberg, “Bayes Inference in Regression Models with ARMA(p,q) Errors”, *Journal of Econometrics*, Vol 64, No 1-2, 1994.

Engle, R., “Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estiamtes of the Variance of United Kingdom Inflation”, *Econometrica*, Vol 50, No 4, 1982.

Engle, Robert F., “Statistical Models for Financial Volatility”, *Financial Analysts Journal*, Vol. 49, No, 1993.

Gelman, A., D. B. Rubin, “Inference from Iterative Simulation Using Multiple Sequences”, *Statistical Science*, Vol. 7, 1992.

Geweke, J., “Bayesian Inference in Econometric Models Using Monte Carlo Integration”, *Econometrica*, Vol. 57, No. 6, 1989a.

Geweke, J., “Bayesian Treatment of the Independent Student-t Linear Model”, *Journal of Applied Econometrics*, Vol 8, 1993.

Geweke, J., “Bayesian Comparison of Econometric Models”, Working Paper 532, *Research Department, Federal Reserve Bank of Minneapolis*, 1994b.

Karolyi, G. Andrew., “Why Stock Return Volatility Really Matters”, Strategic Investor Relations, *Institutioanal Investor Journals Series*, March

2001.

Mandelbrot, B., "The variation of Certain Speculative Prices", *Journal of Business*, Vol.36, No.4, 1963.

Nakatsuma, T., "A Markov-Chain Sampling Algorithm for GARCH Models", *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics*, Vol 3, No 2, 1998.

Poon, Ser-Huang, *A Practical Guide to Forecasting Financial Market Volatility*, 1. Basım, John Wiley & Sons, İngiltere 2005.

Rachev, Svetlozar T., ve diğerleri, *Bayesian Methods in Finance*, 1. Basım, John Wiley & Sons, Kanada 2008.

Robert, Christian P., George Casella, *Monte Carlo Statistical Methods*, 2nd edition, Springer, New York 2004.

Schwarz, G., "Estimating the Dimension of a Models", *Annals of Statistics*, Vol 6, 1978, s. 461-464.