



Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi

<https://dergipark.org.tr/tr/pub/yyufbed>



Araştırma Makalesi

\mathbb{C}^2 de Rasyonel Cebirsel Eğrilerin İzometri ve Simetrilerinin Hesaplanması

Uğur GÖZÜTOK*, Hüsnü Anıl ÇOBAN

Milli Savunma Üniversitesi, Hava Harp Okulu, Temel Bilimler Bölümü, 34149, İstanbul, Türkiye
Uğur GÖZÜTOK, ORCID No: 0000-0002-6072-3134, Hüsnü Anıl ÇOBAN, ORCID No: 0000-0001-8175-4960

*Sorumlu yazar e-posta: ugozutok@hho.msu.edu.tr

Makale Bilgileri

Geliş: 05.07.2023
Kabul: 22.11.2023
Online Nisan 2023

DOI:10.53433/yyufbed.1323369

Anahtar Kelimeler

Cebirsel eğriler,
İzometrilere,
Simetriler

Öz: Bu çalışmada, iki boyutlu karmaşık uzayda rasyonel cebirsel eğrilerin izometrilere ve simetrilerinin hesaplanması için yeni ve etkili bir algoritma sunulmaktadır. Metot, problemin, karmaşık rasyonel cebirsel eğrilerin parametrizasyonlarına indirgenmesine dayanmaktadır. İki eğri arasındaki karmaşık izometrilere, bir üniter matris ve iki boyutlu karmaşık vektörden meydana gelmektedir. Karmaşık izometrilere etkilenmeyen invariantlar sayesinde oluşturulan polinom denklemlerinin çözümü çarpanlara ayırma ve en büyük ortak çarpan bulma işlemleri ile bulunacaktır. Bu sayede, doğrusal olmayan büyük denklem sistemlerinin çözümünden sakınılacaktır. Girdi eğrilerinin özdeş olması durumunda metot, karmaşık rasyonel cebirsel eğrilerin tüm üniter simetrilerini tespit etmektedir. Sunulan algoritma, Maple bilgisayar cebir sistemi kullanılarak bilgisayar ortamına uyarlanmış ve bu uyarlama kullanılarak geniş çaplı testler yürütülmüştür.

Computing Isometries and Symmetries of Rational Algebraic Curves in \mathbb{C}^2

Article Info

Received: 05.07.2023
Accepted: 22.11.2023
Online April 2023

DOI:10.53433/yyufbed.1323369

Keywords

Algebraic curves,
Isometries,
Symmetries

Abstract: In this study, we present a new and efficient algorithm for computing isometries and symmetries of rational algebraic curves in the two dimensional complex space. The method is based on reducing the problem to parameterizations of complex rational algebraic curves. Complex isometries between two curves consist of a unitary matrix and a two dimensional complex vector. The solution of polynomial equations formed by invariants that are not affected by complex isometries will be found by factoring and finding the greatest common factor. In this way, we avoid solving large nonlinear systems. If the input curves are identical, the method detects all unitary symmetries of complex rational algebraic curves. The presented algorithm was implemented using the computer algebra system Maple, and using the implementation, we provide an extensive experimentation.

1. Giriş

Geometrik nesnelerin çeşitli geometrilerdeki denklik ve simetrilerinin hesaplanması probleminin etkili çözümleri, örüntü tanıma, bilgisayar grafikleri ve bilgisayarlı görü gibi birçok uygulamalı alana katkı sağladığından, günümüzde etkin bir çalışma alanı olarak karşımıza çıkmaktadır. Özellikle bilgisayar destekli geometrik tasarımda bir eğrinin veya yüzeyin denklik ve simetrilerini önceden bilmek, tasarım sürecini kolaylaştırmaktadır. Bu alanların birçoğunda bilhassa cebirsel eğriler ve yüzeyler, şekillerinin manipüle edilebilmesinden dolayı sıklıkla kullanılmaktadır. Cebirsel eğriler için temel iki temsil bulunurken, çalışmalar da bu yönde ayrılmıştır. Bir cebirsel eğri ya da yüzey kapalı formda temsil edilebilirken, aynı zamanda rasyonel parametrizasyonlarla da temsil edilebilmektedir.

Kapalı formda temsil edilen eğriler ve yüzeyler bir polinom denkleminin sıfır yeriyle temsil edilirken, rasyonel eğriler ise parametre uzayından eğri ya da yüzeyin kendine tanımlı belirli özellikleri saylayan rasyonel parametrizasyonlarla temsil edilir.

Rasyonel eğriler için, Alcázar ve ark. (2015) çalışmalarında rasyonel uzay cebirsel eğrilerinin Öklid anlamında simetrilerini, eğrilerin eğrilik ve burulmalarını kullanarak tespit eden bir yaklaşım oluşturmuşlardır. Alcázar ve Quintero (2020a) keyfi boyuttaki trigonometrik rasyonel cebirsel eğrilerin affin denklik ve simetrilerini tespit etmişlerdir. Yine Gözütok ve ark. (2023) rasyonel uzay eğrilerinin projektif denklik ve simetrilerini tespit eden etkili bir algoritma sunmuşlardır. Kapalı formda temsil edilen eğriler için ise Alcázar ve ark. (2019a) kapalı formda temsil edilen düzlem cebirsel eğrilerinin benzerlikleri problemini çözerken, yine Alcázar ve ark. (2019b) harmonik polinomları kullanarak aynı eğri tipinin benzerlik ve simetrilerini hesaplamışlardır. Yine kapalı formda temsil edilen düzlem cebirsel eğrilerinin daha genel bir yapı olan afin denklik ve simetrileri (Alcázar ve ark., 2022) çalışmasında ele alınmıştır.

Literatürde daha az çalışma bulunmakla beraber, cebirsel yüzeyler için de önemli çalışmalar bulunmaktadır. Bunlardan bazıları kapalı formda temsil edilen yüzeyler için yaklaşımlar getirirken (Bizzarri ve ark., 2020; Alcázar ve ark., 2023), diğerleri de rasyonel yüzeyler için hesaplama metotları geliştirmiştir (Hauer ve ark., 2018; Alcázar ve Quintero, 2020b; Jüttler ve ark., 2022).

Bu çalışmada, iki boyutlu karmaşık uzaydaki rasyonel cebirsel eğrilerin karmaşık izometrisinin ve simetrilerinin hesaplanması için etkili bir algoritma oluşturulması amaçlanmıştır. Bu problem üzerinde çalışılmasına sebep olan en önemli motivasyon kaynağı, problem üzerinde herhangi bir çalışmanın olmaması olarak açıklanabilir. Literatürde genel olarak karmaşık uzayda kapalı formda ya da rasyonel cebirsel eğriler için yeterince çalışma bulunmamaktadır. Bu yüzden, literatürdeki boşluğun doldurulmasına katkı sağlamak ve problem üzerinde geliştirilecek etkili yaklaşımlar oluşturmak amacıyla bu çalışmaya ihtiyaç duyulmuştur. Bu çalışmayla oluşturulacak metodun karmaşık uzayda diğer cebirsel varyetelerin denklik problemlerinin çözülmesine de katkı sağlamasının yanında, yine karmaşık uzayda daha genel denklik problemlerinin çözümünde yol göstereceği düşünülmektedir.

2. Materyal ve Yöntem

2.1. Ön bilgiler

Bu kısımda, problemin çözümü için gerekli ön bilgiler ve problemin açık ifadesi verilecektir. Aşağıdaki rasyonel parametreniye sahip bir cebirsel \mathcal{C} eğrisine karmaşık rasyonel cebirsel eğri denir:

$$\mathbf{p}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^2, \quad \mathbf{p}(t) = (p_1(t) + ip_2(t), p_3(t) + ip_4(t)), \quad (1)$$

Burada $1 \leq i \leq 4$ için $p_i(t) = \frac{Q_i(t)}{Q(t)}$, $Q_i(t), Q(t)$ polinomlar ve $i^2 = -1$ dir. \mathcal{C} eğrisinin derecesi \mathbf{p} parametrizasyonunun dereesi olan $n = \max\{Q_i(t), Q(t)\}$ olarak tanımlanır. Eğer \mathbf{p} parametrizasyonu, parametre uzayındaki sonlu sayıda nokta hariç birebir ise \mathbf{p} ye düzgün parametrizasyon denir. Her düzlem cebirsel eğrisi bir düzgün parametrizasyona sahip olduğundan, bu çalışma boyunca bir \mathcal{C} eğrisinin \mathbf{p} parametrizasyonunun her zaman düzgün olduğu kabul edilecektir.

2×2 tipindeki tüm karmaşık matrislerin kümesi $\mathbb{C}_{2 \times 2}$ olmak üzere, bir $A \in \mathbb{C}_{2 \times 2}$ matrisinin eşlenik transpozu $A^* := \bar{A}^T$ ile ifade edilir. Eğer $AA^* = I$ oluyorsa A matrisine üniter matris denir. $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^2$ verilsin, $\mathbf{z} := (z_1, z_2)^T$, A matrisi 2×2 tipinde bir üniter matris ve $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^2$ olmak üzere, \mathbb{C}^2 uzayının bir (karmaşık) izometrisi $f(\mathbf{z}) = A\mathbf{z} + \mathbf{b}$ şeklinde tanımlanır. $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathbb{C}^2$ de iki rasyonel cebirsel eğri olmak üzere $f(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}_2$ olacak şekilde bir f izometrisi varsa, \mathcal{C}_1 ve \mathcal{C}_2 eğrilerine izometrik denir. \mathcal{C} cebirsel düzlem eğrisi için, $f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ olacak şekilde birim dönüşümden farklı bir f izometrisi varsa, \mathcal{C} eğrisine (üniter) simetrik denir.

Aşağıdaki sonuç izometrik eğrilerin denkliklerini parametre uzayına indirmektedir. Bu sonucun en genel versiyonu (Sendra ve ark., 2007) çalışmasında kanıtlanmıştır.

2.1.1. Teorem: C_1 ve C_2 eğrileri, sırasıyla p ve q düzgün parametrisasyonlarına sahip olsun. C_1 ve C_2 eğrileri $f(z) = Az + b$ kompleks izometrisi ile izometrik ise bu takdirde bir $\varphi(t) = \frac{at+b}{ct+d}$ Möbius dönüşümü için aşağıdaki diagram geçerlidir:

$$\begin{array}{ccc} C_1 & \xrightarrow{f} & C_2 \\ p \uparrow & & \uparrow q \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R} \end{array}$$

Teorem 2.1.1. de verilen diagramdan açıktır ki, eğer eğriler izometrik ise

$$Ap(t) + b = q \circ \varphi(t) \quad (2)$$

olacak şekilde bir φ Möbius dönüşümü mevcuttur. Bu sonucun en önemli getirisi, C_1 ve C_2 eğrileri arasındaki her bir f izometrisine karşılık, bir φ Möbius dönüşümünün olmasıdır. Böylece, izometrileri tespit etmek için, Möbius dönüşümlerini tespit etmek yeterlidir.

İzometriler dereceyi korudukları için izometrik C_1 ve C_2 eğrilerinin dereceleri aynı olmalıdır. Bu yüzden makalenin geri kalan kısmında C_1 ve C_2 eğrilerinin dereceleri aynı n doğal sayısı olarak kabul edilecektir.

Böylece, bu çalışmaya motivasyon oluşturan problem aşağıdaki şekilde özetlenebilir.

Problem: Sırasıyla p ve q düzgün parametrisasyonlarına sahip C_1 ve C_2 karmaşık rasyonel cebirsel eğrileri için, bu eğrilerin izometrik olup olmadığını, eğer izometrik iseler aralarındaki olası tüm izometrileri hesaplayan bir algoritmanın oluşturulması.

2.2. Metot ve strateji

Bu kısımda, bir önceki kısımda belirtilen problem için bir metot inşa edilecektir. Metodun basamakları aşağıdaki düzeni takip edecektir:

1. *Temel İnvaryantlar:* \mathbb{C}^2 de $z = (z_1, z_2)$ ve $w = (w_1, w_2)$ vektörlerinin Hermit iç çarpımı $\langle z, w \rangle = z_1 \bar{w}_1 + z_2 \bar{w}_2$ ile tanımlanır. A bir üniter matris olmak üzere,

$$\langle Az, Aw \rangle = \langle z, w \rangle \quad (3)$$

olup, hermit iç çarpımı üniter matrislerden etkilenmez, yani üniter matrislerin etkisine göre bir invaryanttır. Bu özellikten faydalanmak için öncelikle $u := p$ ve $v := q \circ \varphi$ alalım. Bu durumda (2) denklemi

$$Au + b = v \quad (4)$$

şeklini alır. (4) denkleminin t parametresine göre bir ve iki kere türevlenmesiyle

$$\begin{aligned} Au' &= v', \\ Au'' &= v'' \end{aligned} \quad (5)$$

elde edilir. Burada (3) özelliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}', \mathbf{u}' \rangle &= \langle \mathbf{v}', \mathbf{v}' \rangle, \\ \langle \mathbf{u}', \mathbf{u}'' \rangle &= \langle \mathbf{v}', \mathbf{v}'' \rangle, \\ \langle \mathbf{u}'', \mathbf{u}' \rangle &= \langle \mathbf{v}'', \mathbf{v}' \rangle, \\ \langle \mathbf{u}'', \mathbf{u}'' \rangle &= \langle \mathbf{v}'', \mathbf{v}'' \rangle \end{aligned} \quad (6)$$

elde edilir. Burada iç çarpımlar, parametrizasyonların bir fonksiyonu olarak ele alınırsa

$$\begin{aligned} F_{11}(\mathbf{u}) &= \langle \mathbf{u}', \mathbf{u}' \rangle, \\ F_{12}(\mathbf{u}) &= \langle \mathbf{u}', \mathbf{u}'' \rangle, \\ F_{21}(\mathbf{u}) &= \langle \mathbf{u}'', \mathbf{u}' \rangle, \\ F_{22}(\mathbf{u}) &= \langle \mathbf{u}'', \mathbf{u}'' \rangle \end{aligned} \quad (7)$$

yazılır. Buradan (6) denklemini, her $1 \leq i, j \leq 2$ için

$$F_{ij}(\mathbf{u}) = F_{ij}(\mathbf{v}) \quad (8)$$

şeklinde ifade edilebilir. Dolayısıyla aşağıdaki önerme doğrudur:

$$A\mathbf{u} + \mathbf{b} = \mathbf{v} \implies F_{ij}(\mathbf{u}) = F_{ij}(\mathbf{v}). \quad (9)$$

Buradan, F_{ij} fonksiyonlarının her i, j için karmaşık izometrilere göre birer invaryant olduğu anlaşılır. F_{ij} invaryant fonksiyonlarına temel invaryantlar olarak adlandırılacaktır. (9) önermesinin tersine de doğru olması için gerekli şartları elde ederek, izometrik olma bağıntısı karakterize edilebilir. Burada (9) önermesi, izometrilere tespiti için bir sistem sunmaktadır, ancak bu sistem doğrusal olmayan bir sistemi çözmeyi gerektirmektedir, çünkü genel olarak $F_{ij}(\mathbf{v}) = F_{ij}(\mathbf{q} \circ \varphi) \neq F_{ij}(\mathbf{q}) \circ \varphi$. Dolayısıyla, bu tarz sistemleri çözmekten kaçınmak için $\kappa(\mathbf{q} \circ \varphi) = \kappa(\mathbf{q}) \circ \varphi$ şartını sağlayan özel invaryantlara ihtiyaç duyulmaktadır. Bu tarz invaryantlara Möbius-invaryantları adı verilecektir.

2. *Möbius-Invaryantları:* Genel olarak $F_{ij}(\mathbf{q} \circ \varphi) \neq F_{ij}(\mathbf{q}) \circ \varphi$ olduğu açıktır. Burada bu şartı sağlayacak başka invaryantların tespiti $F_{ij}(\mathbf{q} \circ \varphi)$ ifadesi zincir kuralı ile genişletilip, ortaya çıkan φ' ve φ'' gibi parametreler sistemden elimine edilerek yapılabilir. Dolayısıyla metodun bu basamağı, $F_{ij}(\mathbf{q} \circ \varphi)$ ifadesinin genişletilip, katsayıları φ' ve φ'' parametrelerinden oluşan, dört denklemlilik bir sistem elde etmekten oluşmaktadır. Bu sistemden, Gröbner bazı kullanılarak, eliminasyon ideali elde edilip, eliminasyon idealindeki indirgenmiş sistemin içerdiği simetrik yapılar tespit edilecektir. Daha sonraki kısımlarda görüleceği üzere, bu sistemin eliminasyon ideali F_{ij} temel invaryantlarını içeren iki simetrik form içermektedir. Bu formların düzenlenmesiyle, $i \in \{1, 2\}$ için $\kappa_i(\mathbf{q} \circ \varphi) = \kappa(\mathbf{q}) \circ \varphi$ şartını sağlayan iki adet Möbius-invaryantı tespit edilecektir. Bu eşitlikler ve (9) önermesinden,

$$\begin{aligned} \Phi_1 &:= \kappa_1(\mathbf{p}) - \kappa_1(\mathbf{q}) \circ \varphi = 0, \\ \Phi_2 &:= \kappa_2(\mathbf{p}) - \kappa_2(\mathbf{q}) \circ \varphi = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

elde edilecektir. Bu iki kriterin paydalarının yok edilmesiyle elde edilecek iki polinomun $s - \varphi(t)$ biçiminde bir özel çarpan içereceği kanıtlanacaktır. Dolayısıyla, (10) sisteminden elde edilecek iki polinomun en büyük ortak çarpanının tespiti, bu ortak çarpanın çarpanları arasında $s - \varphi(t)$ özel çarpanının tespitiyle, olası tüm φ Möbius dönüşümleri, herhangi bir sistem çözümüne gerek kalmadan elde edilebilecektir.

3. *İzometrilere Elde Edilmesi:* Bir önceki basamakta elde edilen her bir φ dönüşümüne karşılık gelen A üniter matrisi, (9) önermesinin tersinin elde edilmesiyle geliştirilecek yöntem

sayesinde, basit bir matris çarpımıyla tespit edilecektir. Böylece elde edilen her bir φ Möbius dönüşümü ve ona karşılık gelen A üniter matrisinin (2) denkleminde yerine yazılması ile \mathbf{b} ötelemesi doğrudan tespit edilip, $f(\mathbf{z}) = A\mathbf{z} + \mathbf{b}$ izometrisi tam olarak elde edilebilecektir.

3. Bulgular

3.1. İzometrik eğrilerin karakterizasyonu

Bu kısımda, izometrik eğrilerin karakterize edilmesiyle elde edilen sonuçların verilmesi planlanmıştır. Bunun için (9) önermesinin tersinin doğru olması için gerekli şartlar elde edilecektir. Keyfi $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_m \in \mathbb{C}^2$ vektörleri için

$$\begin{pmatrix} \langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_1 \rangle & \langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_m \rangle \\ \langle \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_1 \rangle & \langle \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_m \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbf{z}_m, \mathbf{z}_1 \rangle & \langle \mathbf{z}_m, \mathbf{z}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{z}_m, \mathbf{z}_m \rangle \end{pmatrix} \quad (11)$$

matrisine $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_m$ vektörlerinin Gram matrisi denir ve bu matris $Gram(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_m)$ ile ifade edilir. Yine \mathbf{u}' ve \mathbf{u}'' vektörlerinin oluşturduğu matrisi $D(\mathbf{u}) = [\mathbf{u}' \ \mathbf{u}'']$ ve bu matrisin determinantını da $\Delta(\mathbf{u}) := \|\mathbf{u}' \ \mathbf{u}''\|$ ile ifade edelim. Buradan

$$D(\mathbf{u})^T \overline{D(\mathbf{v})} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{u}', \mathbf{v}' \rangle & \langle \mathbf{u}', \mathbf{v}'' \rangle \\ \langle \mathbf{u}'', \mathbf{v}' \rangle & \langle \mathbf{u}'', \mathbf{v}'' \rangle \end{pmatrix} \quad (12)$$

olduğu kolayca görülebilir. Diğer yandan, (12) dekleminin iki tarafının determinantının alınmasıyla

$$\Delta(\mathbf{u}) \overline{\Delta(\mathbf{v})} = \begin{vmatrix} \langle \mathbf{u}', \mathbf{v}' \rangle & \langle \mathbf{u}', \mathbf{v}'' \rangle \\ \langle \mathbf{u}'', \mathbf{v}' \rangle & \langle \mathbf{u}'', \mathbf{v}'' \rangle \end{vmatrix} \quad (13)$$

elde edilir. Benzer şekilde (12) ve (13) denklemlerinden

$$\det Gram(\mathbf{u}', \mathbf{u}'') = |\Delta(\mathbf{u})|^2 \quad (14)$$

elde edilir. Ayrıca F_{ij} temel invaryantlarının tanımından

$$Gram(\mathbf{u}', \mathbf{u}'') = \begin{pmatrix} F_{11}(\mathbf{u}) & F_{12}(\mathbf{u}) \\ F_{21}(\mathbf{u}) & F_{22}(\mathbf{u}) \end{pmatrix} \quad (15)$$

olduğu açıktır. Böylece aşağıdaki ana sonuç verilebilir.

3.1.1. Teorem: $F_{ij}(\mathbf{u}) = F_{ij}(\mathbf{v})$ ise $A\mathbf{u} + \mathbf{b} = \mathbf{v}$ olacak şekilde bir A üniter matrisi ve $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^2$ karmaşık vektörü vardır.

İspat: Kabul edelim ki $F_{ij}(\mathbf{u}) = F_{ij}(\mathbf{v})$ sağlansın. Bu takdirde (15) denkleminde

$$Gram(\mathbf{u}', \mathbf{u}'') = Gram(\mathbf{v}', \mathbf{v}'') \quad (16)$$

elde edilir. Bir A karmaşık matrisi için $D(\mathbf{v})(D(\mathbf{v}))^{-1} = A$ alalım. Buradan $AD(\mathbf{u}) = D(\mathbf{v})$ yazılır. (16) denkleminde

$$D(\mathbf{u})^T \overline{D(\mathbf{u})} = Gram(\mathbf{u}', \mathbf{u}'') = Gram(\mathbf{v}', \mathbf{v}'') = D(\mathbf{v})^T \overline{D(\mathbf{v})} \quad (17)$$

elde edilir. Buradan, $AD(\mathbf{u}) = D(\mathbf{v})$ olduğu kullanılırsa

$$D(\mathbf{u})^T \overline{D(\mathbf{u})} = D(\mathbf{v})^T \overline{D(\mathbf{v})} = (AD(\mathbf{u}))^T \overline{(AD(\mathbf{u}))} = D(\mathbf{u})^T A^T \overline{AD(\mathbf{u})} \quad (18)$$

bulunur. (18) denkleminin en solundaki ifade ile en sağındaki ifadeden $D(\mathbf{u})^T \overline{D(\mathbf{u})} = D(\mathbf{u})^T A^T \overline{AD(\mathbf{u})}$ yazılır. Bu son eşitliğin her iki yanını, soldan $(D(\mathbf{u})^T)^{-1}$ ve sağdan $(\overline{D(\mathbf{u})})^{-1}$ ile çarpılırsa

$$A^T \overline{A} = I \quad (19)$$

bulunur. Burada I matrisi 2×2 tipinde birim matrisi temsil etmektedir. Buradan A matrisinin bir üniter matris olduğu bulunur. Ayrıca $AD(\mathbf{u}) = D(\mathbf{v})$ eşitliğinden

$$\begin{aligned} A\mathbf{u}' &= \mathbf{v}' \\ A\mathbf{u}'' &= \mathbf{v}'' \end{aligned} \quad (20)$$

elde edilir. $A\mathbf{u}' = \mathbf{v}'$ eşitliği t parametresine göre integrallenirse, sabit bir $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^2$ vektörü için

$$A\mathbf{u} + \mathbf{b} = \mathbf{v} \quad (21)$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar. ■

$\mathbf{u} = \mathbf{p}$ ve $\mathbf{v} = \mathbf{q} \circ \varphi$ olduğu dikkate alınır, Teorem 3.1.1. ve (9) önermesinden aşağıdaki sonuç elde edilir.

3.1.2. Sonuç: Sırasıyla \mathbf{p} ve \mathbf{q} düzgün parametrisasyonlarına sahip \mathcal{C}_1 ve \mathcal{C}_2 karmaşık rasyonel cebirsel eğrileri verilsin. \mathcal{C}_1 ve \mathcal{C}_2 eğrilerinin izometrik olması için gerek ve yeter şart $F_{ij}(\mathbf{p}) = F_{ij}(\mathbf{q} \circ \varphi)$.

Bu sonuçla birlikte, F_{ij} invaryantları izometrik olma bağıntısını karakterize etmiş olmaktadır. Diğer yandan, eğer eğriler izometrik ise izometrinin matrisi

$$A = D(\mathbf{q} \circ \varphi)(D(\mathbf{p}))^{-1} \quad (22)$$

ile tespit edilebilirken, izometrinin ötelemesi de

$$\mathbf{b} = \mathbf{q} \circ \varphi - A\mathbf{p} \quad (23)$$

ile hesaplanabilir.

3.2. Möbius-Invaryantları

Bir önceki kısımda iki eğri arasındaki izometrisi $F_{ij}(\mathbf{p}) = F_{ij}(\mathbf{q} \circ \varphi)$ sistemi ile karakterize etmiştik. Bu sistem çözülerek izometrilere karşılık gelen φ Möbius dönüşümlerini bulmak mümkündür ancak bu sistem çoğunlukla yüksek dereceli ve doğrusal olmayan bir sistem olacaktır. Dolayısıyla etkili bir çözüm için bu sistemi çözmeden Möbius dönüşümlerini tespit edeceğiz. Bunun için ihtiyacımız olan Möbius-invaryantları ile ilgili tüm sonuçları bu kısımda sunacağız.

Öncelikle zincir kuralı kullanılarak $F_{ij}(\mathbf{q} \circ \varphi)$ ifadesinin genişletilmesiyle

$$\begin{aligned}
 F_{11}(\mathbf{q} \circ \varphi) &= \varphi'^2 F_{11}(\mathbf{q}) \circ \varphi, \\
 F_{12}(\mathbf{q} \circ \varphi) &= \varphi' \varphi'' F_{11}(\mathbf{q}) \circ \varphi + \varphi'^3 F_{12}(\mathbf{q}) \circ \varphi, \\
 F_{21}(\mathbf{q} \circ \varphi) &= \varphi' \varphi'' F_{11}(\mathbf{q}) \circ \varphi + \varphi'^3 F_{21}(\mathbf{q}) \circ \varphi, \\
 F_{22}(\mathbf{q} \circ \varphi) &= \varphi''^2 F_{11}(\mathbf{q}) \circ \varphi + \varphi'^2 \varphi'' F_{12}(\mathbf{q}) \circ \varphi \\
 &\quad + \varphi'^2 \varphi'' F_{21}(\mathbf{q}) \circ \varphi + \varphi'^4 F_{22}(\mathbf{q}) \circ \varphi
 \end{aligned} \tag{24}$$

sistemi elde edilir. Gröbner bazı hesaplanarak elde edilen eliminasyon ideali aşağıdaki simetrik formları içermektedir. Burada $s := \varphi(t)$ alınırsa,

$$\begin{aligned}
 &F_{11}^3(\mathbf{q}(s))(F_{11}(\mathbf{q})(s)F_{22}(\mathbf{q})(s) - F_{12}(\mathbf{q})(s)F_{21}(\mathbf{q})(s)) \\
 &- F_{11}^3(\mathbf{q})(s) \left(F_{11}(\mathbf{q})(s)F_{22}(\mathbf{q})(s) - F_{12}(\mathbf{q})(s)F_{21}(\mathbf{q})(s) \right) = 0 \\
 &F_{11}^3(\mathbf{q}(s))(2F_{11}(\mathbf{q})(s)F_{22}(\mathbf{q})(s) - F_{12}^2(\mathbf{q})(s) - F_{21}^2(\mathbf{q})(s)) \\
 &- F_{11}^3(\mathbf{q})(s) \left(2F_{11}(\mathbf{q})(s)F_{22}(\mathbf{q})(s) - F_{12}^2(\mathbf{q})(s) - F_{21}^2(\mathbf{q})(s) \right) = 0
 \end{aligned} \tag{25}$$

elde edilir.

(25) denkleminin düzenlenmesiyle

$$\begin{aligned}
 &\frac{F_{11}(\mathbf{q}(s))F_{22}(\mathbf{q}(s)) - F_{12}(\mathbf{q}(s))F_{21}(\mathbf{q}(s))}{F_{11}^3(\mathbf{q}(s))} \\
 &= \frac{F_{11}(\mathbf{q})(s)F_{22}(\mathbf{q})(s) - F_{12}(\mathbf{q})(s)F_{21}(\mathbf{q})(s)}{F_{11}^3(\mathbf{q})(s)}, \\
 &\frac{2F_{11}(\mathbf{q}(s))F_{22}(\mathbf{q}(s)) - F_{12}^2(\mathbf{q}(s)) - F_{21}^2(\mathbf{q}(s))}{F_{11}^3(\mathbf{q}(s))} \\
 &= \frac{2F_{11}(\mathbf{q})(s)F_{22}(\mathbf{q})(s) - F_{12}^2(\mathbf{q})(s) - F_{21}^2(\mathbf{q})(s)}{F_{11}^3(\mathbf{q})(s)}
 \end{aligned} \tag{26}$$

elde edilir. Burada (26) sistemindeki eşitliklerin sol yanındaki ifadeleri, parametrizasyonların birer fonksiyonu olarak ifade edersek

$$\begin{aligned}
 \kappa_1(\mathbf{q}) &:= \frac{F_{11}(\mathbf{q})F_{22}(\mathbf{q}) - F_{12}(\mathbf{q})F_{21}(\mathbf{q})}{F_{11}^3(\mathbf{q})}, \\
 \kappa_2(\mathbf{q}) &:= \frac{2F_{11}(\mathbf{q})F_{22}(\mathbf{q}) - F_{12}^2(\mathbf{q}) - F_{21}^2(\mathbf{q})}{F_{11}^3(\mathbf{q})}
 \end{aligned} \tag{27}$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki sonuç, doğrudan κ_i fonksiyonlarının tanımından ve (26) sisteminden doğrulanır.

3.2.1. Teorem: $i \in \{1,2\}$ için aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\kappa_i(\mathbf{q}(s)) = \kappa_i(\mathbf{q})(s). \tag{28}$$

Buradaki κ_i invaryant fonksiyonlarına Möbius-invaryantları adı verilecektir. Möbius-invaryantları aşağıdaki sonucu doğrular.

3.2.2. Teorem: Sırasıyla \mathbf{p} ve \mathbf{q} düzgün parametrizasyonlarına sahip \mathbf{C}_1 ve \mathbf{C}_2 karmaşık rasyonel cebirsel eğrileri verilsin. \mathbf{C}_1 ve \mathbf{C}_2 eğrileri izometrik ise aşağıdakiler sağlanır:

$$\begin{aligned}\kappa_1(\mathbf{p}) &= \kappa_1(\mathbf{q})(s), \\ \kappa_2(\mathbf{p}) &= \kappa_2(\mathbf{q})(s)\end{aligned}\quad (29)$$

İspat. \mathcal{C}_1 ve \mathcal{C}_2 izometrik olsun. Bu takdirde Sonuç 3.1.2. den $F_{ij}(\mathbf{p}) = F_{ij}(\mathbf{q}(s))$ yazılır. κ_i fonksiyonlarının tanımından ve $F_{ij}(\mathbf{p}) = F_{ij}(\mathbf{q}(s))$ olduğundan $\kappa_i(\mathbf{p}) = \kappa_i(\mathbf{q}(s))$ elde edilir. Teorem 3.2.1. den $\kappa_i(\mathbf{p}) = \kappa_i(\mathbf{q})(s)$ elde edilir. ■

3.3. İzometrilerin hesaplanması

Bu kısımda önceki kısımlarda elde edilen bulgular hesaplamalı sonuçlara dönüştürülecektir. Öncelikle

$$\begin{aligned}\kappa_1(\mathbf{p}) &= \frac{U_1}{V_1}, & \kappa_1(\mathbf{q}) &= \frac{\tilde{U}_1}{\tilde{V}_1}, \\ \kappa_2(\mathbf{p}) &= \frac{U_2}{V_2}, & \kappa_2(\mathbf{q}) &= \frac{\tilde{U}_2}{\tilde{V}_2}\end{aligned}\quad (30)$$

alalım. Burada U_i, V_i ve \tilde{U}_i, \tilde{V}_i ifadeleri, $\gcd(U_i, V_i) = 1$ ve $\gcd(\tilde{U}_i, \tilde{V}_i) = 1$ şartını sağlayan, t parametresine bağlı polinomlardır. Buradan, Φ_1 ve Φ_2 polinomları

$$\begin{aligned}\Phi_1(t, s) &:= U_1(t)\tilde{V}_1(s) - V_1(t)\tilde{U}_1(s) \\ \Phi_2(t, s) &:= U_2(t)\tilde{V}_2(s) - V_2(t)\tilde{U}_2(s)\end{aligned}\quad (31)$$

şeklinde tanımlansın. Yine bu polinomların en büyük ortak çarpanı olan polinom

$$\mathcal{G}(t, s) := \text{ebob}(\Phi_1(t, s), \Phi_2(t, s))\quad (32)$$

şeklinde tanımlansın. Diğer yandan, keyfi bir $s = \varphi(t) = \frac{at+b}{ct+d}$ Möbius dönüşümüne karşılık gelen Möbius-çarpanı polinomu

$$\mathcal{F}(t, s) = (at + b) - s(ct + d)\quad (33)$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde aşağıdaki sonuç elde edilir.

3.3.1. Teorem: Sırasıyla \mathbf{p} ve \mathbf{q} düzgün parametrizasyonlarına sahip \mathcal{C}_1 ve \mathcal{C}_2 karmaşık rasyonel cebirsel eğrileri verilsin. \mathcal{C}_1 ve \mathcal{C}_2 eğrilerinin izometrik ise \mathcal{F} polinomu \mathcal{G} polinomunun bir çarpanıdır.

İspat: \mathcal{C}_1 ve \mathcal{C}_2 eğrileri izometrik olsun. Bu takdirde, Teorem 3.2.2. ve (31) eşitliklerinden, $\Phi_1(t, s) = 0$ ve $\Phi_2(t, s) = 0$ olacak şekilde bir $s = \varphi(t)$ Möbius dönüşümü mevcuttur. φ dönüşümüne karşılık gelen Möbius-çarpanı $\mathcal{F}(t, s)$ polinomu olsun. $s = \varphi(t)$, $\Phi_1(t, s)$ ve $\Phi_2(t, s)$ polinomlarının çözümü olduğundan, $\mathcal{F}(t, s)$ polinomunun sıfır yerini oluşturan (t, s) noktaları, $\mathcal{G}(t, s)$ polinomunun sıfır yerinde içerilir. Diğer yandan, $\mathcal{F}(t, s) = (at + b) - s(ct + d)$ polinomu indirgenemez olduğundan, Bezout Teoremi'nden (Sendra ve ark., 2007) \mathcal{F} polinomu \mathcal{G} polinomunun bir çarpanı olmak zorundadır. Böylece ispat tamamlanır. ■

Yukarıdaki sonuç hesaplamalı olarak önemli bir yöntem sunmaktadır. \mathcal{C}_1 ve \mathcal{C}_2 karmaşık rasyonel cebirsel eğrilerinin arasındaki izometrileri tespit etmek için $\mathcal{G}(t, s)$ polinomu hesaplanır ve çarpanlarına ayrılır. Bu çarpanlar arasından $\mathcal{F}(t, s) = (at + b) - s(ct + d)$ formatındaki özel

çarpanlar tespit edilir. Her bir özel çarpandan s izole edilerek, aranan $s = \frac{at+b}{ct+d}$ Möbius dönüşümü tespit edilmiş olur. Böylece tespit edilen her bir Möbius dönüşümü için (22) ve (23) denklemlerinden A üniter matrisi ve \mathbf{b} karmaşık ötelemesi elde edilir.

3.4. Algoritma

Önceki kısımlarda sunulan sonuçlar ile *CompIso* adı verilen, aşağıdaki algoritma doğrulanmış olur. Algoritmaya verilen isim Karmaşık İzometrilere kelimesinin İngilizce karşılığı olan Complex Isometries kelimelerinin kısaltmaları birleştirilerek oluşturulmuştur.

Algoritma 1. CompIso

Input: Sırasıyla \mathbf{p} ve \mathbf{q} düzgün parametrisasyonlarına sahip \mathcal{C}_1 ve \mathcal{C}_2 karmaşık rasyonel cebirsel eğrileri.

Output: $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ arasındaki izometrilere ya da “Eğriler izometrik değildir” uyarısı.

Procedure: CompIso(\mathbf{p}, \mathbf{q})

1. (32) denklemleriyle verilen $\mathcal{G}(t, s)$ polinomunu hesapla.
2. $L := \emptyset$ atamasını yap.
3. $\mathcal{G}(t, s)$ polinomunu çarpanlara ayırarak $\mathcal{F}(t, s)$ Möbius çarpanlarını hesapla.
4. Her bir $\mathcal{F}(t, s)$ Möbius çarpanı için
5. $A = D(\mathbf{q} \circ \varphi)(D(\mathbf{p}))^{-1}$ matrisinin ve $\mathbf{b} = \mathbf{q} \circ \varphi - A\mathbf{p}$ vektörünün sabit olduğunu doğrula.
6. Eğer doğruysa, φ, A ve \mathbf{b} çözümlerini L listesine ekle.
7. Eğer $L = \emptyset$ ise “Eğriler izometrik değildir” uyarısını ver aksi halde L listesini ver.

Algoritmanın basamaklarının açık şekilde görülebilmesi için aşağıdaki örnek sunulmuştur.

3.4.1. Örnek: Aşağıdaki parametrisasyonlarla verilen \mathcal{C}_1 ve \mathcal{C}_2 eğrilerini göz önüne alalım:

$$\mathbf{p}(t) = \left(\begin{array}{c} \frac{4t^4 + 2t^3 - 5t^2 - 9t + 1}{t^4 + 1} + \frac{-7t^2 - 5t - 6}{t^4 + 1} \mathbf{i} \\ \frac{6t^4 - 3t^3 - 6t^2 - 9t + 7}{t^4 + 1} + \frac{9t^2 + 8}{t^4 + 1} \mathbf{i} \end{array} \right), \quad (34)$$

$$\mathbf{q}(t) = \left(\begin{array}{c} \frac{1430t^4 - 845t^3 + 325t^2 - 65t + 650}{130(t^4 + 1)} + \frac{-390t^4 - 325t^3 + 195t^2 + 325t - 260}{130(t^4 + 1)} \mathbf{i} \\ \frac{-20t^4 - 115t^3 - 135t^2 - 5t + 60}{10(t^4 + 1)} + \frac{40t^4 - 25t^3 + 5t^2 - 25t + 10}{10(t^4 + 1)} \mathbf{i} \end{array} \right)$$

Buradan gerekli hesaplamalar yapıldıktan sonra $\mathcal{G}(t, s) = st - 1$ elde edilir. Buradan $\mathcal{G}(t, s)$ polinomu tek bir özel çarpana sahiptir. s bu çarpandan izole edilirse $\varphi(t) = \frac{1}{t}$ Möbius dönüşümü elde edilir. Buradan da φ Möbius dönüşümüne karşılık gelen $f(\mathbf{z}) = A\mathbf{z} + \mathbf{b}$ karmaşık izometrisi için

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - \mathbf{i} & 1 + \mathbf{i} \\ 1 + \mathbf{i} & 1 - \mathbf{i} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 + \mathbf{i} \end{pmatrix} \quad (35)$$

elde edilir.

3.5. Testler ve performans

Bölüm 3.4’te verilen algoritma CompIso, bilgisayar cebir sistemi Maple (2022) kullanılarak bilgisayar ortamına uyarlanmıştır. Bu uyarılama, 2.4 Ghz Intel Core i5 işlemciye ve 8 GB belleğe sahip

bir bilgisayarda test edilmiştir. Bu çalışmada sunulan örnekler ve tüm testler ikinci yazarın kişisel web sayfasında (Gözütok, 2023) tüm araştırmacılara açık şekilde sunulmuştur. Tüm örnekler ve testlerde, izometrik bir eğri çifti elde edebilmek için, düzgün bir q parametrizasyonu ile parametrelenmiş C_2 eğrisi alınıp

$$p(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-i & 1+i \\ 1+i & 1-i \end{pmatrix} q(3t) + \begin{pmatrix} 0 \\ -1+i \end{pmatrix} \quad (36)$$

eşitliği ile p düzgün parametrizasyonuna sahip bir C_1 eğrisi elde edilmiştir. Burada, C_1 ve C_2 eğrilerinin izometrik olduğunu garantilemek için karmaşık izometri olarak

$$f(z) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \quad (37)$$

ve Möbius dönüşümü olarak da $\varphi(t) = 3t$ alınmıştır.

İlk test grubunda, $p(t) = (p_1(t) + ip_2(t), p_3(t) + ip_4(t))$ parametrizasyonunda p_i fonksiyonlarının birer polinom olduğu durum dikkate alınmıştır. $p_i(t)$ polinomları çeşitli derecelere ve yoğun olacak şekilde rastgele üretilmiştir. Bu polinomların katsayıları ise -10 ile 10 arasında olacak şekilde rastgele seçilmiştir. Beklendiği üzere bu şekilde üretilen eğri çiftleri arasında yalnızca bir izometri tespit edilmiştir. Bu eğrilerin izometri tespitinde harcanan süreler Çizelge 1’de sunulmuştur.

Çizelge 1. Polinomsal rastgele eğriler için saniye cinsinden izometri saptama süreleri

| Derece | Süre (sn) |
|--------|-----------|
| 4 | 0.078 |
| 6 | 0.047 |
| 8 | 0.062 |
| 10 | 0.063 |
| 12 | 0.093 |
| 14 | 0.094 |
| 16 | 0.172 |
| 18 | 0.188 |
| 20 | 0.218 |

İkinci test grubunda, $p(t) = (p_1(t) + ip_2(t), p_3(t) + ip_4(t))$ parametrizasyonunda p_i fonksiyonlarının rasyonel olduğu durum dikkate alınmıştır. Bu test grubunda da polinomların katsayıları ise -10 ile 10 arasında olacak şekilde rastgele seçilmiştir. Bu eğrilerin izometri tespitinde harcanan süreler Tablo 2’de sunulmuştur.

Tablo 2. Rasyonel rastgele eğriler için saniye cinsinden izometri saptama süreleri

| Derece | Süre (sn) |
|--------|-----------|
| 4 | 0.141 |
| 6 | 0.328 |
| 8 | 0.312 |
| 10 | 0.563 |
| 12 | 0.750 |
| 14 | 1.297 |
| 16 | 1.312 |
| 18 | 1.531 |
| 20 | 2.672 |

Üçüncü test grubunda ise trivial yani birim simetriden farklı karmaşık simetriler üretmek için $\mathbf{p}(t) = (p_1(t) + ip_2(t), p_3(t) + ip_4(t))$ parametrizasyonunda p_1, p_2 polinomları rastgele oluşturulmuş ve $p_3 = p_1(\frac{1}{t})$ ve $p_4 = p_2(\frac{1}{t})$ olarak alınmıştır. Böylece, oluşan rastgele eğriler $\varphi(t) = t$ için $f(\mathbf{z}) = I\mathbf{z}$ trivial simetriye sahip iken, $\varphi(t) = -t$ için merkezli inversiyon simetrisine sahip olur. Benzer şekilde katsayılar -10 ile 10 arasında olacak şekilde rastgele seçilmiş ve karmaşık simetrisinin tespiti için harcanan süreler Tablo 3'te sunulmuştur.

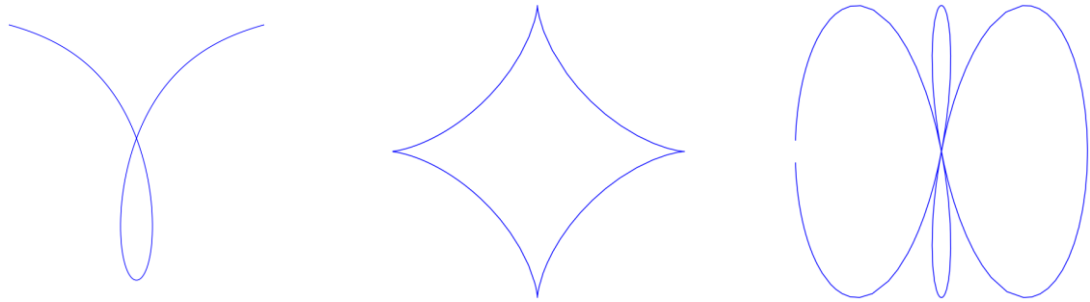
Tablo 3. Rasyonel rastgele eğriler için saniye cinsinden simetri saptama süreleri

| Derece | Süre (sn) |
|--------|-----------|
| 4 | 0.157 |
| 6 | 0.375 |
| 8 | 0.359 |
| 10 | 0.328 |
| 12 | 0.422 |
| 14 | 1.078 |
| 16 | 1.656 |
| 18 | 2.719 |
| 20 | 4.156 |

Dördüncü ve son test grubunda ise algoritmanın gerçel girdilere sahip eğrilerin simetrisini hesaplayabildiği gösterilmiştir. Bu test için kullanılan eğri parametrizasyonları Tablo 4'te ve bu eğrilerin görselleri de Şekil 1'de sunulmuştur.

Tablo 4. Gerçel girdili eğriler ve simetrisi

| Derece | Parametrizasyon | Simetri Sayısı | Süre (sn) |
|--------|--|----------------|-----------|
| 3 | $\left(\frac{t(1-t^2)}{1+t^2}, \frac{2t^2}{1+t^2}\right)$ | 2 | 0.001 |
| 6 | $\left(\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^3, \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^3\right)$ | 8 | 0.016 |
| 6 | $\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\left(4\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 - 3\right), \frac{2t}{1+t^2}\left(4\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 - 3\right)\right)$ | 4 | 3.898 |



Şekil 1. Tablo 4. de parametrizasyonları verilen eğrilerin şekilleri.

4. Tartışma ve Sonuç

Bu çalışmada iki boyutlu karmaşık uzayda rasyonel cebirsel eğrilerin karmaşık izometri ve simetrisinin hesaplanması problemine, etkili ve yeni bir yaklaşım sunulmuştur. Verilen algoritma ile problemin tam çözümü yapılmasının yanında, hesaplamaların etkili ve hızlı olduğu testlerle desteklenmiştir.

Metot, eğrilerin parametrizasyonları ile oluşturulan cebirsel denklem sistemlerini çözmekten sakınmaktadır. Çünkü bu sistemler, Möbius dönüşümünün katsayılarına göre doğrusal olmayan denklemlerden oluşmaktadır ve özellikle yüksek dereceli eğriler için yapılan hesaplamalar ya çok uzun sürecek ya da sonuç vermeyecektir. Bunun yerine, polinomların çarpanlara ayrılması ve ortak çarpanlarının bulunması üzerine bir yaklaşım benimsenmiştir. Bu yaklaşımın en önemli avantajı, bilgisayar cebir sistemlerinin polinomlarla ilgili çarpan bulma işlemlerini gelişmiş bir seviyede yürütebilmesidir. Problemi polinom denklemlerine indirgemek için, temel invaryantlar ve Möbius-invaryantları tanıtılmıştır. Bu invaryantlar sayesinde Möbius dönüşümleri çarpan bulma yöntemiyle kolayca bulunabilmiş, yine izometrisinin üniter matris ve öteleme kısımları da herhangi bir denklem sistemi çözülmesine gerek kalmadan doğrudan elde edilebilmiştir.

Algoritma, Maple bilgisayar cebir sistemi kullanılarak bilgisayar ortamına uyarlanmıştır. Bu uyarılmanın test edilmesi için, geniş çaplı testler uygulanmış ve sonuçları makalede sunulmuştur. İlgili sonuçlar dikkate alındığında, algoritma hem polinom girdili hem de rasyonel girdili eğriler için problemi saniyeler içinde çözebilmektedir. Algoritma, iki girdi eğrisinin özdeş alınmasıyla eğrilerin karmaşık simetrisini hesaplamaktadır. En az bir trivial olmayan simetrisi bulunan eğriler için algoritma sınanmış ve beklendiği üzere saniyeler içinde problemin çözümü elde edilebilmiştir.

Gelecek çalışmalarda, bu çalışmada verilen metodun keyfi boyutlu karmaşık uzaylara genişletilmesi düşünülmektedir. Ayrıca, iki boyutlu karmaşık uzayda kapalı formda temsil edilen eğriler için de aynı problem çözülmeye çalışılacaktır. Sunulan metot ile bu probleme benzer bir yaklaşım sunmak şu anda mümkün değildir, zira burada verilen metot doğrudan parametrizasyonların gücünden faydalanmaktadır.

Teşekkür

Yazarlar Prof. Juan Gerardo Alcázar'a, sonsuz desteği, yardımını hiçbir zaman esirgemediği ve tüm süreçlerde yanlarında olduğu için saygı ve teşekkürlerini sunar.

Kaynakça

- Alcázar, J. G., Hermoso, C., & Muntingh, G. (2015). Symmetry detection of rational space curves from their curvature and torsion. *Computer Aided Geometric Design*, 33, 51-65. doi:10.1016/j.cagd.2015.01.003
- Alcázar, J. G., Díaz Toca, G. M., & Hermoso, C. (2019a). The problem of detecting when two implicit plane algebraic curves are similar. *International Journal of Algebra and Computation*, 29(5), 775-793. doi:10.1142/S0218196719500279
- Alcázar, J. G., Lávička, M., & Vršek, J. (2019b). Symmetries and similarities of planar algebraic curves using harmonic polynomials. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 357, 302-318. doi:10.1016/j.cam.2019.02.036
- Alcázar, J. G., & Quintero, E. (2020a). Affine equivalences of trigonometric curves. *Acta Applicandae Mathematicae*, 170, 691-708. doi:10.1007/s10440-020-00354-6
- Alcázar, J. G., & Quintero, E. (2020b). Affine equivalences, isometries and symmetries of ruled rational surfaces. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 364, 112339. doi:10.1016/j.cam.2019.07.004
- Alcázar, J. G., Gözütok, U., Çoban, H. A., & Hermoso, C. (2022). Detecting affine equivalences between implicit planar algebraic curves. *Acta Applicandae Mathematicae*, 182, 2. doi:10.1007/s10440-022-00539-1
- Alcázar, J. G., Lávička, M., & Vršek, J. (2023). Computing symmetries of implicit algebraic surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 104, 102221. doi:10.1016/j.cagd.2023.102221

- Bizzarri, M., Lávička, M., & Vršek, J. (2020). Computing projective equivalences of special algebraic varieties. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 367, 112438. doi:10.1016/j.cam.2019.112438
- Gözütok, U. (2023). Testler, örnekler ve kaynak kodları. <https://www.ugurgozutok.com/> Erişim Tarihi: 05.07.2023.
- Gözütok, U., Çoban, H. A., Sağiroğlu, Y., & Alcázar, J. G. (2023). A new method to detect projective equivalences and symmetries of rational 3D curves. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 419, 114782. doi:10.1016/j.cam.2022.114782
- Hauer, M., Jüttler, B., & Schicho, J. (2018). Projective and affine symmetries and equivalences of rational and polynomial surfaces. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 349, 424-437. doi:10.1016/j.cam.2018.06.026
- Jüttler, B., Lubbes, N., & Schicho, J. (2022). Projective isomorphisms between rational surfaces. *Journal of Algebra*, 594, 571-596. doi:10.1016/j.jalgebra.2021.11.045
- Maple, (2022). Maplesoft, a division of Waterloo Maple Inc. Waterloo, Ontario.
- Sendra, J. R., Winkler, F., & Perez-Diaz, S. (2007). *Rational Algebraic Curves: A Computer Algebra Approach*, 2008 ed., Algorithms and Computation in Mathematics, V. 22, Springer.