Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi
ISSN: 1301-0085 e-ISSN: 1309-0275

Matematik Öğretmen Adaylarının Matematiksel Modelleme Deneyimleri: Modelleme Döngüsü Aşamaları, Zorluklar ve Modelleme Rotaları*

Muhammet ŞAHAL[1], Ahmet Şükrü ÖZDEMİR[2]

Özet

Matematiksel modelleme karmaşık gerçek yaşam problemlerinin çözümü için matematik eğitiminde öne çıkan araştırma alanlarından biridir. Çalışmanın amacı ortaokul matematik öğretmeni adaylarının hangi modelleme aşamalarını deneyimlediklerini, modelleme aşamalarında karşılaştıkları zorlukları ve modelleme döngülerinde ortaya çıkan rotaları incelemektir. Bu bağlamda durum çalışması ile yürütülen araştırmada yirmi bir ortaokul matematik öğretmeni adayı gruplar halinde üç modelleme problemi üzerinde çalışmıştır. Katılımcıların not defterlerinden, çözüm izleme şablonlarından, ses ve video kayıtlarından elde edilen veriler içerik analizi yöntemiyle analiz edilmiştir ve "modelleme rotalarını" görünür kılan modelleme döngüsüne aktarılmıştır. Gruplarda ortaya çıkan modelleme rotalarının çoğu "düzensiz" ve "tamamlanmış" kategorisinde değerlendirilmiştir. Modelleme rotalarında öğretmen adaylarının "durumun zihinsel temsili", "gerçek model oluşturma" ve "matematiksel çözüm/sonuç" aşamalarında başarılı oldukları görülmüştür. Modelleme döngülerinde en fazla atlanan aşamaların "matematiksel model", "gerçek sonuçları yorumlama" ve "doğrulama" aşamaları olduğu ortaya çıkmıştır. Ayrıca atlanan aşamalardan matematiksel "model aşamasına" dair öğretmen adaylarının zorluk yaşadıklarını belirttikleri görülürken; "gerçek sonuçları yorumlama" ve "doğrulama" aşamalarına dair zorluk yaşadıklarını belirten herhangi bir ifade görülmemiştir. Çalışmadan elde edilen sonuçların öğretmen adaylarının eğitiminde matematiksel modelleme uygulamalarına ışık tutacağı ve karşılaşılan zorluklara ilişkin literatüre katkıda bulunacağı düşünülmektedir.

Makale Bilgileri
Araştırma Makalesi

Gönderim Tarihi 09/08/2023
Kabul Tarihi 09/09/2024
Yayın Tarihi 20/01/2025

Anahtar Kelimeler
Matematiksel modelleme, Modelleme döngüsü, Modelleme rotaları, Öğretmen adayları, Matematiksel modelleme problemleri

---

** Bu çalışma ikinci yazar danışmanlığında yürütülen birinci yazara ait doktora tezinin bir parçasıdır ve 2. Uluslararası Bilim, Eğitim, Sanat ve Teknoloji Sempozyumu'nda sözlü bildiri olarak sunulmuştur.*

1 İstanbul 29 Mayıs Üniversitesi, 0000-0003-3625-2456, msahal@29mayis.edu.tr
2 Marmara Üniversitesi, 0000-0002-0597-3093, ahmet.ozdemir@marmara.edu.tr

Atıf:
Şahal, M. ve Özdemir, A. Ş. (2025). Matematik öğretmen adaylarının matematiksel modelleme deneyimleri: Modelleme döngüsü aşamaları, zorluklar ve modelleme rotaları. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi [PAÜEFD], 63*, 1-38. https://doi.org/10.9779/pauefd.1340106

Giriş

Matematik eğitiminde; eleştirel düşünme, problem çözme, iş birliğine dayalı çalışma, farklı durumlara uyum sağlama, inisiyatif alma, etkili iletişim kurma ve bilgiyi farklı bağlamlarda kullanma becerilerine sahip bireyler yetiştirmek hedeflenmektedir. Öğrencilerin öğrenme sürecinde aktif olması, bilgiye ulaşma yollarını araştırması, yeni bilgileri eski bilgiler üzerine inşa etmesi ve özellikle gerçek yaşamla ilişkilendirme yapması gerektiği matematik öğretim programında da vurgulanmaktadır (Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], 2018). Bu becerilerin kazandırılması için öğretimin yeni ve daha yüksek standartlarla uygulanması gerekmektedir (Wagner, 2008). Son yıllarda matematik eğitimi alanındaki değişimler geleneksel öğretim yöntemlerinden daha etkili öğretim metotlarına olan ilgiyi ve talebi artırmıştır. Öğretim süreçlerinde öğrencilerin, üst düzey matematiksel düşünme becerilerini uygulamalarına olanak sağlayacak karmaşık, açık uçlu görevlerle deneyim yaşamaları önerilmektedir (Doerr ve English, 2006). Bu anlamda matematiksel modelleme, öğrencilerin matematik ve gerçek hayat arasında ilişki kurmaları, açık uçlu görevlerde matematiksel kavramları ve ilişkileri kullanmaları ve grup çalışmalarında tartışarak fikirlerini öne sürme ve savunma için önemli bir araç olarak öne çıkmaktadır (Deniz ve Akgün, 2016; Türker Biber ve Yetkin Özdemir, 2021). Çünkü matematiksel modellemenin temelinde yatan ana fikir matematik ile karmaşık olan gerçek dünya arasında çift yönlü bir ilişkinin var olduğu düşüncesidir (Borromeo Ferri, 2006). Bununla birlikte açık uçlu matematiksel modelleme problemlerinin grup çalışmalarıyla çözümü belli düzeyde matematiksel içerik bilgisinin yanı sıra matematiksel düşünme ve etkili iletişim becerilerini de gerektirmektedir.

Matematiksel Modelleme

Matematiksel modelleme, öğrencilerin hem günlük hayatlarında hem de geleceklerinde önemli bir role sahiptir (Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi [NCTM], 2000). Amerika Birleşik Devletleri, Avustralya, Almanya, Güney Afrika, Danimarka ve Hollanda gibi birçok ülkede matematiksel modellemeye müfredatta yer verildiği görülmektedir (Ferrando ve Albaraccín, 2019; Julie, 2020; Kaiser ve Brand, 2015; Niss, 2010; Schukajlow ve diğerleri, 2015; Stillman ve diğerleri, 2013). Matematiksel modelleme etkinlikleri sayesinde öğrenciler, düşüncelerini açıkça ifade etme ve doğrulama, iş birliği içinde çalışma, farklı çözüm yollarını araştırma ve sonuçlarını gerekçelendirme fırsatı elde etmektedirler (English ve Mousoulides, 2015; Simon ve Cox, 2019; Stohlmann ve Yang, 2021; Yenmez ve Erbaş, 2022; Zawojewski, 2010). Bu açıdan matematiksel modelleme uygulamalarının okul matematiğinde daha fazla yer alması gerektiği öne sürülebilir. Ancak matematik sınıflarında matematiksel modelleme etkinliklerinin istenilen düzeye ulaşmadığı söylenebilir (Blum, 2015; Kaygısız ve Şenel, 2023).

Matematiksel modelleme, gerçek yaşam ile matematiksel dünya arasındaki ilişkilerin kurulmasında öne çıkan araştırma alanlarından biridir (Borromeo Ferri, 2006; 2018). Lesh ve Doerr (2003) matematiksel modellemeyi gerçek yaşam problemi ile başlayan, bu problemden elde edilen çıkarımların matematikselleştirilerek analiz edildiği, çözümün gerçek yaşam durumuna göre yorumlandığı ve bu aşamaların yeniden düzenlenebildiği bir süreç olarak tanımlamıştır. Matematiksel modelleme problemleri, farklı varsayımlara (Blum, 2011; Stillman, 2015), çoklu çözümlere ve sonuçlara olanak sağlayan (Leong, 2012) ve üst düzey düşünme becerilerini gerektiren (Chang ve diğerleri, 2019; Zawojewski, 2010) karmaşık açık uçlu görevler olmaları (Simon ve Cox, 2019) bakımından klasik ders kitabı problemlerinden ayrılır. Bu bağlamda, matematiksel modelleme etkinlikleri hem öğrenciler hem de öğretmenler için zorlu görevlerdir (Blum, 2015).

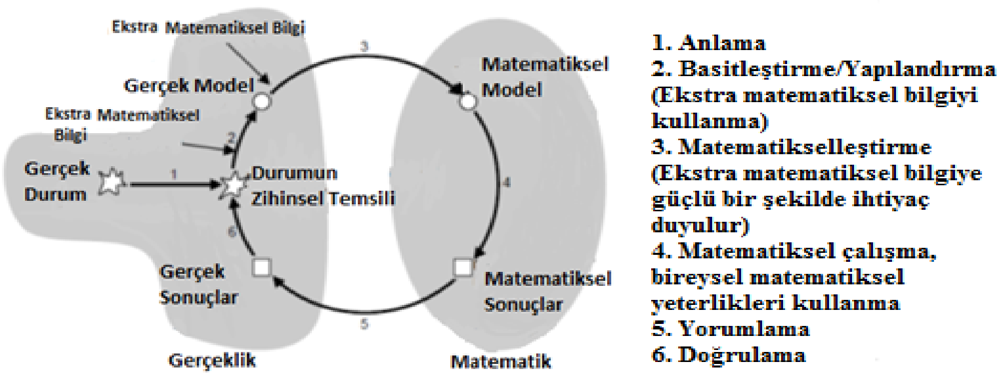
Matematiksel modelleme problemlerinin farklı çözüm yolları içermesi nedeniyle, öğrencilerin bazı öngörülemeyen zorluklarla karşılaştıkları anlarda uygun şekilde desteklenmeleri gerekir (Alwast ve Vorhölter, 2022). Bu desteği sağlayacak öğretmenlerin lisans dönemlerinde, modelleme etkinliği ile uğraşan öğrencilerin çeşitli aşamalarda nasıl desteklenebileceği konusunda yetkin olmaları gerekmektedir (Wessels, 2014). Bu nedenle, öğretmen eğitimi programlarında, öğretmen adaylarının modellemeye ilişkin içerik ve pedagojik alan bilgilerini geliştirmelerine olanak tanıyan ortamların sunulması önemlidir (Anhalt ve Cortez, 2016). Bunun yanı sıra öğretmen adaylarının modelleme problemleri üzerinde bağımsız çalışmalarına olanak sağlayan görevlerle karşılaşmaları gerektiği vurgulanmıştır (Maaß, 2007). Nitekim Berry (2002) matematiksel modelleme problemlerini yürütecek herkesin öncelikle bu süreçleri deneyimlemesi gerektiğini belirtmiştir. Ayrıca modelleme aşamalarındaki engelleri aşmak için kritik öneme sahip izleme ve düzenleme gibi üst-bilişsel becerilerin gelişimi için ilk elden deneyim büyük öneme sahiptir (Vorhölter, 2018). Tüm bu bilgiler ışığında, öğretmen adaylarının lisans yıllarında matematiksel modelleme aşamalarını deneyimlemelerinin ve modelleme döngüsü üzerindeki geçişler konusunda fikir sahibi olmalarının üst-bilişsel becerilerinin gelişimine katkı sağlayacak ve ileride öğrencilerine daha iyi rehberlik etme fırsatı sunacağı söylenebilir.

Kuramsal Çerçeve

Matematiksel modelleme gerçek dünya ile matematik arasında çift yönlü geçişleri içeren karmaşık bir süreç olarak tanımlanmıştır (Borromeo Ferri, 2018; Blum, 2002). Karmaşık bilişsel ve üst-bilişsel eylemler içeren matematiksel modelleme süreçlerini tanımlamak ve idealize etmek için "modelleme döngüsü" adı verilen çeşitli diyagramlar önerilmiştir. Literatürde farklı araştırmacılar tarafından önerilen modelleme döngüleri arasında farklılıklar olsa da modellemenin döngüsel bir süreç olduğu, döngüdeki aşamalar arasındaki geçişlerde esneklik olabileceği ve geçilen aşamaların tekrar gözden geçirilebileceği hususlarında fikir birliği bulunmaktadır (Borromeo Ferri, 2006; 2011; Kaiser ve Brand, 2015; Lesh ve Doerr, 2003; Stillman ve diğerleri, 2010). Örneğin Borromeo Ferri (2018) modelleme döngülerini, değişkenleri ve ilişkileri belirleme, matematikselleştirme, yorulama ve doğrulama gibi matematiksel modelleme yeterliklerini içeren ve modelleme sürecini tanımlamak ve izlemek için bir yapı sağlayan çok yönlü bilişsel araçlar olarak tanımlamaktadır. Şekil 1'de sunulan Borromeo Ferri'ye (2006) ait modelleme döngüsü modelleyicilerin matematiksel modelleme aşamalarındaki geçişlerini ayrıntılı olarak incelemeye fırsat sunmaktadır. Bu bakımdan çalışmada öğretmen adaylarının modelleme süreçlerini izlemek ve değerlendirmek için Borromeo Ferri'ye (2006) ait modelleme döngüsü kullanılmıştır.

Şekil 1

Borromeo Ferri (2006)'ye ait modelleme döngüsü



Borrome Ferri (2006) tarafından önerilen modelleme döngüsüne göre, bir modelleme problemi ile uğraşan kişi gerçek durum (GD), durumun zihinsel temsili (DZT), gerçek model (GM), matematiksel model (MM), matematiksel sonuç(lar) (MS), gerçek sonuç(lar) (GS) aşamalarından geçtikten sonra tekrar durumun zihinsel temsiline dönerek altı aşamada süreci tamamlar. İkinci ve üçüncü aşamalara geçişte ekstra matematiksel bilgi (EMB) söz konusudur. Modelleme döngüsünde gerçek sonuç ve durumun zihinsel temsili aşamalarının karmaşık bir formda olduğunu, gerçek model ve matematiksel model aşamasındaki durumun daha formal bir yapıya sahip olmaya başladığını, matematiksel sonuç(lar) ve gerçek sonuç(lar)da gerçek durum ve durumun zihinsel temsilinin kesinleştiğini simgeleyen işaretleri görmek de mümkündür. Modelleme döngüsünde hareket eden bir öğrencinin problemi anlamlandırması, karmaşık durumu basitleştirmesi ve yapılandırması, değişkenleri ve aralarındaki ilişkileri formal olarak ifade ederek matematiksel dünyaya geçiş yapması, çözümleri gerçekleştirmesi, elde ettiği matematiksel sonuçları yorumlaması ve son olarak değerlendirme yoluyla süreci doğrulaması (D) beklenir (Borromeo Ferri, 2018). Bu sürecin idealize edildiği gibi sıralı ve hiyerarşik bir şekilde ilerlemediği birçok araştırmacı tarafından vurgulanmıştır (English ve diğerleri, 2016; Eraslan, 2012; Leiss ve diğerleri, 2019; Maaß, 2006). Bilişsel bir araç olan modelleme döngüleri aynı zamanda etkili bir değerlendirme aracıdır (Borromeo Ferri, 2018).

Çalışmanın Önemi ve Amacı

Tüm modelleme döngüleri, problem tanımı, ürün geliştirme, test etme ve düzenlemeyi içermeleri bakımından ortak noktaları barındırmaktadır (Simon ve Cox, 2019). Bilişsel süreçleri modelleyen bu diyagramların değerlendirme ve eğitim materyalleri gibi farklı amaçlar için etkili araçlar olarak kullanılabileceği de belirtilmiştir (Borromeo Ferri, 2018; Lesh ve Doerr, 2003). Modelleme problemlerinde çözüm sürecinin hiyerarşik bir yol izlememesi nedeniyle, çözüm süreci bir taslak ile başlamakta ve bu taslağın tekrar tekrar gözden geçirilmesi ve yeniden düzenlenmesi ile olgunlaşmaktadır (Ärlebäck ve Doerr, 2018; Lesh ve Lehrer, 2003). Dolayısıyla nihai çözüme ulaşana kadar modelleme döngüsündeki çeşitli aşamaların tekrarlanması ya da aşamalara birkaç kez geri dönülmesi söz konusu olabilir. Borromeo Ferri (2007) modelleme döngüsünün çeşitli aşamalarına göre ortaya çıkan bireysel modelleme sürecini ifade etmek için “modelleme rotası (individual modeling route)” kavramını kullanmıştır. Bilişsel modelleme döngüleri, problemle uğraşan bir kişinin döngü üzerinde nasıl bir rota izleyebileceğini açıklamaktan ziyade bir modelleme probleminin ideal çözümünü temsil etmektedir (Niss ve Blum, 2020). Literatürde bireysel modelleme rotalarına ilişkin teorik ve uygulamalı çalışmalar (Blum ve Borromeo Ferri, 2009; Borromeo Ferri, 2010; Doerr ve diğerleri, 2017; Ramírez-Montes ve diğerleri, 2021; Sol ve diğerleri, 2011; Taşpınar Şener, 2017) bulunmakla birlikte, öğretmen adaylarının bireysel modelleme rotalarına odaklanan az sayıda uygulamalı araştırma bulunmaktadır. Bununla birlikte öğretmen adaylarıyla gerçekleştirilen çalışmalarda matematiksel modelleme aşamalarında uygun yaklaşımların sergilenip sergilenmediği ve modelleme aşamalarında yaşanan güçlükler incelenmiştir (Albayrak ve Tarım, 2022; Bukova Güzel; 2011; Deniz ve Akgün, 2018; Duran ve diğerleri, 2016; Hıdıroğlu ve diğerleri, 2018; Karahan ve Ergene, 2023; Kaya ve Keşan, 2022; Tekin Dede ve Yılmaz, 2013; Yılmaz ve Tekin Dede, 2016). Sol vd. (2011), bu düzenli modelleme döngülerine ilişkin farklı katılımcı gruplarıyla daha detaylı uygulama çalışmalarının yapılması gerektiğine dikkat çekmiştir.

Lisans düzeyindeki mesleki gelişimi etkileyen aktüel uygulamaların, meslek hayatına başladıktan sonra tatil dönemlerinde veya kısıtlı programlarda verilen eğitimlerden çok daha faydalı olduğu ifade edilmiştir (Sevinç ve Lesh, 2018; Stillman, 2015). Modelleme döngüsündeki geri dönüşlerle ve tekrarlı aşamalarla farklılaşan bireysel modelleme rotalarının görünür kılınması özellikle öğretmen eğitimindeki matematiksel modelleme uygulamalarına katkı sağlayacaktır. Bu nedenle çalışmanın, matematik öğretmen adaylarının matematiksel modelleme probleminin çözüm sürecinde hangi aşamalarda zorlandıkları konusuna katkı sunmasının yanı sıra; döngü üzerindeki modelleme rotalarını incelemesi bakımından modelleme döngülerinin nasıl kullanılacağı konusunda hem öğretmen eğitimindeki uygulamalara hem de literatüre ışık tutması beklenmektedir. Bu bağlamda çalışmanın amacı, matematik öğretmen adaylarının matematiksel modelleme dersi kapsamındaki matematiksel modelleme problemlerinin çözüm süreçlerindeki bireysel modelleme rotalarını, bireysel modelleme rotaları üzerinde hangi matematiksel modelleme aşamalarını deneyimlediklerini incelemek ve hangi aşamalarda zorlandıklarını ortaya çıkarmaktır. Bu amaç doğrultusunda şu araştırma sorularına cevap aranmıştır:

- Matematik öğretmen adayları (MÖA) modelleme etkinliklerinde hangi modelleme döngüsü aşamalarını deneyimlemişlerdir?
- Matematik öğretmen adayları (MÖA) modelleme döngüsünün hangi aşamalarında zorluk yaşamışlardır?
- Matematik öğretmen adaylarının (MÖA'nın) çözüm süreçlerindeki modelleme döngülerinde hangi modelleme rotaları ortaya çıkmıştır?

Yöntem

Araştırma Modeli

Bu çalışmada nitel araştırma modellerinden durum çalışması benimsenmiştir. Durum çalışması, araştırmacının bir ya da daha fazla kişinin dahil olduğu bir program, vaka ya da faaliyeti derinlemesine incelediği bir araştırma desenidir (Creswell, 2009; s.13). Bu çalışmada, MÖA'nın çözüm süreçlerinde modelleme döngüsünde izledikleri bireysel modelleme rotalarını, deneyimledikleri modelleme aşamalarını ve hangi aşamalarda zorlandıklarını derinlemesine incelemeye olanak sağlaması nedeniyle durum çalışması yöntemi benimsenmiştir.

Çalışma Grubu

Araştırma, Türkiye'de bir devlet üniversitesinde öğrenim gören 21 ortaokul matematik öğretmen adayı ile gerçekleştirilmiştir. Çalışma 2019-2020 akademik yılı güz döneminde gerçekleştirilmiştir. Araştırmanın katılımcıları ÖA1, ÖA2,... ve ÖA21, gönüllülük esasına dayalı oluşturulan üçer kişilik grupları ise G1, G2,... ve G7 olarak kodlanmıştır. Öğretmen adaylarının hiçbiri daha önce matematiksel modelleme ile ilgili bir ders almamıştır. Dolayısıyla bu konuda herhangi bir deneyimleri yoktur. Çalışma grubunun belirlenmesinde amaçlı örnekleme yöntemi kullanılmıştır. Amaçlı örnekleme yönteminde araştırma sorularına ışık tutacak ve bilgi açısından derinlemesine ve zengin bir analize olanak sağlayacak durumlar seçilmektedir (Patton, 2002). Katılımcılara ve çalışma sırasında dahil oldukları gruplara ilişkin demografik bilgiler Tablo 1'de sunulmuştur.

Tablo 1

Uygulamaya Katılan MÖA'na ait Bilgiler

Kod (Cinsiyet)	Grup
ÖA 4(K), ÖA 9(K), ÖA 20(K)	Grup 1
ÖA 1(K), ÖA 11(K), ÖA 16(K)	Grup 2
ÖA 8(K), ÖA 10(K), ÖA 18(K)	Grup 3
ÖA 2(K), ÖA 13(K), ÖA 15(K)	Grup 4
ÖA 5(K), ÖA 6(E), ÖA 12(K)	Grup 5
ÖA 7(K), ÖA 14(E), ÖA 21(K)	Grup 6
ÖA 3(K), ÖA 17(K), ÖA 19(K)	Grup 7

K: Kadın, E: Erkek

Uygulama

Çalışmanın uygulanması uzun soluklu bir araştırmanın parçasıdır. Lisans düzeyinde bir matematiksel modelleme dersinde katılımcılar, Borromeo Ferri (2018) tarafından önerilen "teori", "uygulama", "teori ve uygulama", "sunum" ve "değerlendirme" olmak üzere beş bölümden oluşan teorik bir çerçeve kapsamında bir eğitim sürecine dahil edilmiştir. Birinci araştırmacı, eğitim sürecinin teorik eğitimi içeren ilk bölümünü yönetmiştir. MÖA, teorik bölümü takip eden uygulama bölümü olan çalışmanın ikinci bölümünde, gönüllü olarak oluşturdukları gruplarda modelleme problemleri üzerinde bağımsız olarak çalışmışlardır (bkz. Şekil 2). Araştırmacı, uygulama sürecinde bir rehber olarak görev yapmış ve katılımcılardan gelen soruları yanıtlamıştır. MÖA'ndan gelen sorulara verilen yanıtlar, onları belli bir çözme yönlendirmemek için dikkatle verilmiştir. Araştırmacı katılımcılardan gelen sorulara "Bütün ihtimalleri göz önünde bulundurdunuz mu?", "Gerekli olan bütün bilgilere eriştiğinizi düşünüyor musunuz?", "Bu varsayımınızı nasıl gerekçelendirebilirsiniz?", "Oluşturduğunuz matematiksel modelin problem durumunu temsil ettiğini düşünüyor musunuz?" gibi belirli bir çözüme ya da sonuca işaret etmeyen cevaplar verilmiştir. Katılımcıların çözüm süreçleri videoya kaydedilmiş ve her grubun diyalogları ses kaydına alınmıştır. MÖA'na yanlış çözümlerini ya da çözüm defterlerinin değiştirilmesi gereken kısımlarını silmemeleri söylenmiştir. Sayfaların değiştirmek istedikleri bölümlerine "vazgeçildi" ve "bu bölümü değiştirdik" gibi notlar yazmaları istenmiştir. Çalışmanın uygulama aşaması üç hafta sürmüş ve bu süre boyunca MÖA her hafta farklı modelleme problemleri üzerinde çalışmışlardır. MÖA modelleme problemlerinin çözüm sürecinde hesap makinesi ve gerekli bilgilere ulaşmak için internet kullanımı konusunda kısıtlanmamışlardır. Gruplara modelleme problemlerinin çözümü için 60 dk süre tanınmış, ek süre isteyen gruplara ek süre verilmiş ve çözüm süreci sona erdikten sonra 45 dk büyük sınıf tartışmasına ayrılmıştır. Ek olarak uygulama sonrasında öğretmen adaylarından modelleme döngüsünün en çok zorlandıkları aşamasını/aşamalarını yazmaları ve nedenini açıklamaları istenmiştir.

Veri Toplama Araçları

Çalışmada Borromeo Ferri'ye (2006) ait modelleme döngüsü kullanıldığı için, yine aynı araştırmacıya ait "Saman Balyası Problemi" (Borromeo Ferri, 2006) ve "Yakıt Problemi (Hopa)" (Blum ve Borromeo Ferri, 2009) seçilmiştir. Tekin Dede ve Yılmaz'a (2013) ait "Yakıt Deposu Problemi" ise öğretmen adaylarının bir model oluşturma etkinliğiyle deneyim yaşamaları amacıyla seçilmiştir. Problemlerin uygulama sürecine dahil edilmesinde uzman görüşüne başvurulmuştur.

Şekil 2

Çalışmada kullanılan modelleme problemleri

Araştırma kapsamında kullanılan modelleme problemlerinin çözüm sürecine ilişkin veriler, öğretmen adaylarının defterlerinden, çözüm izleme şablonlarından ve aralarında geçen diyalogların transkripsiyonlarından elde edilmiştir. Gruplar modelleme problemlerinin çözümlerini çözüm defterlerine yazmışlardır. Ayrıca, MÖA'ndan grup olarak nihai çözüm yollarını ve sonuçlarını tek bir çözüm izleme şablonunda raporlamaları istenmiştir. Çalışmadaki çözüm izleme şablonu altı aşamadan oluşmaktadır: Modelleme döngüsündeki aşamalara uygun olarak "gerçek sonucu ifade etme", "gerçek model oluşturma", "matematiksel model oluşturma", "matematiksel çözüm süreci", "matematiksel sonuç(lar)" ve "gerçek sonuç(lar)" olmak üzere altı aşamadan oluşmaktadır. MÖA matematiksel modelleme eğitiminin teorik bölümünde modelleme döngülerindeki aşamalara ilişkin eğitim almışlardır. Problem çözme süreçleri kamera ile video kaydına alınmış ve grup içi diyalogları ortaya çıkarmak amacıyla her gruptan ayrı ayrı ses kaydı alınmıştır. Çözüm defterleri, çözüm izleme şablonları, ses ve video kayıtlarından elde edilen veriler Borromeo Ferri'nin (2006) modelleme döngüsüne aktarılarak her bir grup için modelleme rotaları ortaya çıkarılmıştır. Uygulama sonrasında, MÖA'nın zorlandıkları aşamalar hakkındaki düşüncelerini ortaya çıkarmak için açık uçlu ankette yer alan *"Modelleme problemlerini çözerken hangi aşamada zorlandığınızı ayrıntılı olarak belirtir misiniz? Lütfen nedenini de belirtiniz."* sorusunu cevaplamaları istenmiştir.

Verilerin Analizi

Katılımcıların modelleme problemlerinin çözüm süreçlerinden elde edilen veriler içerik analizi yöntemi ile analiz edilmiştir. İçerik analizi, verilerin belirli bir kurala göre daha az içerik kategorilerine aktarıldığı sistematik ve tekrarlı bir teknik olarak tanımlanmaktadır (Weber, 1990). Temel tutarlılıkları ve anlamları belirlemek için çok fazla miktardaki nitel verileri indirgeme ve anlamlandırma çabasını ifade etmek için kullanılmaktadır (Patton, 2002, s. 453). Veri kodlama ve kategorizasyon sürecine geçmeden önce analiz birimleri, analizde kullanılacak kodlar ve oluşturulacak kategoriler belirlenmelidir (Cohen ve diğerleri, 2007). Not defterlerinden, çözüm izleme şablonlarından ve grup diyaloglarından elde edilen veriler düz yeşil ok, düz kırmızı ok, kesikli yeşil ok ve kesikli kırmızı ok olarak kategorize edilmiş ve modelleme döngüsündeki aşamalar arasındaki geçişlere aktarılmıştır. Bu kategoriler, Bukova Güzel'in (2011) Borromeo Ferri'nin (2006) modelleme döngüsündeki aşamaları değerlendirmek için kullandığı "tam performans", "zayıf performans", "yanlış performans" ve "gerçekleştirilmedi" kategorilerini içeren yaklaşımına uygun olarak belirlenmiştir (s.24). Bukova Güzel'in (2011)'in değerlendirme yaklaşımında hangi modelleme aşamalarının gerçekleştirilip gerçekleştirilmediğini anlamak mümkündür. Modelleme döngüsünde numaralandırılmış renkli oklar kullanılarak hangi aşamaların gerçekleştirildiğinin tespit edilmesinin yanı sıra döngüdeki geri dönüşlerin, tekrarlı aşamaların ve izlenen yolun belirlenmesi amaçlanmaktadır. Bukova Güzel'in (2011) sınıflandırmasındaki "tam performans" düz okla, "zayıf performans" ve "yanlış performans" kesikli okla temsil edilmiştir. Modelleme döngüsündeki ileri geçişler yeşil renkle, geri dönüşler ise kırmızı renkle gösterilmiştir. Çözüm sürecinin hangi aşamasında olduğunu belirlemek için oklar numaralandırılmıştır. Bu şekilde aynı modelleme problemi için farklı katılımcılarda hangi döngülerin ortaya çıktığı, çözüm sürecinde hangi modelleme aşamalarının deneyimlendiği ya da farklı problemlerde aynı katılımcılar için modelleme döngülerinin nasıl değiştiğinin görülmesi amaçlanmıştır. Çözüm sürecinde modelleme döngüsü üzerindeki hareketleri görünür kılmak için kullanılan sınıflandırma Tablo 2'de sunulmuştur.

Tablo 2

Katılımcıların Modelleme Döngüsünde Yer Alan Aşamalara Geçişlerinin Analizinde Kullanılan Sınıflandırma

Kategoriler	İleri Geçiş	Geri Geçiş
Aşamalar arasındaki geçiş başarılı bir şekilde gerçekleşmiştir.		
Aşamalar arasındaki geçiş gerçekleşmiş ancak gereklilikler yeterli düzeyde ortaya koyulamamış veya yanlış olarak ortaya koyulmuştur.		
Aşamalar arasında geçiş gerçekleşmemiştir.	Ok yok	Ok yok

Oklar yardımıyla ortaya çıkan modelleme rotaları "düzenli tamamlanmış", "düzenli tamamlanmamış", "düzensiz tamamlanmış" ve "düzensiz tamamlanmamış" kategorilerine göre incelenmiştir. Modelleme döngüsündeki aşamalar ideal bir şekilde sıralı ve hiyerarşik bir şekilde tamamlandıysa modelleme rotası düzenli; çözüm sürecinde modelleme aşamalarına dönüşler gerçekleştirildiyse veya bazı aşamalar atlandıysa düzensiz kategorisinde değerlendirilmiştir. Bununla birlikte gerçek duruma ait problemin çözüm sürecinde modelleme döngüsündeki aşamalar tamamlanarak tekrar gerçek duruma geri dönüş gerçekleştiyse modelleme rotası tamamlanmış; fakat herhangi bir aşamada tıkanıklık yaşanarak döngüsel rota oluşmadıysa tamamlanmamış olarak değerlendirilmiştir.

Veri toplama işleminin ardından ses kayıtları transkripsiyona tabi tutulmuş, video kayıtları ise eş zamanlı izlenerek veri analizine geçilmiştir. Transkripsiyon işlemlerinin ardından birinci yazar çözüm defterlerinden, çözüm izleme şablonlarından ve transkripsiyonlardan elde edilen tüm verileri gözden geçirerek grupların modelleme döngüsü boyunca gerçekleştirdikleri olası geçişleri tespit etmiştir.

Ardından bu geçişler Tablo 2'deki kategorilere göre yeniden düzenlenmiştir.

Çalışmanın Geçerliği ve Güvenirliği

Nitel araştırmalarda geçerlilik, bulguların doğruluğunun kontrol edilmesi, güvenirlik ise çalışmada kullanılan yaklaşımların diğer araştırmacılarla tutarlı olması anlamına gelir (Gibbs, 2007). Nitel çalışmalarda geçerliğin sağlanması için katılımcı teyidi, veri çeşitlemesi, doğrudan alıntı, detaylandırma ve uzman görüşü gibi önlemlerin alınması; güvenirliğin sağlanması için ise değerlendiriciler arasındaki uyumun incelenmesi ve araştırmacının rolünün açıklanması gerekmektedir (Creswell ve Miller, 2000; McMillan ve Schumacher, 2014). Bu doğrultuda çalışmada katılımcı teyidi gerçekleştirilmiş, farklı veri toplama araçları kullanılmış, çözümlerden ve diyaloglardan doğrudan alıntılar yapılmış, araştırmacının rolü ve uygulama süreci detaylı bir şekilde açıklanmaya çalışılmıştır. Ayrıca, araştırmacılar ve bağımsız bir uzman, yinelemeli ve sürekli bir prosedür aracılığıyla modelleme rotalarını ortaya çıkarmaya çalışmıştır. Birinci araştırmacı ilk aşamada yedi grubun üzerinde çalıştığı üç probleme ait modelleme döngülerinde 174 geçiş belirlemiştir. İkinci aşamada, ikinci yazar ve matematiksel modelleme konusunda bağımsız bir uzman, her bir problem için rastgele seçilen iki modelleme döngüsü üzerinde 44 geçişi kontrol etmiştir. Bu aşamada kodlayıcılar arası güvenirlik %88,63 olarak bulunmuş ve kabul edilebilir olarak değerlendirilmiştir (Miles ve Huberman, 1994). Üçüncü aşamada, kodlayıcılar bir araya gelmiş ve grupların modelleme döngülerindeki rotaları üzerinde anlaşmaya varmıştır. MÖA'nın hangi aşamalarda zorlandıklarına dair yazılı yanıtlarına ilişkin betimsel istatistikler de sunulmuştur.

Bulgular

Öğretmen Adaylarının Deneyimledikleri Modelleme Döngüsü Aşamalarına İlişkin Bulgular

Grupların modelleme problemleri için döngüdeki aşamaları tamamlama durumları Tablo 3'te sunulmuştur. G3 ve G7 dışındaki tüm grupların üç matematiksel modelleme problemi için döngüdeki tüm modelleme aşamalarını en az bir kez sergiledikleri görülmektedir.

Tablo 3

Modelleme Döngülerinde MÖA tarafından eksik bırakılan aşamalar

	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7
Saman Balyası	✓	✓	MS, GS, D	GS	GS	✓	MM, GS
Yakıt Problemi (Türkiye)	MM	MM	MM, D	✓	MM	MM	MM

Yakıt Deposu Problemi	GS	GS, D	MM, GS, D	MM, GS, D	MM, GS	GS	MM, GS, D

✓: Grup, modelleme döngüsündeki tüm aşamalara geçiş yapmıştır.
MM: Matematiksel Model, MS: Matematiksel Sonuç(lar), GS: Gerçek Sonuç(lar), D: Doğrulama

G1 incelendiğinde, Saman Balyası Probleminde döngüyü tamamladığı görülmektedir. Ancak Yakıt Probleminde (Türkiye) matematiksel model oluşturma ve Yakıt Deposu Probleminde gerçek sonuçlara yorumlama aşamalarını tamamlayamamışlardır. G5'in Saman Balyası Probleminde gerçek sonuçları yorumlama aşamasını ve Yakıt Probleminde (Türkiye) matematiksel model oluşturma aşamasını tamamlayamadığı tespit edilmiştir. Buna karşın, Yakıt Probleminde (Türkiye) gerçek sonuçlara yorumlama ve Saman Balyası Probleminde matematiksel model oluşturma aşamaları tamamlandığından, iki matematiksel modelleme problemi birlikte ele alındığında tüm aşamaların en az bir kez deneyimlendiği anlaşılmaktadır. Benzer şekilde G2, G4 ve G6, matematiksel modelleme problemlerinin üçü birlikte değerlendirildiğinde, modelleme döngüsündeki tüm aşamaları en az bir kez deneyimledikleri görülmektedir. Ancak G3'ün üç matematiksel modelleme probleminin hiçbirinde de doğrulama sürecine geçmediği, G7'nin ise matematiksel bir model oluşturmadığı gözlemlenmiştir. Öte yandan, matematiksel model oluşturma ve matematiksel sonuçları gerçek sonuçlara yorumlama aşamaları yirmi bir modelleme döngüsünün on birinde; doğrulama aşaması yirmi bir modelleme döngüsünün beşinde ve matematiksel sonuç aşaması ise bir modelleme döngüsünde eksik kalmıştır.

Öğretmen Adaylarının Zorlandıkları Modelleme Döngüsü Aşamalarıyla İlgili Görüşlerine İlişkin Bulgular

MÖA’nın üç matematiksel modelleme probleminin çözüm süreçlerinde hangi matematiksel modelleme döngüsü aşamasında zorlandıklarına ilişkin görüşleri Tablo 4’te sunulmuştur.

Tablo 4
MÖA’nın Modelleme Döngüsünde Zorlandıkları Aşamalara İlişkin Görüşleri

Modelleme Döngüsü Aşamaları	f
Durumun zihinsel temsili	4
Gerçek model	6
Matematiksel model	10
Matematiksel sonuç(lar)	1
Gerçek sonuç(lar)	0
Doğrulama	0
Zorluk yaşamadım	2

Tablo 4'e göre, uygulama sonrasında MÖA, sürecin en zor kısmının matematiksel bir model oluşturma aşaması olduğunu belirtmişlerdir.

Katılımcılar matematiksel modelleme problemleri şekil ve çizim gibi geometrik temsiller içermediği için, denklem ya da formül kuramadıkları için ya da matematiksel olarak ifade etmekte zorlandıkları için matematiksel model oluşturamadıklarını ifade etmişlerdir. Matematiksel modelin oluşturulmasının yanı sıra gerçek model oluşturma ve durumun zihinsel temsili aşamalarında da zorluklar yaşandığı ortaya çıkmıştır. MÖA gerçek modelin oluşturulmasında yaşanan zorlukları geometrik bir temsil veya gösterim arayışında olma ya da çizim becerilerinin zayıf olması gibi nedenlere bağlarken durumun zihinsel temsilinde yaşanan zorluğun nedeni olarak ise problemin anlaşılmasındaki güçlüğe değinmişlerdir. Modelleme döngülerindeki bu aşamaları atlamış olsalar da hiçbir katılımcı gerçek sonuçlar ve doğrulama aşamalarında zorluk çektiğini ifade etmemiştir.

Öğretmen Adaylarının Modelleme Rotalarına İlişkin Bulgular

Bu bölümde, üç matematiksel modelleme probleminin çözüm süreçlerini gösteren modelleme döngülerine ait sınıflandırmanın yanı sıra grup içi diyaloglardan ve MÖA'nın yazılı çözümlerinden örnekler sunulmuştur.

Saman Balyası Probleminde İlişkin Bulgular

Altı grup (G1, G2, G4, G5, G6, G7) Saman Balyası Probleminde modelleme döngüsünü tamamlarken, bir grup (G3) doğrulama aşamasını eksik bırakarak döngüyü tamamlayamamıştır. Tablo 5, grupların Saman Balyası Problemine ait modelleme rotalarının sınıflamasını göstermektedir.

Tablo 5

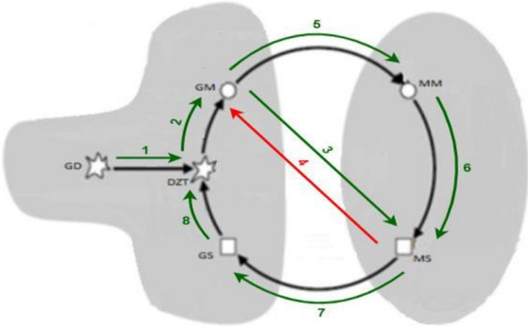
Saman Balyası Problemi İçin Grupların Modelleme Rotaları

	Tamamlanmış	Tamamlanmamış
Düzenli	G2,	-
Düzensiz	G1, G4, G5, G6, G7	G3

Modelleme rotalarının özellikleri incelendiğinde, sadece G2'nin modelleme rotasının düzenli formda olduğu, diğer grupların modelleme rotalarının ideal olan döngüdeki gibi hiyerarşik ve sıralı biçimde ilerlemediği görülmüştür. Şekil 3'te G2'nin Saman Balyası Problemine ait tamamlanmış ve düzenli formdaki tek örnek olan modelleme rotası sunulmuştur.

Şekil 3

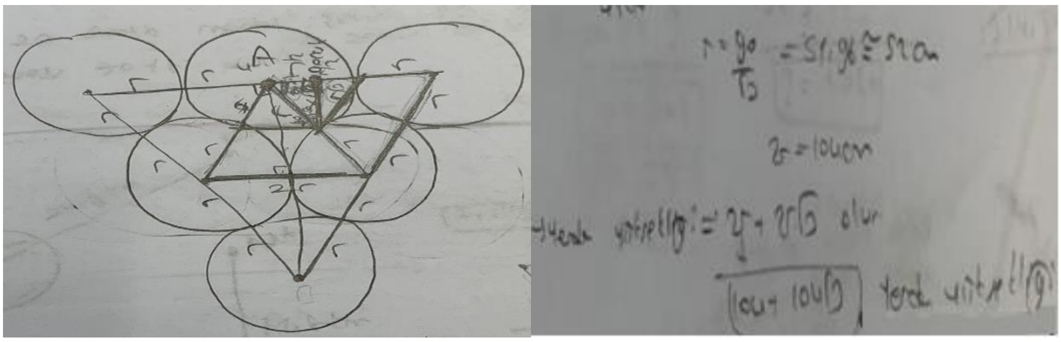
G2'nin Saman Balyası Problemine ait modelleme rotası



G2'ye ait Şekil 3'teki modelleme rotasının ideal modelleme döngüsündeki gibi ilerlediği görülmektedir. G2'deki katılımcılar resimdeki kişinin boyuna uygun hareket ederek saman balyasının yarıçapına ulaşabileceklerini varsaymış ve ardından durumun zihinsel temsiline geçişte saman balyası yığınının yüksekliğini hesaplamayı planlamışlardır. Üç sıra olduğunu varsaydıkları saman balyalarını birbirine teğet daireler gibi düşünerek yüksekliği gösteren gerçek modeli, çizdikleri üçgenin ağırlık merkezinden geçen doğru parçası ve dairelerin merkezlerini birleştirerek kurgulamışlardır. G2, "$2r\sqrt{3}+2r$" olarak oluşturdukları matematiksel modelde kişinin tahmini boyundan hareketle r yerine 52 koyarak matematiksel sonuca ulaşmıştır. Ardından matematiksel sonucun 284 cm'ye eşit olduğunu belirterek modelleme döngüsünün gerçek sonuçlar aşamasını tamamlamışlardır. Son olarak, G2'deki öğretmen adayları resimdeki kişinin yüksekliğini saman balyası yığınının yüksekliği ile karşılaştırarak sonuçları sorgulamışlardır. G2, sıralı ve hiyerarşik formdaki modelleme döngüsünü 67 dakikada tamamlamıştır.

Şekil 4

G2'nin Saman Balyası Problemine ait gerçek modeli ve matematiksel çözümü



G2'de doğrulama aşamasında katılımcılar arasında aşağıdaki diyalog gerçekleşmiştir:

ÖA16: Bulduğumuz sonuç oldukça mantıklı. Çünkü altın oran yardımıyla bulduk. Kadının boyundan yola çıkarak hesapladık. Yanlış olduğunu düşünmüyorum.

ÖA1: Saman balyalarının yüksekliğini yaklaşık 3 metre bulduk.

ÖA16: Ortalama insan boyu saman balyasının boyunu geçiyor. Çünkü 104 cm.

ÖA1: İnsan boyunun yarısı kadar dedik. İnsan boyunun saman balyasının yarısı kadar olduğunu söylemiştik. Saman balyası için 284 cm bulduk. Kadının boyunun 1,63 metre olduğunu varsaydık. Haklı olduğumuzu düşünüyorum. Yani kadın ayağa kalktığında yaklaşık olarak saman balyalarının yarısına ulaşıyor, değil mi?

ÖA16: Evet, ulaşıyor.

ÖA11: Yarıçapı ne kadar bulduk?

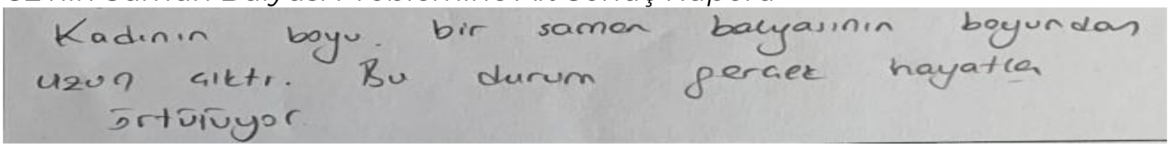
ÖA16: 52 cm bulduk. Bir saman balyasını düşünürsek yüksekliği 104 cm. Kadının boyu da 1,63 metre. Bana göre bir saman balyasının yüksekliği 1,63 metreyi geçmez. Bana göre bulduğumuz sonuç mantıklı.

ÖA1: Yani kadın bir saman balyasından daha uzun.

ÖA16: Bitti o zaman.

Şekil 5

G2'nin Saman Balyası Problemine Ait Sonuç Raporu


Kadının boyu. bir saman balyasının boyundan uzun çıktı. Bu durum gercek hayatla örtüşüyor

Yakıt Problemine (Türkiye) İlişkin Bulgular

Tablo 6, grupların Yakıt Problemine (Türkiye) ilişkin çözüm süreçlerini yansıtan modelleme rotalarının özelliklerini göstermektedir. Altı takımın (G1, G2, G4, G5, G6 ve G7) modelleme döngüsünü tamamladığı, bir takımın (G3) ise çözüm sürecini sonlandıramadığı görülmüştür.

Tablo 6

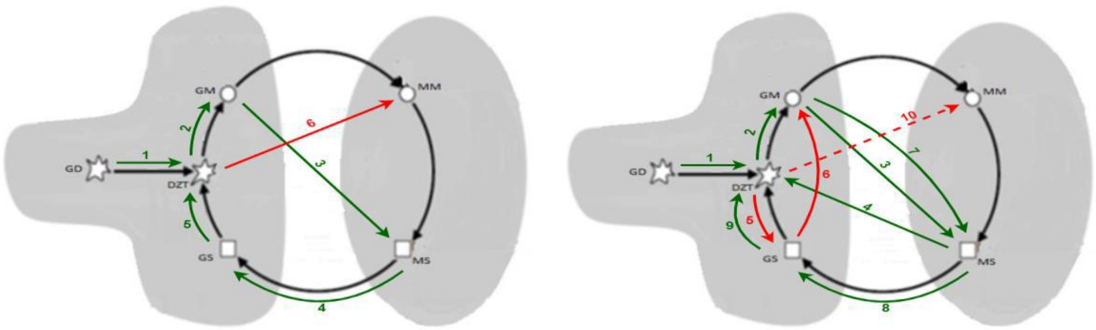
Yakıt Problemi (Türkiye) İçin Grupların Modelleme Rotaları

	Tamamlanmış	Tamamlanmamış
Düzenli	-	-
Düzensiz	G1, G2, G4, G5, G6, G7	G3

Grupların modelleme rotalarının ideal modelleme döngüsü gibi sıralı ilerlemediği tespit edilmiştir. Gruplar çözüm sürecinde bir veya daha fazla aşamayı atlamış veya bazı aşamalara birkaç kez geri dönmüştür. Verilere dayanarak (ayrıca bkz. Tablo 3), matematiksel modelin oluşturulması aşamasının en sık atlandığı problemin Yakıt Problemi (Türkiye) olduğu ortaya çıkmıştır. Modelleme döngülerinde gerçek modelin oluşturulması aşamasından sonra tüm gruplar matematiksel bir sonuca ulaşmak için matematiksel işlemlere girişmiştir. Sadece G4 çözüm sürecinin sonunda matematiksel bir model oluşturmuştur. G6 ise yaptıkları işlemlerden ve buldukları sonuçlardan yola çıkarak matematiksel bir model oluşturmaya çalışmış ancak başarısız olmuştur. Çözüm süreci G4 ve G6 tarafından yaklaşık 50 dakikada tamamlanmıştır. Şekil 6'da G4 ve G6'nın modelleme rotaları sunulmuştur.

Şekil 6

G4'ün (solda) ve G6'nın (sağda) Yakıt Problemine (Türkiye) ait modelleme rotaları



G4 ve G6'nın modelleme rotalarının düzensiz olduğu görülmektedir. Her iki grubun da durumun zihinsel temsiline geçerek problemi anladıkları ve gerekli varsayımları yapmayı başardıkları tespit edilmiştir. Bunu takiben probleme uygun gerçek modeller kurulmuştur. Matematiksel model oluşturma aşamasını atlayarak sonuca ulaşmak için bazı matematiksel işlemler üzerinde çalışmışlardır. G6 "$\textit{gidiş maliyeti} + \textit{dolum maliyeti} + \textit{dönüş maliyeti}$" formülü yerine "$\textit{gidiş maliyeti} + \textit{dolum maliyeti} - \textit{dönüş maliyeti}$" formülüne uygun matematiksel çözüm yaparak hata yapmıştır. G6 üyelerinden ÖA21, dönüş maliyetini neden çıkardıklarını sorgulamış ve arkadaşlarını uyararak "Ama hepsini toplamamız lazım. Üç maliyet var: kalkış, dolum ve varış. Varış maliyetini de dahil etmemiz lazım." demiştir. ÖA 14 bu uyarıdan sonra formülde mantıksal bir hata olduğunu başlangıçta kabul etmiştir. Ancak, ÖA7 ve ÖA14 daha sonra ÖA21'i, satın aldıkları benzini zaten harcadıkları için dönüş yolunda harcanan yakıt maliyetinin çıkarılması gerektiğine ikna etmiştir. ÖA21 ikna edildikten sonra hatalı formüle uygun olarak matematiksel işlemler yapılmış ve matematiksel sonuca ulaşılmıştır. Matematiksel sonucun ardından G6 doğrulama sürecine girmiş ve matematiksel sonucun mantıklı olup olmadığını inceleyerek beşinci geçişte gerçek sonuç aşamasına ilerlemiştir. Bu aşamada ulaştıkları sonucun makul olduğuna karar vermişlerdir. Benzer işlemleri problemin ikinci kısmına uygulayarak süreci tekrar gözden geçirmişlerdir. Son olarak matematiksel bir model oluşturmak için çaba sarf etmişler ancak başaramadıkları için vazgeçmişlerdir. ÖA14 hesap makinesinde bazı hesaplamalar yaparak "Tamam, harcadığım litre bu değil mi? Benzin fiyatını litre ile çarparsam seyahat maliyetimi elde ederim." ifadelerini kullanmıştır. Ancak hesap makinesindeki sonuç kendilerininkinden farklı çıkmıştır. Çünkü 100 km için kabul ettikleri ortalama yakıt tüketimini 1 km için tüketilen yakıt olarak kabul ederek farkında olmadan hata etmişlerdir. ÖA14, "Kâr mantıklı ama neden böyle çıktı?" diyerek şaşkınlığını dile getirmiştir. Bunun üzerine matematiksel modeli kurmaktan vazgeçmişlerdir. Öte yandan G4, matematiksel sonuçlar ile doğrulama aşamaları arasında kısmen hiyerarşik bir yol izlemiştir. G4'teki katılımcılar problemin iki bölümü için bulunan sonuçları karşılaştırarak makul olup olmadıklarını sorgulamışlardır. Problemin sonuçlarının benzin satın almak için kat edilen mesafe arttıkça daha az kâr elde edildiği fikrini desteklediği sonucuna varmışlardır. Son olarak, çözüm süreçlerine dayanarak matematiksel bir model oluşturmuşlar ve bir maliyet dağıtım tablosu oluşturmaya karar vermişlerdir (bkz. Şekil 7). Matematiksel modelin oluşturulması sırasında G4 aşağıdaki tartışmayı yapmıştır:

ÖA13: Matematiksel modele ne yazacağız?

ÖA2: Grafiğe ne yazacağız, litre mi benzin mi?

ÖA15: Mesela ben şöyle bir grafik oluşturdum. Benzinin litresi ve fiyatı... Ama ikisini nasıl birleştirebiliriz? Ama bir saniye bekleyin! Biz bir litre benzinin fiyatını hesapladık. Böyle yapmamıza gerek yok ki. Çarparak zaten bulabiliriz.

ÖA2: Yapabiliriz... tablo. Bunu grafiğe dökmeyelim.

ÖA15: Evet.

ÖA13: Nasıl tablo yapacağız?

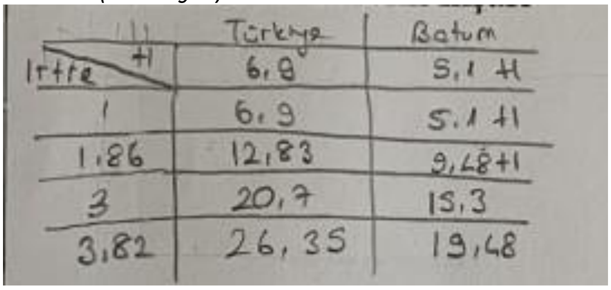
ÖA2: Şöyle yapalım. Mesela Türkiye, Batum...

ÖA13: Türkiye ve Batum yazabiliriz. Burada benzinin litre fiyatını yazabiliriz. Türkiye'de şu kadar, Batum'da bu kadar.

ÖA15: Tamam, bu kadar. Burada 6,9 ve burada 5,1. Türkiye ve Batum'un yanına litreyi de burada vereceğiz. Mesela bu bölümde 1,83 yazacağız ve TL'yi (Türk Lirası) açıklayacağız. Alternatif olarak daha önce hesapladığımızı da yazabiliriz. Tamam, orada litreyi kilometre ile çarpacağız. Bu da TL olsun.

Şekil 7

G4'ün Yakıt Problemine (Türkiye) ait matematiksel modeli



İrtfe / H	Türkiye	Batum
	6,9	5,1 H
1	6,9	5,1 H
1,86	12,83	9,68+1
3	20,7	15,3
3,82	26,35	19,68

Yakıt Deposu Problemine İlişkin Bulgular

Tablo 7, Yakıt Deposu Probleminin çözüm süreçlerinde grupların modelleme rotalarının özelliklerini göstermektedir. Üç grubun (G1, G5 ve G6) modelleme döngüsünü tamamladığı, dört grubun (G2, G3, G4 ve G7) modelleme döngüsünü yarım bıraktığı ortaya çıkmıştır. Yakıt Deposu Probleminin çözüm sürecinde yer alan tüm grupların modelleme rotalarının düzensiz olduğu tespit edilmiştir.

Tablo 7

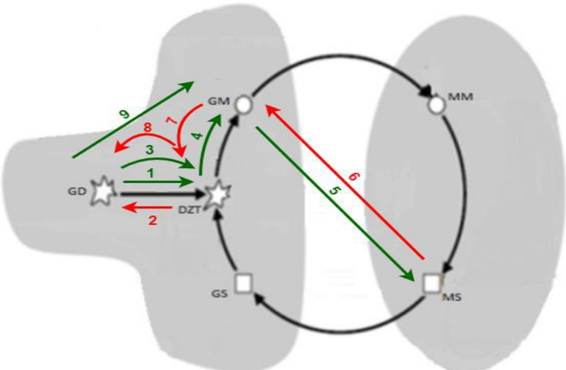
Yakıt Deposu Problemi İçin Grupların Modelleme Rotaları

	Tamamlanmış	Tamamlanmamış
Düzenli	-	-
Düzensiz	G1, G5, G6	G2, G3, G4, G7

Tablo 3, tüm grupların çözüm sürecinde matematiksel sonucun gerçek sonuçlara yorumlanması aşamasını atladığını göstermektedir. Katılımcılar çözüm sürecinin hiçbir aşamasında matematiksel sonuçların gerçek hayatta ne anlama gelebileceği konusunda yorumlama yapmamışlardır. Şekil 8'de düzensiz ve tamamlanmamış bir modelleme döngüsü örnek olarak sunulmuştur.

Şekil 8

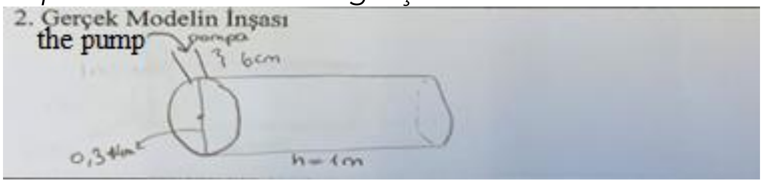
G7'nin Yakıt Deposu Problemine ait modelleme rotası



Şekil 8'de gösterilen G7'nin modelleme rotasında, katılımcıların matematiksel model oluşturma, gerçek sonuçlara yorumlama ve doğrulama süreçlerine girmedikleri görülmektedir. G7'deki MÖA, 1, 2 ve 3 numaralı oklarla gösterildiği gibi, durumun zihinsel temsiline geçiş için fazla zaman harcamıştır (33 dakika). Geçiş sürecinde grup üyeleri yakıt depoları hakkında daha fazla bilgi edinmek için internette bir yakıt deposu söküm videosu izlemiş ve yakıt deposunu araçtan sökerek yakıtın seviyesini anlamaya dayalı bir fikir geliştirdikleri için problem kapsamının dışına çıkmışlardır. Problem durumunu anlamak için uzun tartışmalar yapmışlardır. Şekil 9'da gösterilen gerçek modeli inşa ettikten sonra grup üyeleri, 74 litre olduğunu varsaydıkları yakıt deposunun boyutunu belirlemek için matematiksel hesaplamalara yönelmişlerdir.

Şekil 9

G7'nin Yakıt Deposu Problemine ait gerçek modeli



Bu aşamada, MÖA'nın hacim birimlerini litre ve metreküpe çevirmekte zorlandıkları, gerçeklik ilkesine aykırı olarak pi sayısını 3 olarak kabul ettikleri ve bazı hacim hesaplamalarında hata yaptıkları ortaya çıkmıştır. Örneğin, ÖA 17 silindirin yüksekliğinin tabanın çevresine eşit olduğunu iddia etmiş, bunun üzerine ÖA19 onu bu hatası konusunda uyarmıştır.

KÖA17: Tamam. Yaklaşıyoruz. Hissediyorum. Burada r diyelim, burada da 2πr diyelim. Bildiğimiz matematiksel özellikleri yazdık. Şimdi nereye geçiyoruz? Şimdi hacmi bulacağız. Bunun hacmini nasıl yazacağız? Silindirin hacmini yazalım.

ÖA3: $\pi r^2 h$.

ÖA17: h için 2πr demiştim.

ÖA19: Bence burada bir hata var. Bakın.

ÖA3: Hayır, hayır o çevreydi.

ÖA17: Hayır yanlış değil. Açılıyor.

ÖA19: Açılıyor ama bu onun çevresi dediğimiz kısım değil.

ÖA17: Evet, öyle.

ÖA19: Hayır, değil. Bunu açtığınızda denk gelmiyor.

ÖA17: Ahh, tamam! Matematik elden gidiyor şu anda. Tamam. $\pi r^2 h$ demiştik. π ne kadar çıkıyor? 0,074 metreküp.

ÖA3: Aynen öyle.

ÖA17: π'nin 3 olduğunu varsayalım. π için 3 diyelim. 0,074 bölü 3 yapalım. 0,0245 diyorum. Tamamdır.

ÖA3: Tamam, yuvarlarsanız tam olarak 47 eder.

Bunu ardından, grup üyeleri yakıt deposunu dikdörtgen prizma olarak varsayarak gerçek modellerini değiştirmiş, ancak tekrar vazgeçerek Şekil 10'da gösterilen depo şekline göre ilerlemeye karar vermişlerdir. Bir süre matematiksel hesaplamalarla uğraştıktan sonra çözümden vazgeçmeye karar vermişlerdir. G7, çubuğun ıslaklığı ile depodaki yakıt miktarı arasında bir bağlantı bulmaya yönelik herhangi bir girişimde bulunmamıştır. Yalnızca hacim birimleri arasındaki dönüşümler ve tankın hacmiyle ilgili matematiksel hesaplamalar Şekil 10'da gösterildiği gibi çözüm defterlerinde yer almıştır. G7 çözüm için 80 dakikadan fazla zaman harcamıştır.

ÖA17: Bence vazgeçelim.

ÖA3: Bence de.

ÖA17: Aslında vazgeçmek istemiyorum ama neyse.

ÖA19: Ne yapacağız?

ÖA17: Hiçbir şey bulamadık, o yüzden hiçbir şey yazmayacağız. Yani "bulamadık" yazacağız.

...

ÖA17: Gerçek modeli kuramadığımızı yazıyorum.

ÖA19: Bence gerçek modeli kurduk ama matematiksel modeli kuramadık.

ÖA17: Aa evet! Tamam, bu iyi. Şu şekli çizelim o zaman.

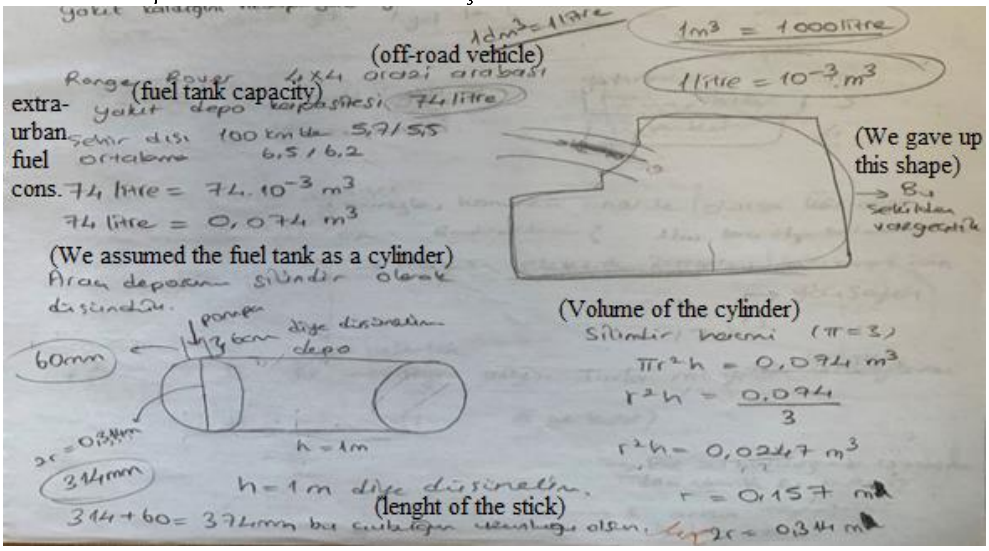
...

ÖA17: Matematiksel modeli oluşturamadık.

ÖA19: Yani matematiksel bir sonuç yok.

Şekil 10

G7'nin Yakıt Deposu Problemine ait çözümü



Bulguların Özetlenmesi

Gruplar üç problemin çözümünü genel olarak 30 dakika ile 80 dakika arasında değişen sürelerde tamamlamıştır. Saman Balyası ve Yakıt (Türkiye) problemlerinde durumun zihinsel temsiline geçişte daha az zaman harcarken, Yakıt Deposu Probleminde MÖA problemi çözmek için harcadıkları sürenin neredeyse yarısında problem durumunu anlamak için çaba sarf etmişlerdir. Tablo 3'teki veriler, modelleme döngüsünde grupların en fazla atladığı aşamanın Yakıt Deposu Probleminde olduğunu göstermektedir.

Çalışmanın bulguları, modelleme döngüsünün en çok atlanan aşamalarının matematiksel model oluşturma, matematiksel sonuçların gerçek sonuçlara yorumlanması ve doğrulama kısımları olduğunu göstermiştir. MÖA matematiksel bir model oluşturmada bazı zorluklar yaşadıklarını bildirirken yazılı belgelerinde veya konuşmalarında yorumlama ve doğrulama aşamalarında zorlandıklarına dair herhangi bir ifadeye rastlanmamıştır. Öte yandan, yirmi bir modelleme rotasında matematiksel sonuç aşamasına ulaşılamayan sadece bir modelleme rotası tespit edilmiştir. Hemen hemen tüm gruplar doğru ya da yanlış bir matematiksel sonuca ulaşmış ve hepsi çözüm süreçlerinde matematiksel hesaplamalar yapmıştır. Bununla birlikte, bazı gruplar matematiksel hesaplamalar için çok fazla zaman harcamış, bazıları işlemlerde takılmış bazıları ise problemleri çözerken hesaplamalarda hata yapmıştır. Dolayısıyla matematiksel modellemenin birden fazla aşamadan oluşan bütüncül yapısını takip etmekte zorlanmışlardır.

MÖA'nın çözüm süreçlerini görünür kılan modelleme rotaları düzenli-tamamlanmış, düzensiz-tamamlanmış ve düzensiz-tamamlanmamış olmak üzere üç kategoride değerlendirilmiştir. Düzenli-tamamlanmış formdaki tek modelleme rotasına sahip olan G2, tek denemede tüm aşamalara geçiş yaparak, Saman Balyası Probleminin çözümünde ideal modelleme döngüsüne benzer bir yol izlemiştir. Modelleme rotalarının çoğu düzensiz-tamamlanmış kategorisindedir. Ayrıca, üç problemden ortaya çıkan modelleme rotalarının yaklaşık üçte biri düzensiz-tamamlanmamış olarak sınıflandırılmıştır. Düzenli-tamamlanmamış modelleme rotası bulunmamaktadır. Özetle, grupların modelleme rotalarının hiyerarşik ve sıralı olmadığı görülmüştür. Modelleme döngüsünün bazı aşamalarına bir veya birden fazla kez geri dönüldüğü gözlemlenmiştir. Modelleme döngüsünün farklı aşamaları ideal döngüde olduğu gibi birbirini sırayla takip etmemiştir.

Tartışma

Bu çalışma, MÖA'nın modelleme döngüsü aşamalarına ilişkin deneyimlerini ve karşılaştıkları zorlukları ortaya çıkarmak ve üç modelleme probleminin çözüm süreçlerinde izledikleri modelleme rotalarının özelliklerini belirlemek amacıyla yapılmıştır.

MÖA'nın modelleme döngüsü basamaklarına ilişkin bulgular, G3 ve G6 dışındaki tüm grupların Borromeo Ferri'nin (2006) modelleme döngüsündeki tüm aşamalarını en az bir kez deneyimlediklerini göstermiştir. Grupların bir problemde gerçekleştirmedikleri aşamayı başka bir problemde gerçekleştirdikleri görülmüştür. Ayrıca, aynı problem için bir grubun başarıyla tamamladığı aşamayı başka bir grup tamamlayamamıştır. Bu sonuçlar, aynı problemin farklı kişilerde farklı modelleme aşamalarına ya da farklı problemlerin aynı kişide farklı modelleme aşamalarına hitap ettiğini göstermektedir. Başka bir deyişle, öğrenciler aynı problem için farklı çözümler uygulayabilmekte ve modelleme döngülerinde farklı aşamaları takip edebilmektedir. Böylece farklı sonuçlar elde edilebilmektedir. Nitekim Yakıt Probleminde (Türkiye) grupların farklı varsayımlara dayanarak farklı sonuçlar elde ettiği görülmüştür. Bu husus diğer problemler için de geçerlidir. Matematiksel modelleme problemlerindeki eksik bilgiler ve öğrencilere hazır bilgilerin verilmemesi varsayımlarda bulunmayı gerektirmektedir (Blum ve Leiß, 2007; Chang ve diğerleri, 2019). Maaß (2010) farklı varsayımların problemin çözüm yollarını ya da sonuçları çeşitlendireceğini belirtmiştir. Literatürde matematiksel modelleme problemlerinin doğası gereği farklı çözüm yolları ve matematiksel sonuçlar içerdiğine dikkat çekilmektedir (Bukova, Güzel, 2011; Diefes-Dux ve diğerleri, 2012; English ve Watters, 2004; Schukajlow ve diğerleri, 2015; Wessels, 2014). Literatürde var olan çalışmalara dayanarak, çalışmadan elde edilen sonuçların bu çalışmaların sonuçlarıyla uyumlu olduğu söylenebilir.

MÖA durumun zihinsel temsiline geçme, gerçek model oluşturma ve matematiksel çözüm sürecini yürüterek matematiksel sonuca ulaşma aşamalarını tamamlamışlardır. Durumun zihinsel temsiline geçiş aşaması olan problemi anlamlandırmada MÖA'nın başarılı oldukları söylenebilir. Öğretmen adaylarıyla yürütülen çalışmalarda benzer şekilde katılımcıların problemi anlama basamağında başarılı oldukları sonucuna ulaşılmıştır (Albayrak ve Tarım, 2022; Bukova Güzel, 2011; Çiltaş ve Işık, 2013; Duran ve diğerleri, 2016; Kaya ve Keşan, 2022; Şen Zeytun, 2013; Tekin Dede ve Yılmaz, 2013).

Tüm gruplar doğru olsun ya da olmasın matematiksel bir sonuç elde etmiş ve her problemde matematiksel hesaplamalar yapmıştır. Katılımcıların hiçbiri matematiksel modelleme konusunda deneyim sahibi değildir. MÖA'nın öyle ya da böyle matematiksel bir sonuca ulaşma eğilimi, tüm okul seviyelerini kapsayan sonuç odaklı eğitim sistemiyle ilgili olabilir. Türkiye'de hem lise hem de üniversite düzeyine geçmek için büyük ölçekli merkezi sınavlar uygulanmaktadır. Bu merkezi sınavlar klasik test kitaplarına benzer şekilde çoktan seçmeli kapalı uçlu sorulardan oluşmaktadır. Ayrıca, lisans düzeyinden sonra MÖA'nın devlet okullarında matematik öğretmeni olarak atanabilmeleri için merkezi bir sınavdan yeterli puan almaları gerekmektedir. Literatürdeki araştırmalar, standartlaştırılmış büyük ölçekli merkezi sınavların sonuç odaklı bir eğitim anlayışını tetiklediğini ve sınavlara yönelik teknik çalışmaların müfredattaki içeriğin yerini alma eğiliminde olduğunu göstermektedir (Etsey, 1997; Hess; 2002; Stecher, 2002). Bu nedenle, MÖA çözüm süreçlerinde matematiksel hesaplamalara ve sonuçlara aşırı odaklanabilmektedirler. Nitekim bazı gruplar matematiksel işlemlere aşırı zaman ayırdıkları için matematiksel modellemenin bütüncül yapısını fark edememişlerdir. Dolayısıyla matematiksel model oluşturma aşamasının atlanmasındaki etkenlerden biri de katılımcıların matematiksel hesaplamalara olan eğilimi olabilir.

Çalışmanın bir diğer önemli bulgusu yorumlama ve doğrulama aşamaları ile ilgilidir. Neredeyse tüm gruplar her üç problem için üç aşamayı da deneyimlemiş olsa da modelleme döngülerinde çoğunlukla matematiksel model oluşturma ve gerçek sonuçlara göre yorumlama ve ardından doğrulama aşamalarının eksik kaldığı görülmüştür. Bu durum, öğretmen adaylarının matematiksel model oluşturma, gerçek sonuçlara göre yorumlama ve doğrulama aşamalarında zorlandıklarının bir göstergesi olabilir. Döngüde matematiksel model oluşturma aşaması, verilen durumun temsillerinin kullanıldığı ve gerçeklikten matematiksel dünyaya geçişin sağlandığı kısımdır (Borromeo Ferri, 2006). Matematiksel modellemenin merkezinde yer alan bu aşama döngüdeki en zorlu aşamadır (Berry, 2002; Kaiser, 2005; Stillman, 2015). Benzer şekilde bazı çalışmalarda da öğretmen adaylarının matematiksel model oluşturma aşamasında zorlandıkları ortaya konmuştur (Albayrak ve Tarım, 2022; Çiltaş ve Işık, 2013; Deniz ve Akgün, 2018; Duran ve diğerleri, 2016; Eraslan, 2012; Shahbari ve Tabach, 2020; Şen Zeytun, 2013).

Modelleme döngüsündeki gerçek sonuç(lar) aşaması, matematiksel sonuç(lar)ın matematiksel olmayan bağlamlarda yorumlanmasını, daha geniş bağlamlara genellemeler yapılmasını ve matematiksel dil kullanılarak iletişim kurulmasını gerektirir (Blum ve Kaiser, 1997). Örneğin, G2 üyelerinin aralarında geçen diyalogdan, gerçek hayattan yola çıkarak "$104 + 104\sqrt{3}$ cm" olarak buldukları bir saman balyasının çapını 284 cm olarak kabul ettikleri anlaşılmaktadır. G3, G4, G5 ve G7'nin ise Saman Balyası probleminde elde ettikleri sonuçların gerçek hayatta hangi uzunluğa karşılık gelebileceğine dair herhangi bir yorumda bulunmamışlardır. Özellikle Yakıt Deposu Probleminde hiçbir grubun gerçek sonuç(lar) aşamasına geçiş yapmadıkları göze çarpmaktadır. Bu durum araştırmada kullanılan problemlerin yapısıyla ilgili olabilir. Araştırmada kullanılan ilk iki problem modelleme döngüsünü ortaya atan Borromeo Ferri'ye ait iken, Yakıt Deposu Problemi Tekin Dede ve Yılmaz (2013) tarafından model oluşturma etkinliği olarak tasarlanmıştır. Araştırmalar, öğretmen adaylarının matematiksel sonuçları gerçek hayata uyarlamakta zorlandıklarını ve farklı bağlamlara uyarlamakta yetersiz kaldıklarını benzer şekilde ortaya koymuştur (Blum, 2011; Bukova Güzel, 2011; Bukova Güzel ve Uğurel, 2010; Çiltaş ve Işık, 2013; Hıdıroğlu vd., 2018; Maaß, 2006; Şen Zeytun, 2013; Şen Zeytun ve diğerleri, 2017; Tekin Dede ve Yılmaz, 2013). Örneğin Çiltaş ve Işık (2013) öğretmen adaylarının matematiksel sonuçları gerçek hayata yorumlamada güçlük çektikleri sonucuna ulaşmışlardır. Benzer şekilde Bukova Güzel ve Uğurel (2010)'e ait çalışmada da öğretmen adaylarının genel anlamda matematiksel sonuçları gerçek yaşama uyarlamada sıkıntı yaşadıkları görülmüştür. Şen Zeytun vd. (2017) öğretmen adaylarının çoğu durumda ulaştıkları sonuçları gerçek hayat bağlamalarına yorumlamadıkları sonucuna ulaşmışlardır. Bukova Güzel (2011) öğretmen adaylarının modelleme sürecinde en fazla zorlandıkları aşamalardan birinin yorumlama kısmı olduğunu ifade etmiştir. Tekin Dede ve Yılmaz (2013) da öğretmen adaylarının buldukları matematiksel sonuçların gerçek hayatta ne alama geldiğini sorgulamadıkları sonucuna ulaşmışlardır.

Çalışmanın bulguları, öğretmen adaylarının doğrulama aşamasına geçişte matematiksel model oluşturma ve gerçek sonuçlara yorumlama aşamalarına göre daha başarılı olduklarını ortaya koymuştur. Blum ve Kaiser (1997) problem durumuna alternatif çözümler sunmak ve çözüm sürecini kontrol etmek olmak üzere iki tür doğrulamadan bahsetmiştir. Grup içi diyaloglardan da görüleceği üzere katılımcılar çözüm sürecini kontrol ederek doğrulamışlardır. Tekin Dede ve Yılmaz (2013) ve Yılmaz ve Tekin Dede'ye (2016) ait çalışmalarda da öğretmen adaylarının çözümlerini kontrol ederek doğrulama yaptıkları görülmüştür. Ancak bu çalışmadaki öğretmen adaylarının çözüm defterlerinde ve sonuç raporlarında alternatif çözümlerin yer almadığı tespit edilmiştir. Bu durum, problem durumuna farklı çözümler sunmanın değişime karşı oldukça dirençli olmasından kaynaklanmış olabilir (Aydın Güç ve Baki, 2019; Schukajlow ve diğerleri, 2015). Çünkü ilkokuldan itibaren klasik test kitabı problemlerinin çözümünde, merkezi sınavların da etkisiyle, öğrencilerde sonuca ulaştıktan sonra alternatif çözüm arama eğiliminin düşük olduğu söylenebilir. Bunun yanı sıra, MÖA 21 modelleme döngüsünün 16'sında çözümlerini kontrol ederek doğrulama aşamasının diğer türünü gerçekleştirmişlerdir. Bu sonuç, öğretmen adaylarının modelleme sürecinde doğrulama yapmadıkları veya doğrulama basamağında zorlandıkları sonuçlarına ulaşan Bukova Güzel (2011), Duran vd. (2016), Hıdıroğlu vd. (2018), Kaiser vd. (2010), Karahan ve Ergene (2023), Kaya ve Keşan (2022) ve Şen Zeytun'un (2013) çalışmalarıyla çelişmektedir. Şen Zeytun (2013) öğretmen adaylarının çoğunun buldukları sonucun doğruluğuna inandıkları için çözüme geri dönerek kontrol etme gereği duymadıkları sonucuna ulaşmıştır. Bu çalışmadaki öğretmen adaylarının aksine Bukova Güzel (2011), Duran vd. (2016) ve Kaiser vd.'ne (2010) ait çalışmalarda öğretmen adaylarının doğrulama süreçlerinde zorluk yaşadıkları belirtilmiştir. Çalışmadan elde edilen doğrulamaya ilişkin bu sonuç, araştırmada kullanılan çözüm izleme şablonundan kaynaklanmış olabilir. Çünkü şablonda yer alan bölümler, katılımcıların çözüm sürecinde neler yaptıklarını tekrar düşünmelerini ve çözüm sürecinde hangi aşamada olduklarının farkında olmalarını sağlamış olabilir. Schukajlow vd. (2015) çözüm sürecini takip etmek için geliştirdikleri problemi anlama, matematiği arama, matematiği kullanma ve sonuçları açıklama olmak üzere dört başlıktan oluşan benzer bir şablonun öğrencilerin organizasyon, detaylandırma, kontrol ve planlama stratejilerine katkı sağladığı sonucuna ulaşmışlardır. Öte yandan, modelleme döngüsünün en çok atlanan aşamalarıyla ilgili olarak, MÖA matematiksel model oluşturma aşamasında zorlandıklarını bildirmişlerdir. Ancak, şaşırtıcı bir şekilde, gerçek sonuçlara yorumlama ve doğrulama aşamalarını atlayan katılımcılar da dahil olmak üzere katılımcıların hiçbiri bu aşamalarda zorlandıklarını belirtmemişlerdir. Gerçek sonuçlara yorumlama aşamasına başarıyla ilerleyen MÖA göz önüne alındığında, herhangi bir zorluk belirtmemeleri tutarlı görünmektedir. Gerçek sonuçlara yorumlama aşamasına geçemeyen MÖA'nın bu aşama hakkında zorlandıklarına dair herhangi bir yorumda bulunmamalarının olası bir nedeni, herhangi bir zorluk yaşayıp yaşamadıklarının farkında olmamaları olabilir. Zbiek ve Conner (2006) öğrencilerin çözüm süreçlerinde matematiksel sonuçları gerçek sonuçlara yorumlamamalarını, öğrencilerin bunu bilinçaltı bir eylem olarak yapma ihtimaline bağlamıştır. Borromeo Ferri (2006) de modelleme döngüsündeki önemli aşamalardan biri olan gerçek sonuçlara yorumlama aşamasına geçişin her zaman bilinçli bir şekilde yapılmadığına dikkat çekmiştir. Benzer şekilde, bu çalışmadaki katılımcıların hiçbiri doğrulama aşamasında zorluk yaşadığını belirtmemiştir. Borromeo Ferri (2006)'ye göre çoğu birey matematiksel işlemleri doğrulama olarak algıladığı için "içsel-matematiksel doğrulama" yapmaktadır. Doğrulama ile ilgili bulgunun bir diğer nedeni de üst-bilişsel boyutla ilgili olabilir. Çünkü doğrulama, çözüm sürecinin izlenmesi ve düzenlenmesi anlamına geldiği için üst-biliş ile aynı zamanda gerçekleşmektedir (Schukajlow ve diğerleri, 2021). Sol vd. (2011) de doğrulama aşamasındaki başarısızlığın olası nedenlerinden birinin farkındalık eksikliği olabileceğini öne sürmektedir. Modelleme döngüsü boyunca ilerleyen MÖA ile doğrulama hakkındaki görüşleri arasındaki tutarsızlık, çözüm süreci ve elde edilen matematiksel sonuçlar hakkındaki "her şey yolunda" düşüncesine bağlanabilir. Bir kişi sonuçları "her şey yolunda" olarak kabul ederse modelleme döngüsünde ilerlemeye devam etmektedir (Czocher, 2018). Başka bir deyişle, çözüm sürecindeki kişiler Goos'un (2002) önceki aşamalara dönmeyi ve düzeltici eylemlerde bulunmayı gerektiren üst-bilişsel "kırmızı bayrak" durumlarını fark edememiştir. Yani çalışmada yer alan MÖA'nın gerçek sonuçlara yorumlama ve doğrulama aşamaları açısından üst-bilişsel boşlukları olabilir. Ancak bu sonuçlar bu çalışma için dikkatle yorumlanmalıdır.

Çalışmadaki MÖA'nın neredeyse tüm modelleme rotaları, katılımcıların sıralı ve hiyerarşik olarak ilerlememesi nedeniyle düzensiz olarak değerlendirilmiştir. Ayrıca, modelleme döngülerinin çoğunun tamamlandığı görülmüştür. Tamamlanmamış modelleme döngülerinin hiçbiri düzenli bir rotaya sahip değildir. Başka bir deyişle, çalışmada düzenli-tamamlanmamış rotalar ortaya çıkmamıştır. Bu sonuç, MÖA'nın çözüm sürecine ilişkin varsayımlarını revize etmek için modelleme döngüsünde tıkandıkları aşamalardan bir önceki aşamaya geri dönmeleri ile açıklanabilir. Bu geri dönüşler modelleme rotalarını düzensiz hale getirmektedir. Ayrıca, durumun zihinsel temsiline geçişi yapılandıramayan grupların, düzenli ya da düzensiz rotalar izleyerek döngünün diğer aşamalarına başarılı bir şekilde geçemedikleri gözlemlenmiştir (tüm problemlerde G3, Yakıt Deposu Probleminde G7). Problem durumlarına ilişkin varsayımların mantık çerçevesinde yapılmaması ve değişkenlerin belirlenememesi grupların diğer aşamalara geçişini engelleyebilmektedir. Örneğin, düzensiz-tamamlanmamış modelleme rotalarına sahip G3, resimdeki kişi yardımıyla saman balyasının yarıçapını bulmak için bir fikir geliştirmiş, matematiksel modeli "$4r\sqrt{3}+2r$" şeklinde kurgulamış ancak matematiksel model ile problem durumu arasında bir bağlantı kuramamıştır. Yakıt Probleminde (Türkiye), Türkiye ile Batum arasındaki sınırı geçmek ücretsiz olmasına rağmen, sınır geçiş ücretini de dahil ederek matematiksel sonuca “zarar” olarak ulaşan tek grup G3 olmuştur. Her iki problemde de G3 üyeleri problem durumunu eksik ya da yanlış yapılandırmıştır. Öte yandan, bazı grupların varsayım ve değişkenleri uygun şekilde tanımlayabilmek üzere durumun zihinsel temsili aşamasına geçmek için bir veya daha fazla deneme yapması gerekmiştir (Saman Balyası Probleminde G4 ve G6). Bu girişimler, modelleme rotalarını çözümün en başından itibaren sıralı ve hiyerarşik olmaktan uzaklaştırmıştır. Hıdıroğlu vd. (2018) modelleme sürecinde ileriki basamaklarda uygun yaklaşım sergilemek için önceki basamaklarda uygun yaklaşım sergilemeye gerek olmadığı sonucuna varmışlardır. Bu sonuca uygun olarak çalışmaya katılan öğretmen adaylarının durumun zihinsel temsili aşamasında uygun varsayımlarda bulunmasalar bile ileriki basamaklara ilişkin performans sergiledikleri görülmüştür. Ancak aynı durumun modelleme rotaları için geçerli olmadığı söylenebilir. Borromeo Ferri (2006), modelleme problemlerinde öğrencinin bazı tercihler yaptığını, bu tercihlere göre hareket ederek bazı aşamalara odaklanıp diğerlerini göz ardı edebildiğini, bazı aşamalarda fikrini değiştirebildiğini ve dolayısıyla sürecin sıralı olmadığını belirtmiştir. Bu nedenle modelleme rotaları Czocher'in (2016) kendi ifadesiyle "kendine özgü" hale gelmektedir. Bu bağlamda, çalışmanın sonuçları modelleme döngülerinin sıralı, hiyerarşik ve ardışık bir şekilde ilerlemediğini öne süren çalışmalarla uyumludur (Blum ve Borromeo Ferri, 2009; Blum ve Leiss, 2007; English ve diğerleri, 2016; Leiss ve diğerleri, 2019; Lesh ve Lehrer, 2003; Maaß, 2006).

Sonuç

Bu çalışmada katılımcıların modelleme problemlerin çözüm süreçlerinde hangi modelleme aşamalarını deneyimledikleri, hangi aşamaları göz ardı ettikleri, tekrarladıkları ya da geri döndükleri modelleme döngüsünde görünür hale gelmiştir. Her bir modelleme döngüsünde farklı rotalar izlenmiştir. Ortaya çıkan modelleme döngülerinden genel bir örüntü çıkarmanın zor olduğu söylenebilir. Çünkü katılımcılar modelleme süreçleri boyunca kendilerine özgü bir yol izlemektedir (Czocher, 2016). Ancak sonuçlar, modelleme döngüsünün gerçek sonuçlar ve doğrulama aşamalarını atlayan gruplar için üst-bilişsel bir boşluğa işaret etmektedir. MÖA gerçek sonuçlara yorumlama ve doğrulama aşamalarında zorluk çektiklerini bildirmemişlerdir. Bununla birlikte, literatürde işaret edilen matematiksel model oluşturma, gerçek sonuçlara yorumlama ve doğrulama aşamalarındaki zorlukların MÖA için geçerliliğini koruduğu sonucuna varılabilir. Bu aşamalarda yaşanan zorluklar diğer aşamaların atlanmasına yol açmakta ve modelleme rotalarını düzensiz hale getirmektedir. Modelleme döngüsünün tamamlanmasının önündeki engellerden biri de başlangıçtaki problem durumuna geri dönüş olarak ifade edilen doğrulama aşamasında karşılaşılan zorluktur. Bu açıdan farklı katılımcılarla, sonuçların yorumlanması ve doğrulama aşamaları ile birlikte üst-bilişsel süreçleri de dikkate alan çalışmalar yapılabilir. Bununla birlikte modelleme rotalarını etkileyen faktörler de gelecek çalışmalarda incelenebilir.

Sınırlılıklar

Çalışma, seçilen modelleme görevleri ile sınırlıdır. MÖA'nın belirli modelleme problemlerine ait çözüm süreçleri bu çalışmanın odak noktasıdır. Bu modelleme problemlerinin döngüler yardımıyla değerlendirilmesi amaçlanmıştır. Modelleme problemleri açık uçlu sorular olduğu için modelleme döngülerindeki rotalar farklı problemlerde değişiklik gösterebilir. Modelleme döngülerindeki rotalar, etkinliği düzenleyen kişinin ve MÖA'nın talepleri, kapasiteleri, müdahale tarzları ve deneyimleri gibi birçok faktöre bağlı olabilir.

Etik Kurul İzin Bilgisi: *Bu araştırma, Marmara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Araştırma ve Yayın Etik Kurulu'nun 11/11/2020 tarihli 2020-8-20 sayılı ve 2020/101 protokol numaralı kararı ile alınan izinle yürütülmüştür.*

Yazar Çıkar Çatışması Bilgisi: *Yazarların beyan edeceği bir çıkar çatışması yoktur.*

Yazar Katkısı: *Yazarlar çalışmaya eşit düzeyde katkı sağlamıştır.*

Kaynakça

Albayrak, H. B., & Tarım, K. (2022). Sınıf öğretmeni adaylarının matematiksel modelleme yeterlikleri: okulda zaman problemi. *Eğitimde Kuram ve Uygulama, 18*(2), 95-112. https://doi.org/10.17244/eku.1163414

Alwast, A., & Vorhölter, K. (2022). Measuring pre-service teachers' noticing competencies within a mathematical modeling context – an analysis of an instrument. *Educational Studies in Mathematics 109*, 263–285. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10102-8

Anhalt, C.O., & Cortez, R. (2016). Developing understanding of mathematical modeling in secondary teacher preparation. *J Math Teacher Educ, 19*, 523–545 https://doi.org/10.1007/s10857-015-9309-8

Ärlebäck, J.B., & Doerr, H.M. (2018). Students' interpretations and reasoning about phenomena with negative rates of change throughout a model development sequence. *ZDM Mathematics Education 50*, 187–200. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0881-5

Aydın Güç, F., & Baki, A. (2019). Evaluation of the learning environment designed to develop student mathematics teachers' mathematical modelling competencies. *Teaching Mathematics and its Applications:*

An International Journal of the IMA, 38(4), 191–215. https://doi.org/10.1093/teamat/hry002

Berry, J. (2002). Developing mathematical modelling skills: The role of CAS. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik-ZDM, 34*(5), 212-220.

Berry, J. S., & Houston, S. K. (1995). *Mathematical modelling.* Edward Arnold.

Blum, W. (2002). ICMI Study 14: Applications and modelling in mathematics education-Discussion document. *Educational Studies in Mathematics, 51*, 149-171.

Blum, W. (2011). Can modelling be taught and learnt? Some answers from empirical research. G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri & G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling* (pp. 15–30). Springer.

Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? In S. J. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 73–96). Springer.

Blum, W., & Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application, 1*(1) 45-58.

Blum, W., & Kaiser, G. (1997). *Vergleichende empirische Untersuchungen zu mathematischen Anwendungsfähigkeiten von englischen und deutschen Lernenden*. Unpublished application to Deutsche Forschungsgesellschaft.

Blum, W., & Leiß, D. (2007). How do students and teachers deal with modeling problems? C. Haines, P. Galbraith, W. Blum & S. Khan (Eds.), *Mathematical modeling (ICTMA 12): Education, engineering and economics* (pp. 222–231). Horwood Publishing.

Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik-ZDM, 38*(2), 86-95.

Borromeo Ferri, R. (2007). Personal experiences and extra-mathematical knowledge as an influence factor on modelling routes of pupils. Pitta-Pantazi, D & Philippou, G. (Ed.), *CERME 5 – Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 2080-2089.

Borromeo Ferri, R. (2010). On the influence of mathematical thinking styles on learners' modelling behavior. *Journal für Mathematik-Didaktik, 31*, 99–118. https://doi.org/10.1007/s13138-010-0009-8

Borromeo Ferri, R. (2011). Effective mathematical modelling without blockages - A commentary. G. Kaiser, W. Blum, R. B. Ferri ve G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling: The 14. ICMTA study içinde* (pp. 181–185). Springer.

Borromeo Ferri, R. (2018). *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education.* Springer.

Bukova Güzel, E. (2011). An examination of pre-service mathematics teachers'approaches to construct and solve mathematical modeling problems. *Teaching Mathematics and Its Applications, 30*(1), 19-36.

Chang, Y. P., Krawitz, J., Schukajlow, S., & Yang, K. L. (2019). Comparing German and Taiwanese secondary school students' knowledge in solving mathematical modelling tasks requiring their assumptions. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik-ZDM, 52*, 59-72. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01090-4

Çiltaş, A., & Işık, A. (2013). The effect of instruction through mathematical modelling on modelling skills of prospective elementary mathematics teachers. *Educational Sciences: Theory & Practice, 13*(2), 1187–1192.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K., (2007). *Research methods in education* (Sixth Edition). Routledge.

Creswell, J. W. (2009). *Research design: Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches* (Third edition). Sage.

Creswell J. W., & Miller D. L. (2000). Determining validity in qualitative inquiry. *Theory into Practice, 39*, 124-130.

Czocher, J. A. (2016). Introducing modeling activity diagrams as a tool to connect mathematical modeling to mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning, 18*(2), 77–106.

Czocher, J.A. (2018). How does validating activity contribute to the modeling process? *Educational Studies in Mathematics, 99*, 137–159. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9833-4

Deniz, D., & Akgün, L. (2016). Ortaöğretim matematik öğretmenlerinin model oluşturma etkinliği tasarım prensiplerine uygun etkinlik tasarlayabilme yeterlikleri. *Karaelmas Journal of Educational Sciences, 4*, 1-14.

Deniz, D., & Akgun, L. (2018). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel modelleme becerilerinin incelenmesi. *Akdeniz Eğitim Araştırmaları Dergisi, 12*(24), 294-312. https://doi.org/10.29329/mjer.2018.147.16

Diefes-Dux, H. A., Zawojewski, J. S., Hjalmarson, M. A., & Cardella, M. E. (2012). Aframework for analyzing feedback in a formative assessment system for mathematicalmodeling problems. *Journal of Engineering Education, 101*(2), 375–406. https://doi.org/10.1002/j.2168-9830.2012.tb00054.x

Doerr, H.M., Ärlebäck, J.B., & Misfeldt, M. (2017). Representations of modelling in mathematics education. In: Stillman, G., Blum, W., Kaiser, G. (eds) *Mathematical Modelling and Applications. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (pp. 71-81). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-62968-1_6

Doerr, H. M., & English, L. D. (2006). Middle grade teachers' learning through students' engagement with modeling tasks. *Journal of Mathematics*

Teacher Education, 9(1), 5–32. https://doi.org/10.1007/s10857-006-9004-x

Duran, M., Doruk, M., & Kaplan, A. (2016). Matematik öğretmeni adaylarının matematiksel modelleme süreçleri: Kaplumbağa paradoksu örneği. *Cumhuriyet Uluslararası Eğitim Dergisi, 5*(4), 55-71 . https://doi.org/10.30703/cije.321415

English, L. D., Ärlebäck, J. B., & Mousoulides, N. (2016). Reflections on progress in mathematical modelling research. A. Gutierrez, G. Leder & P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 383–413). Sense Publishers.

English, L. D., & Mousoulides, N. G. (2015). Bridging STEM in a real-world problem. *Mathematics Teaching in the Middle School, 20*(9), 532–539. https://doi.org/10.5951/mathteacmiddscho.20.9.0532

English, L., & Watters, J. (2004). Mathematical modeling in the early school years. *Mathematics Education Research Journal, 16*(3), 59–80.

Eraslan, A. (2012). Prospective elementary mathematics teachers' thought processes on a model eliciting activity. *Educational Sciences: Theory & Practice, 12*(4), 12-16.

Etsey, Y. K. (1997). Teachers' and administrators perspectives and use of standardized achievement tests: A review of published research. *Paper presented at the annual meeting of American Educational Research Center*, Chicago, IL.

Ferrando, I., & Albarracín, L. (2019). Students from grade 2 to grade 10 solving a Fermi problem: Analysis of emerging models. *Mathematics Education Research Journal, 33,* 61-78. https://doi.org/10.1007/s13394-019-00292-z

Gibbs, G. R. (2007). Analyzing qualitative data. U. Flick (Eds.), *The SAGE qualitative research kit* (pp. 100-108). Sage.

Goos, M. (2002). Understanding metacognitive failure. *Journal of Mathematical Behavior, 21*(3), 283–302.

Hess, F. M. (2002). Reform, resistance, … retreat? The predictable politics of accountability in Virginia. In D. Ravitch (Ed.), *Brookings papers on education policy* (pp. 69-122). Brookings Institution Press.

Hıdıroğlu, Ç. N., Özaltun Çelik, A., Kula Ünver, S., & Bukova Güzel, E. (2018). Matematik öğretmeni adaylarının teknoloji destekli matematiksel modelleme sürecindeki eylemleri: Uzaklık problemi. *Erzincan Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 20*(3), 782-809. https://doi.org/10.17556/erziefd.441732

Julie, C. (2020). Modelling competencies of school learners in the beginning and final year of secondary school mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 51*(8), 1181-1195. https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1725165

Kaiser, G. (2005). Mathematical modelling in school – Examples and experiences. Kaiser, G. & Henn, H.-W. (Eds.), *Mathematikunterricht im*

Spannungsfeld von Evaluation und Evolution (pp. 99-108). Franzbecker.

Kaiser, G. (2017). The Teaching and Learning of Mathematical Modeling. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 267–291). National Council of Teachers of Mathematics.

Kaiser, G., & Brand, S. (2015). Modelling competencies: Past development and further perspectives. G. Stillman, W. Blum & M. S. Biembengut (Eds.), *Mathematical modelling in education research and practice. Cultural, social and cognitive influences* (pp. 129–149). Springer.

Kaiser, G., Schwarz, B., & Tiedemann, S. (2010). Future teachers' professional knowledge on modeling. R. Lesh, P. L. Galbraith, C. R. Haines & A. Hurford (Eds.), *Modeling students' mathematical modeling competencies, ICTMA 13* (pp. 433–444). Springer.

Karahan, M., & Ergene, Ö. (2023). Bitkisel ürün sigortası modelleme etkinliği bağlamında matematik öğretmen adaylarının modelleme süreçlerinin incelenmesi. *Sakarya Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 23*(1), 1-22. https://doi.org/10.53629/sakaefd.1271618

Kaya, D. & Keşan, C. (2022). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel modelleme süreçleri: Su israfı örneği. *Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 19*(3), 1068-1097. https://doi.org/10.33711/yyuefd.1177845

Kaygısız, İ., & Şenel, E. A. (2023). Investigating mathematical modeling competencies of primary school students: Reflections from a model eliciting activity. *Journal of Pedagogical Research, 7*(1), 1-24. https://doi.org/10.33902/JPR.202317062

Leiss, D., Plath, J., & Schwippert, K. (2019). Language and mathematics - Key factors infuencing the comprehension process in reality based tasks. *Mathematical Thinking and Learning, 21*, 131–153. https://doi.org/10.1080/10986065.2019.1570835

Leong, R. K. E. (2012). Assessment of mathematical modeling. *Journal of Mathematics Education at Teachers College, 3*, 61–65.

Lesh, R., & Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modelling perspective on mathematics teaching, learning and problem solving. R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: models and modelling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching* (pp. 3-33). Lawrance Erlbaum Associates Publishers.

Lesh, R., & Lehrer, R. (2003). Models and modeling perspectives on the development of students and teachers. *Mathematical Thinking and Learning, 5*, 109–130. https://doi.org/10.1080/10986065.2003.9679996

Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *The International Journal on Mathematics Education, 38*(2), 113-142.

Maaß, K. (2007). Modelling in class: What do we want the students to learn? C. Haines, P. Galbraith, W. Blum & S. Khan (Ed.), *Mathematical modelling (ICTMA 12): Education, engineering and economics:*

Proceedings from the twelfth International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications (p. 63–78). Horwood.

Maaß, K. (2010). Classification scheme for modelling tasks. *Journal für Mathematik-Didaktik, 31,* 285-311.

McMillan, J., & Schumacher, S. (2014). *Research in education. Evidence-based inquiry* (Seventh edition). Pearson.

Miles, M, B., & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis: An expanded Sourcebook* (2nd ed). Sage.

MEB (Milli Eğitim Bakanlığı) (2018). *Mathematics Curriculum* (Elementary and Secondary School Year 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, and 8.*).* MEB.

NCTM (2000). *Principals and standards for school Mathematics.* Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics Pub.

Niss, M. (2010). Modeling a crucial aspect of students' mathematical modeling. R. Lesh, P. Galbraith, C. R. Haines & A. Hurford (Ed.), *Modeling students' mathematical competencies* (pp. 43-59). Springer.

Niss, M., & Blum,W. (2020). *The learning and teaching of mathematical modelling.* Routledge.

Patton, M. Q. (2002). *Qualitative research & evaluation methods* (3rd ed.). Sage.

Ramírez-Montes, G., Henriques, A., & Carreira, S. (2021). Undergraduate students' learning of linear algebra through mathematical modelling routes. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 21*, 357–377 (2021). https://doi.org/10.1007/s42330-021-00149-3

Schukajlow, S., Kaiser, G., & Stillman, G. (2021). Modeling from a cognitive perspective: theoretical considerations and empirical contributions. *Mathematical Thinking and Learning*. https://doi.org/10.1080/10986065.2021.2012631

Schukajlow, S., Kolter, J., & Blum, W. (2015). Scaffolding mathematical modelling with a solution plan. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik-ZDM, 47*(7), 1241–1254. https://doi.org/10.1007/s11858-015-0707-2

Schukajlow, S., Krug, A., & Rakoczy, K. (2015). Effects of prompting multiple solutions for modelling problems on students' performance. *Educational Studies in Mathematics, 89*(3), 393–417. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9608-0

Sevinc, S. ve Lesh, R. (2018). Training mathematics teachers for realistic math problems: a case of modeling-based teacher education courses. *ZDM Mathematics Education, 50*, 301–314. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0898-9

Shahbari, J. A., & Tabach, M. (2020). Features of modeling processes that elicit mathematical models represented at different semiotic registers.

Educational Studies in Mathematics, 105, 115–135. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09971-2

Simon, L. H., & Cox, D. C. (2019). The role of prototyping in mathematical design thinking. *The Journal of Mathematical Behavior, 56*, 100724. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2019.100724

Sol, M., Giménez, J., & Rosich, N. (2011). Project modelling routes in 12–16-year-old pupils. G. Kaiser, W. Blum, R. B. Ferri &G. Stillman (Ed.), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling (ICTMA 14)* (pp. 231–240). Springer.

Stecher, B. M. (2002). Consequences of large-scale, highstakestesting on schoolandclassroompractice. L. S. Hamilton, B. M. Stecher& S. P. Klein (Eds.), *Making sense of test-basedaccountability in education* (pp. 79-100). RAND Corporation.

Stillman, G.A. (2015). Applications and modelling research in secondary classrooms: What have we learnt?. Cho, S. (Eds.), *Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 791-805). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-17187-6_44

Stillman, G., Brown, J., & Galbraith, P. (2010). Identifying challenges within transition phases of mathematical modelling activities at year 9. Lesh, P. L. Galbraith, C. R. Haines & A. Hurford (Eds.), *Modelling students' mathematical modelling competencies ICTMA 13* (pp. 385–395). Springer.

Stillman, G., Galbraith, P., Brown, J., & Edwards, I. (2007). A framework for success in ımplementing mathematical modelling in the secondary classroom. J. Watson & K. Beswick (Eds.). *Mathematics: Essential research, essential practice* (pp. 691-700). Merga.

Stillman, G. A., Kaiser, G., Blum, W., & Brown, J. P. (2013). Mathematical modelling: Connecting to teaching and research practices–The impact of globalisation. G. A. Stillman, G. Kaiser, W. Blum & J. P. Brown (Ed.), *Teaching mathematical modelling: Connecting to research and practice* (pp. 1–24). Springer.

Stohlmann, M., & Yang, Y. (2021). Investigating the alignment to mathematical modelling of teacher-created mathematical modelling activities available online. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1961030

Şen Zeytun, A. (2013) *An Investigatıon of Prospective Teachers' Mathematical Modelling Processes And Their Views About Factors Affecting These Processes* [Yayımlanmamış doktora tezi, Ortadoğu Teknik Üniversitesi]. Ulusal Tez Merkezi.

Şen Zeytun, A., Cetinkaya, B., & Erbas, A. (2017). Understanding prospective teachers' mathematical modeling processes in the context of a mathematical modeling course. *Eurasia Journal of Mathematics,* *Science & Technology Education,* *13*(3), 691–722. https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.00639a

Taşpınar Şener, Z. (2017). *Ortaokul Matematik Öğretmen Adaylarının Tasarladıkları Model Oluşturma Etkinliklerinin İncelenmesi ve Bu Etkinliklerin Öğretim Sürecinde Kullanımlarına İlişkin Görüşleri* [Yayımlanmamış doktora tezi, Gazi Üniversitesi]. Ulusal Tez Merkezi.

Tekin Dede, A., & Yılmaz, S. (2013). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının modelleme yeterliliklerinin ıncelenmesi. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education, 4*(3), 185-206.

Türker Biber, D. B., & Yetkin Özdemir, İ. (2021). Matematiksel modelleme etkinlikleri bağlamında öğrenci düşünmelerine yönelik öğretmen farkındalığı ve fark etme stratejileri. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, (53)*, 521-554. https://doi.org/10.9779/pauefd.761629

Vorhölter, K. (2018). Conceptualization and measuring of metacognitive modelling competencies: Empirical verifcation of theoretical assumptions. *ZDM Mathematics Education,* *50*, 343–354. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0909-x

Wagner, T. (2008). Rigor redefined. *Educational Leadership, 66*(2), 20-24.

Weber, R. P. (1990). *Basic content analysis*. Sage.

Wessels, H. (2014). Levels of mathematical creativity in model-eliciting activities. *Journal of Mathematical Modelling and Application, 1*(9), 22-40.

Yenmez, A.A., & Erbas, A.K. (2022). Facilitating a Sustainable Transformation of Sociomathematical Norms Through Mathematical Modeling Activities. *International Journal of Science and Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s10763-022-10275-5

Yılmaz, S., & Tekin Dede, A. (2016). Mathematization competencies of pre-service elementary mathematics teachers in the mathematical modelling process. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology,* *4*(4), 284-298. https://doi.org/10.18404/ijemst.39145

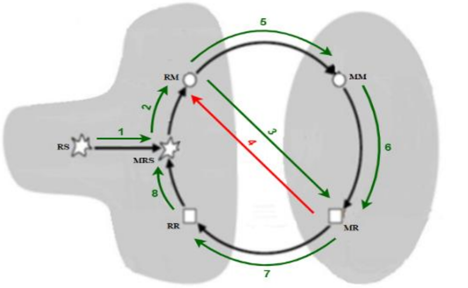
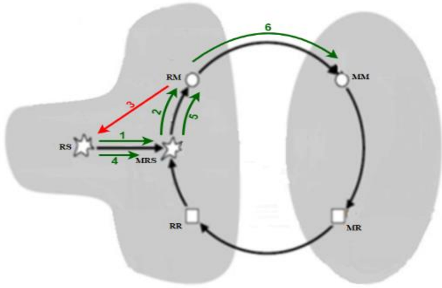
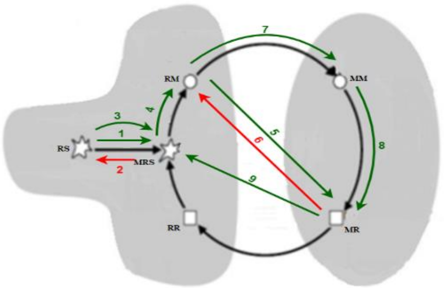
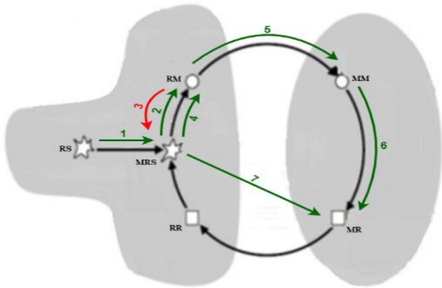
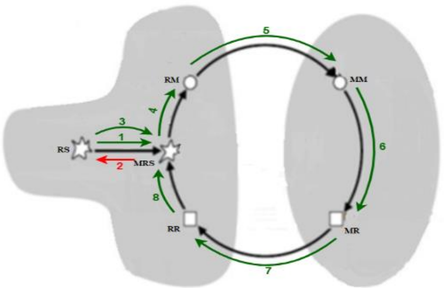
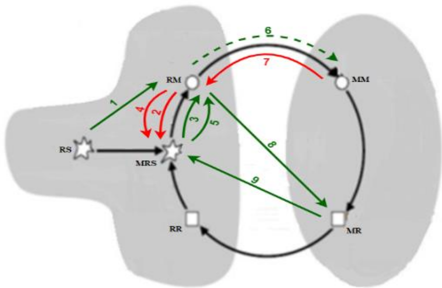
Zawojewski, J. (2010). Problem solving versus modeling. R. Lesh, P. Galbraith, C. R. Haines & A. Hurford (Ed.), *Modeling students' mathematical modeling competencies: ICTMA 13* (pp. 237-244). Springer.

Zbiek, R., M., & Conner, A. (2006). Beyond motivation: Exploring mathematical modeling as a context for deepening students' understandings of curricular mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 69*, 89-112.

Ekler

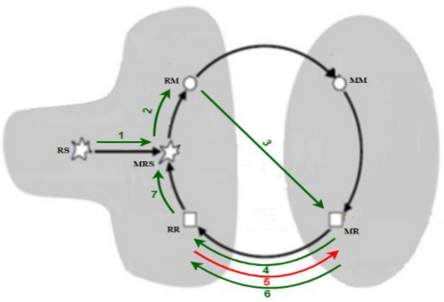
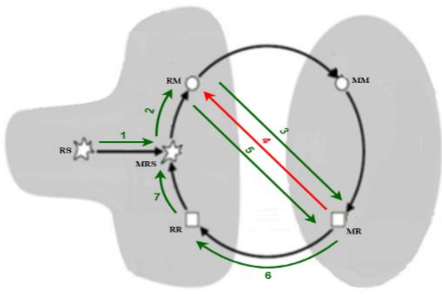
Tablo 8

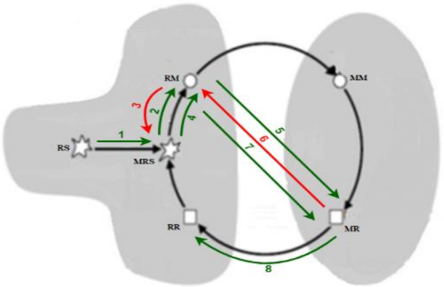
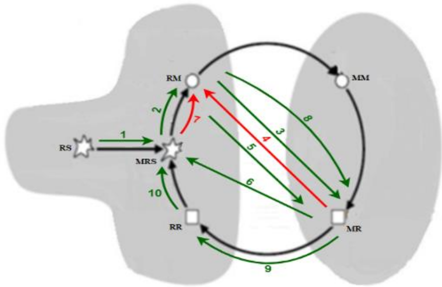
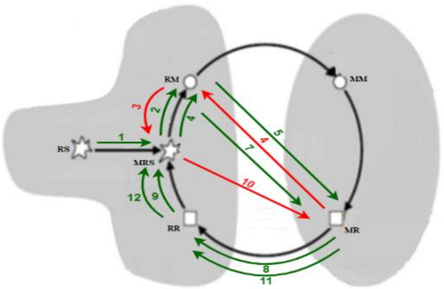
Grupların Saman Balyası Problemine Ait Modelleme Rotaları

Grup 1		Grup 3	
			
MM: $4r\sqrt{3}+2r$	MS: 776 cm (5 sıra)	MM: $4r\sqrt{3}+2r$	MS: Yok (3 sıra)
Grup 4		**Grup 5**	
			
MM: $4r\sqrt{3}+2r$	MS: $232\sqrt{3}+116$ cm (5 sıra)	MM: $2r\sqrt{3}+2r$	MS: $150\sqrt{3}+150$ cm (3 sıra)
Grup 6		**Grup 7**	
			
MM: $5r+r\sqrt{6}$	MS: 321,8 cm (4 sıra)	MM: Yok	MS: 323,89 cm (5 sıra)

Tablo 9

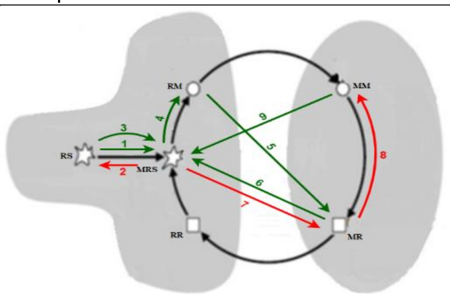
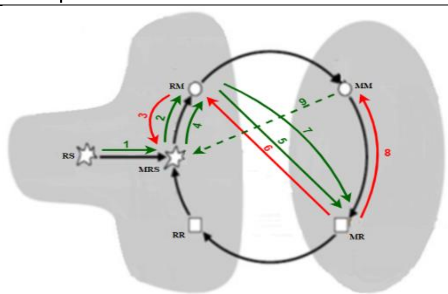
Grupların Yakıt Problemine (Türkiye) Ait Modelleme Rotaları

Grup 1	Grup 2
	

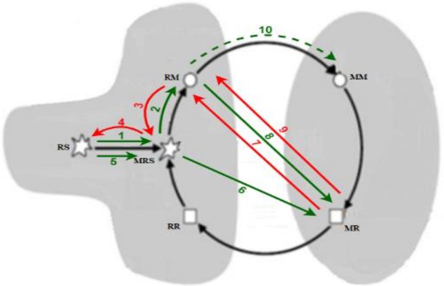
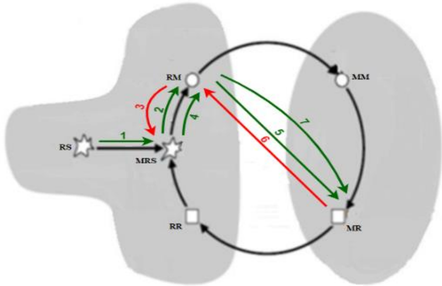
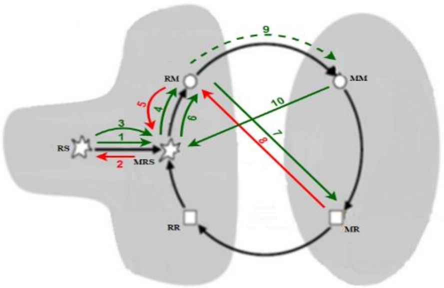
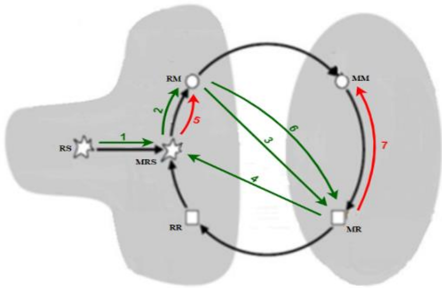
MM: Yok	MS: Hopa : +75,5 TL Artvin: +47,43 TL	MM: Yok	MS: Hopa : +29,84 TL Artvin: +4,96 TL
Grup 3		Grup 5	
			
MM: Yok	MS: Hopa : -23,92 TL Artvin: -37,14 TL	MM: Yok	MS: Hopa : +80,31 TL Artvin: +66,86 TL
Grup 7			
			
MM: Yok	MS: Hopa : +79,06 TL Artvin: +51,32 TL		

Tablo 10

Grupların Yakıt Deposu Problemine Ait Modelleme Rotaları

Grup 1		Grup 2	
			
MM: 5/3x	MS: 1 cm ıslaklık 1,7 l yakıt.	MM: y=x.1230/450	MS: 1 mm ıslaklık 1,73 km yol.
Grup 3		Grup 4	

 https://doi.org/10.9779/pauefd.1340106

<table>
<tr><td colspan="2">
</td><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td>MM: Yok</td><td>MS: Tankın boyutları = 40x50x40 cm</td><td>MM: Yok</td><td>MS: $20\sqrt{3}$ cm ıslaklık 37 l yakıt.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Grup 5</td><td colspan="2">Grup 6</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td>MM: Yok</td><td>MS: 1 cm ıslaklık 2 l yakıt.</td><td>MM: Liters= x.1,8180</td><td>MS: 1 cm ıslaklık 1,818 l yakıt.</td></tr>
</table>

PUJE, 63, 1-38 [2025] https://doi.org/10.9779/pauefd.1340106

Pamukkale University Journal of Education
ISSN: 1301-0085 e-ISSN: 1309-0275

Pre-service Mathematics Teachers' Mathematical Modeling Experiences: Modeling Cycle Phases, Challenges, and Modeling Routes*

Muhammet ŞAHAL[1], Ahmet Şükrü ÖZDEMİR[2]

Abstract

Mathematical modeling is one of the prominent research areas in mathematics education for solving complex real-life problems. This study aims to reveal the mathematical modeling phases performed by pre-service mathematics teachers, the phases they have difficulties, and the modeling routes they follow in modeling cycles. In this case study, twenty-one pre-service mathematics teachers worked in groups on three modeling problems. We obtained the data from student notebooks, solution tracking templates, and audio and video recordings. We analyzed them using content analysis and transferred them to the modeling cycle, allowing us to see "modeling routes". Most modeling routes were "irregular" and "completed." In the modeling routes, pre-service mathematics teachers were successful in terms of "mental representation of the situation", "creating the real model", and "mathematical result(s)". The most skipped phases in the modeling cycles were "creating a mathematical model," "interpreting the real results," and the "validation" phases. Furthermore, while they reported difficulties in "creating the mathematical model," none of the pre-service mathematics teachers reported in the "interpretation" and "validation" phases. The study results are expected to shed light on mathematical modeling applications in the education of pre-service teachers and contribute to the literature on the difficulties encountered.

Article Details
Research Article

Received 09/08/2023
Accepted 09/09/2024
Published 20/01/2025

Key words
Mathematical modeling, Modeling cycle, Modeling Routes, Pre-service math teacher, Mathematical modeling problems

** This study is a part of PhD dissertation of the first author conducted under the supervision of the second author and presented as an oral presentation at the 2nd International Science, Education, Art and Technology Symposium.*

1 Istanbul 29 Mayis University, 0000-0003-3625-2456, msahal@29mayis.edu.tr
2 Marmara University, 0000-0002-0597-3093, ahmet.ozdemir@marmara.edu.tr

Suggested Citation:
Şahal, M. & Özdemir, A.Ş. (2025). Pre-service mathematics teachers' mathematical modeling experiences: Modeling cycle phases, challenges, and modeling routes. *Pamukkale University Journal of Education*, 63, 1-38. https://doi.org/10.9779/pauefd.1340106

Introduction

Mathematics education prepares individuals to be critical thinkers and problem solvers, open to collaborative work, taking initiatives, communicating effectively, and implementing mathematical knowledge in diverse contexts. In the Turkisk K-12 mathematics curriculum, skills related to real life, such as being active through the learning process, being able to search for access to information, not taking presented knowledge just as it is, and connecting learned knowledge with real-world are also emphasized (Ministry of National Education [MoNE], 2018). Teaching activities should be designed with new and higher standards according to 21st-century skills (Wagner, 2008). Recent developments in mathematics education have increased the demand and attention to effective methods rather than traditional approaches. Moreover, it is suggested that students should engage in complex and open-ended tasks that allow them to apply high-level mathematical thinking (Doerr & English, 2006). In this respect, mathematical modeling comes to the fore as an essential tool for students to make connections between mathematics and real life, to use mathematical concepts and relationships in open-ended tasks, and to put forward and defend their ideas by discussing them in group work (Deniz & Akgun, 2016; Turker et al., 2021). The main idea underlying mathematical modeling is that there are transitions back and forth between mathematics and the complex real world (Borromeo Ferri, 2006). In addition, solving open-ended mathematical modeling problems through group work requires a certain level of mathematical content knowledge, mathematical thinking, and effective communication skills.

Mathematical Modeling

Mathematical modeling is crucial in students' daily lives and futures (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000). Most countries such as the United States, Australia, Germany, South Africa, Denmark, and Holland included mathematical modeling, which is advocated to be integrated into the curriculum (Ferrando & Albaraccín, 2019; Julie, 2020; Kaiser & Brand, 2015; Niss, 2010; Schukajlow et al., 2015; Stillman et al., 2013). Through mathematical modeling activities, students have the opportunity to express and defend thoughts, work collaboratively, investigate different ways of solutions, and justify results (English & Mousoulides, 2015; Simon & Cox, 2019; Stohlmann & Yang, 2021; Yenmez & Erbaş, 2022; Zawojewski, 2010). In this respect, mathematical modeling practices should occur more in school mathematics. However, it can be stated that modeling activities have not reached the desired level in mathematics classrooms (Blum, 2015; Kaygisiz & Senel, 2023).

Mathematical modeling is one of the outstanding research areas that establishes the relationships between real life and the mathematical world (Borromeo Ferri, 2006; 2018). Lesh and Doerr (2003) defined mathematical modeling as a process that starts with a real-life problem, in which the inferences from this problem are analyzed by being mathematized, the solution is interpreted into the real-life situation, and these phases can be rearranged. Mathematical modeling problems differ from classical textbook problems in that they are complex, open-ended tasks (Simon & Cox, 2019) that allow different assumptions (Blum, 2011; Stillman, 2015), multiple solutions, and multiple outcomes (Leong, 2012), and high-level thinking styles (Chang et al., 2019; Zawojewski, 2010). Mathematical modeling activities are demanding tasks for students and teachers (Blum, 2015).

Because mathematical modeling problems include different solution paths, students must be supported appropriately when facing incalculable difficulties (Alwast & Vorhölter, 2022). For this reason, mathematics teachers need to be supported in their undergraduate years to be competent in how modelers can be supported in various modeling phases (Wessels, 2014). Therefore, teacher education programs should be designed with settings that allow pre-service teachers to develop their content and pedagogical knowledge about modeling (Anhalt & Cortez, 2016). In addition, pre-service teachers should be prepared through classes that teach mathematical modeling tasks and opportunities to work independently in modeling processes (Maaß, 2007). Hence, Berry (2002) emphasized that anyone who will conduct mathematical modeling activities should first experience these processes. First-hand experiences, on the other hand, are crucial for metacognitive skills such as monitoring and organizing, which help overcome obstacles during the modeling phases (Vorhölter, 2018). In summary, experiencing pre-service teachers' mathematical modeling phases during their undergraduate years will contribute to developing their metacognitive skills. It will provide the opportunity to provide better guidance to their students.

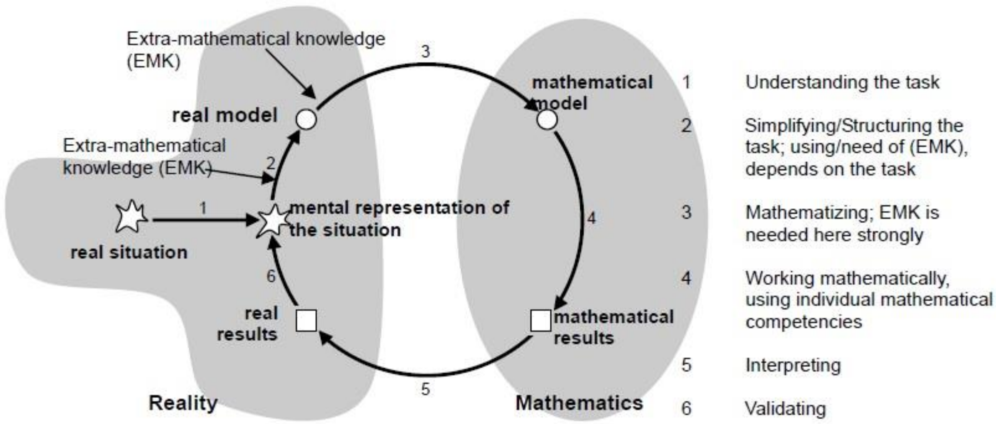
Theoretical Framework

Mathematical modeling is a complex process involving bidirectional transitions between the real world and mathematics (Borromeo Ferri, 2018; Blum, 2002). Various diagrams called "modeling cycles" have been proposed to describe and idealize mathematical modeling processes involving complex cognitive and metacognitive actions. Although there are distinctions between the modeling cycles suggested by different researchers in the literature, there is a consensus that modeling is a cyclical process, that there may be flexibility in transitions between the phases in the cycle, and that the phases that are passed through can be reviewed again (Borromeo

Ferri, 2006; 2011; Kaiser & Brand, 2015; Lesh & Doerr, 2003; Stillman et al., 2010). For instance, Borromeo Ferri (2018) describes the modeling cycles as versatile cognitive tools that provide a structure for describing and tracking the modeling process, including mathematical modeling competencies such as determining variables and relations, mathematization, interpreting, and validation. Borromeo Ferri's (2006) modeling cycle, presented in Figure 1, allows for a detailed examination of modelers' transitions in the mathematical modeling phases. Therefore, Borromeo Ferri's (2006) modeling cycle was used in the study to monitor and evaluate the modeling processes of pre-service teachers.

Figure 1

The Modeling Cycle of Borromeo Ferri (2006).



According to the modeling cycle put forward by Borromeo Ferri (2006), an individual dealing with a modeling problem goes through the phases of the real situation, mental representation of the situation (MRS), real model (RM), mathematical model (MM), mathematical result(s) (MR), real result(s) (RR), and then turns back to the mental representation of the situation and completes the process in the six phases. Extra mathematical knowledge (EMK) exists in the transition to the second and third phases. It is also possible to see the signs symbolizing that the real result and mental representation of the situation in the modeling cycle are in a complex form, that the situation in the real model and the mathematical model phase has started to have a more formal structure, and that real situation and mental representation of situation have become definite in mathematical result(s) and real result(s). A student acting in the modeling cycle is expected to make sense of the problem, simplify and configure the complex situation, make a transition to the mathematical world by expressing formally the variables and the relations between them, realize solutions, interpret the mathematical results obtained, and finally to validate (V) the process through assessment (Borromeo Ferri, 2018). Many researchers stated that the modeling process does not proceed sequentially and hierarchically as idealized (English et al., 2016; Eraslan, 2012; Leiss et al., 2019; Lesh & Lehrer, 2003; Maaß, 2006). Modeling cycles are both a cognitive tool and a practical assessment tool (Borromeo Ferri, 2018).

The Importance and Purpose of the Study

All modeling cycles converge, including problem definition, product development, testing, and editing (Simon & Cox, 2019). It has also been stated that these diagrams model cognitive processes and can be used as practical tools for different purposes, such as assessment and training materials (Borromeo Ferri, 2018; Lesh & Doerr, 2003). Because modeling problems do not follow a hierarchical way, the solving process starts with a draft and maturates by repeatedly reviewing and reorganizing this draft (Ärlebäck & Doerr, 2018; Lesh & Lehrer, 2003). Therefore, repeating various phases in the modeling cycle or returning to the phases several times can come into question until a satisfactory solution is reached. Borromeo Ferri (2007) used the “modeling route” concept to explain the individual modeling process that emerges according to the various phases of the modeling cycle. Cognitive modeling cycles represent the ideal solution to a modeling problem rather than explaining the route a real modeler can follow on the cycle (Niss & Blum, 2020). While there are theoretical and empirical studies on individual modeling routes in the literature (Blum & Borromeo Ferri, 2009; Borromeo Ferri, 2010; Doerr et al., 2017; Ramírez-Montes et al., 2021; Sol et al., 2011; Taspinar Sener, 2017), there are a few empirical researches focus on individual modeling routes of pre-service teachers. In addition, studies conducted with pre-service teachers examined whether appropriate approaches were performed and the difficulties experienced in the mathematical modeling phases (Albayrak & Tarim, 2022; Bukova Guzel, 2011; Deniz & Akgun, 2018; Duran et al., 2016; Hidiroglu et al., 2018; Karahan & Ergene, 2023; Kaya & Kesan, 2022; Tekin Dede & Yilmaz, 2013; Yilmaz & Tekin Dede, 2016). Sol et al. (2011) pointed out that more detailed empirical studies should be conducted with different participant groups regarding these regular modeling cycles.

It is stated that actual practices that affect professional development at the undergraduate level are much more beneficial than the training given during vacation periods or in limited programs after starting professional life (Sevinç ve Lesh, 2018; Stillman, 2015). Making visible the individual modeling routes differentiated by turnbacks and repetitive phases in the modeling cycle will contribute to mathematical modeling practices, especially in teacher education. For this reason, the study is expected to contribute to the issue of the phases at which pre-service mathematics teachers have difficulties in the solution process of mathematical modeling problems, as well as to shed light on both the practices in teacher education and the literature on how to use modeling cycles in terms of examining the modeling routes on the cycle. In this context, the study aims to examine the individual modeling routes of pre-service mathematics teachers in the solution processes of mathematical modeling problems within the scope of the mathematical modeling course, which mathematical modeling phases they experience on individual modeling routes, and to reveal which phases they have difficulty in. In line with this purpose, the following research questions were sought:

- Which modeling cycle phase(s) did the pre-service mathematics teachers (PSMTs) experience in modeling activities?
- Which phases of the modeling cycle did pre-service mathematics teachers (PSMTs) have difficulties?
- Which modeling routes emerged in the modeling cycles during pre-service mathematics teachers' (PSMTs') solution processes?

Method

Research Design

A case study, one of the qualitative research models, was adopted in this study. The case study is a research design in which the researcher conducts an in-depth investigation of a program, case, or activity in which one or more people are involved, in-depth (Creswell, 2009; s.13). In this study, the case study method was adopted because it enables an in-depth examination of the individual modeling routes that PSTs follow in the modeling cycle in their solution processes, the modeling phases they experience, and at which phases they have difficulties.

Participants

The research was conducted with 21 PSMTs studying at a state university in Turkey. The study was carried out in the fall semester of the 2019-2020 academic year. The participants in the current study were coded as PST1, PST2,..., and PST21, and groups formed voluntarily were coded as T1, T,2,..., and T7. None of the PSTs administered any course related to mathematical modeling, so they had no experience. The purposive sampling method was used to determine the study group. In the purposive sampling method, cases are selected that illuminate the research questions and allow for an in-depth and rich analysis in terms of information (Patton, 2002). Demographic information about the participants and the groups they were involved in during the study is presented in Table 1.

Table 1
Codes and Information of PSTs Participating in the Implementation

Kod (Cinsiyet)	Group
PST 4(F), PST 9(F), PST 20(F)	Group 1
PST 1(F), PST 11(F), PST 16(F)	Group 2
PST 8(F), PST 10(F), PST 18(F)	Group 3
PST 2(F), PST 13(F), PST 15(F)	Group 4
PST 5(F), PST 6(M), PST 12(F)	Group 5
PST 7(F), PST 14(M), PST 21(F)	Group 6
PST 3(F), PST 17(F), PST 19(F)	Group 7

F: Female, M: Male

Implementation

The implementation of the study is a part of long-term research. In a mathematical modeling course at the undergraduate level, participants were involved in a training process within the scope of a theoretical framework proposed by Borromeo Ferri (2018), which consists of five parts: “theory”, “practice”, “theory and practice”, “presentation”, and “evaluation”. The first researcher led the first part of the training process, which included theoretical instruction. The PSTs worked independently on modeling problems as part of a group formed voluntarily by them in the second part of the study, which is the implementation section following the theoretical section (see also Fig. 2). The researcher served as a guide during the implementation process and answered the questions from the participants. Answers to the questions from the PSTs were given with caution so that the solution did not follow a predetermined path. The researcher responded to questions from the participants that did not point to a specific solution or conclusion, such as "Have you considered all possibilities?" "Do you think you have accessed all the necessary information?", "How can you justify this assumption?", "Do you think the mathematical model you created represents the problem situation?". The participants' solution processes were videotaped, and each group's dialogues were audiotaped. PSTs were instructed not to erase false solutions or parts of the solution notebooks that needed to be changed. In the sections of pages that they wanted to change, they were asked to write notes like "abandoned" and "we have changed this part." The study's implementation phase lasted three weeks, during which PSMTs worked on different modeling problems each week. PSTs were not restricted to using calculators and the Internet to access the necessary information during the solution process of the modeling problems. The groups were given 60 minutes to solve the modeling problems, providing additional time to the groups that requested, and 45 minutes were allocated for a whole-class discussion after the solution process ended. In addition, after the implementation, the pre-service teachers were asked to write down the phase(s) of the modeling cycle with which they had the most difficulty and explain why.

Data Collection Tools

Since the modeling cycle of Borromeo Ferri (2006) was used in this study, the "Straw Bale Problem" (Borromeo Ferri, 2006) and the "Filling up Problem" (Blum & Borromeo Ferri, 2009) by the same researcher were selected. The "Fuel Tank Problem" by Tekin Dede and Yılmaz (2013) was selected for pre-service teachers to experience a model eliciting activity. Expert opinions were obtained for the inclusion of problems in the implementation.

Figure 2

Modeling Problems Used in the Study

The data on the solution process of the problems determined within the scope of the research was obtained from the notebooks of the PSTs, the solution tracking template, and the transcriptions of the dialogues between them. Groups wrote down the solutions to the modeling problems on solution notebooks. Furthermore, PSMTs were asked to report the ultimate solution paths and results as a group on a solution-tracking template. The solution tracking template in the study consists of six phases: expressing the real result, constructing the real model, constructing the mathematical model, mathematical solution process, mathematical result(s), and real result(s) compatible with the phases in the modeling cycle. PSTs received training on the phases in the modeling cycles in the theoretical part of the mathematical modeling course. Problem-solving processes were videotaped and audiotaped to reveal in-group dialogues. Data from solution notebooks, solution tracking templates, and audio and video recordings were transferred to Borromeo Ferri's (2006) modeling cycle to reveal modeling routes for each group. After the implementation, to reveal PSTs' thoughts about phases that they had difficulty with, they were asked to answer the following question in the open-ended questionnaire: *"Can you please indicate in detail which phase you have difficulty solving the modeling problems? Please also state the reason."*

Data Analysis

The data obtained from the solution processes of the modeling problems of the participants were analyzed using the content analysis method. Content analysis is a systematic and iterative technique in which data is transferred to lesser content categories according to a specific rule (Weber, 1990). It is used to express the effort to reduce and make sense of qualitative data to determine basic coherences and meanings by taking large amounts of qualitative material (Patton, 2002, p. 453). Before proceeding to the data coding and categorization process, the analysis units, the codes to be used in the analysis, and the categories to be created should be determined (Cohen et al., 2007). The data from the notebooks, solution tracking templates, and group dialogues were categorized as straight green, straight, red, and dashed, green, and red arrows and transferred to the transitions between phases in the modeling cycle. These categories were determined by the approach of Bukova Guzel (2011) to evaluate the phases in the modeling cycle of Borromeo Ferri (2006), which includes the categories of "full performance", "poor performance", "false performance" and "not performed" (p. 24). It is possible to understand which modeling phases are performed or not in the assessment approach of Bukova Guzel (2011). It is aimed to determine which phases are performed by using the numbered colored arrows in the modeling cycle, as well as to identify the returns in the cycle, iterative phases, and the route followed. In Bukova Guzel's classification (2011), "full performance" is represented by a straight arrow, "poor performance" and "false performance" is represented by a dashed arrow. Forward transitions in the modeling cycle are shown in green; returns are shown in red. The arrows are numbered to indicate which stage of the solution process they are in. In this way, it was aimed to see which cycles appeared in different participants for the same modeling problem, which modeling phases were performed during the solution process, or how the modeling cycles changed for the same participants in different problems. The categorization used to make the movements on the modeling cycle visible in the solution process is presented in Table 2.

Table 2
Classification Used in the Analysis of Participants' Transition to Phases in the Modeling Cycle

Categories	Forward transition	Backward transition
The transition between the phases was successful.	⟶	⟵
The transition between the phases occurred, but the requirements were not adequately performed or were performed incorrectly.	- - - →	← - - -
There was no transition between phases.	No arrow	No arrow

The modeling routes displayed by the arrows were categorized as “regular-completed”, “regular-uncompleted”, “irregular-completed”, and “irregular-uncompleted”. If the phases of the modeling cycle were completed respectively and hierarchically, the modeling route was evaluated as regular-completed; however, if the group performed backward transitions to particular phases or skipped some phases, the modeling route was evaluated as irregular. In addition, if the phases in the modeling cycle were completed during the solution process of the real situation problem and a return to the real situation was performed, the modeling route was considered complete; however, if the cyclic route was not formed due to difficulties at any phase, it was considered incomplete.

Following the data collection, audio recordings were transcribed while video recordings were watched simultaneously before proceeding to the data analysis. After the transcription processes, the first author reviewed the data obtained from solution notebooks, solution tracking templates, and transcriptions to identify possible transitions that groups go through the modeling cycle. These transitions were reorganized based on the categories in Table 2.

Validity and Reliability of the Study

In qualitative research, validity means checking the accuracy of the findings, and reliability means that the approaches used in the study are consistent with other researchers (Gibbs, 2007). Measuring participant confirmation, triangulation, direct quotation, elaboration, and expert opinion is necessary to ensure validity in qualitative studies. To ensure reliability, it is necessary to examine the compatibility between the evaluators and to explain the role of the researcher (Creswell & Miller, 2000; McMillan & Schumacher, 2014). In this respect, participant confirmation was carried out in the study, different data collection tools were used, direct quotations were made from the solutions and dialogues, and attempts were made to explain the role of the researcher and the practice process. In addition, the authors and an independent expert used an iterative and continuous process to reveal modeling routes. The first researcher determined 174 transitions on the modeling cycles belonging to three problems on which seven groups worked in the first phase. In the second phase, the second author and an independent expert on mathematical modeling checked 44 transitions on two randomly selected modeling cycles for each problem. Intercoder reliability was found to be %88.63 at this stage, which is considered adequate (Miles & Huberman, 1994). In the third phase, coders agreed on the groups' routes on the modeling cycles. Descriptive statistics about PSMTs' written responses about which phases they struggled with were presented.

Findings

Findings Related to the Modeling Cycle Phases Experienced by PSTs

The findings of completing the phases in the cycle for the modeling problems of the groups are presented in Table 3. It is seen that all groups except G3 and G7 performed all of the modeling phases in the cycle for the three problems.

Table 3

Phases which were left incomplete by PSTs in the Modeling Cycles

	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7
Straw Bale	✓	✓	MR, RR, V	RR	RR	✓	MM, RR
Filling up (Turkiye)	MM	MM	MM, V	✓	MM	MM	MM
Fuel Tank	RR	RR, V	MM, RR, V	MM, RR, V	MM, RR	RR	MM, RR, V

✓: The group completed all transitions on the modeling cycle.
MM: Mathematical Model, MR: Mathematical Result(s)RR: Real Result(s), V: Validation

It is seen that G1 completed the cycle in the Straw Bale Problem based on Table 3. However, it is seen that G1 had difficulties creating a mathematical model in the Filling Up (Turkey) and interpreting the real results in the Fuel Tank Problem. It is determined that G5 did not complete the phase of interpreting the real results in the Straw Bale Problem and the mathematical model phase in the Filling Up (Turkey). On the contrary, since the phases of interpreting the real results in the Filling Up (Turkey) and creating a mathematical model in the Straw Bale Problem were completed, it is understood that all phases were experienced at least once when the two mathematical modeling problems were considered together. Similarly, when all three mathematical modeling problems of G2, G4, and G6 are evaluated together, it is seen that they also experienced all the phases in the modeling cycle at least once. However, it was observed that G3 did not move into the validation process in any of the three mathematical modeling problems, and G7 did not create a mathematical model. On the other hand, the mathematical model and interpreting mathematical results to the real results phases were missing in 11 modeling cycles out of 21; the validating phase was missing in five modeling cycles out of 21, and the mathematical result phase was missing in one modeling cycle.

Findings Related to PSTs' Opinions on the Modeling Cycle Phases that They Have Difficulties with

Table 4 presents the opinions of PSTs on which mathematical modeling cycle phase they had difficulty in the solution processes of the three mathematical modeling problems.

Table 4

PSTs' Opinions on the Phases of the Modeling Cycle they have difficulty with

Phases of the modeling cycle	f
Mental representation of the situation	4
Real model	6
Mathematical model	10
Mathematical Result(s)	1
Real Result(s)	0
Validation	0
I had no difficulties	2

According to Table 4, the most challenging part of the process, which PSTs report, was creating a mathematical model after the implementation. They argued that they could not construct a mathematical model because mathematical modeling problems did not include geometric representations like figures and drawings, because they could not set up an equation or formula, or because they struggled to express mathematically. Following the construction of the mathematical model, it was revealed that there were difficulties in the mental representation of the situation and the real model phases. While PSTs claimed that difficulties in constructing the real model were related to reasons such as being in search of a geometrical representation or illustration or having poor drawing skills, they addressed the difficulty in understanding the problem as the reason for the difficulty in the mental representation of the situation. Even though they skipped these phases in the modeling cycles, no PSMTs reported difficulties in the real results and validating phases.

Findings Related to the Modeling Routes of PSTs

This section presents the categorization of the modeling cycles that show the solution processes of three mathematical modeling problems and instances from intra-group dialogues and PSTs' written solutions.

Findings Related to the Straw Bale Problem

Six groups (G1, G2, G4, G5, G6, G7) completed the modeling cycle in the Straw Bale Problem, whereas one group (G3) failed to complete the cycle by leaving the validation phase incomplete. Table 5 categorizes groups' modeling routes belonging to the Straw Bale Problem.

Table 5

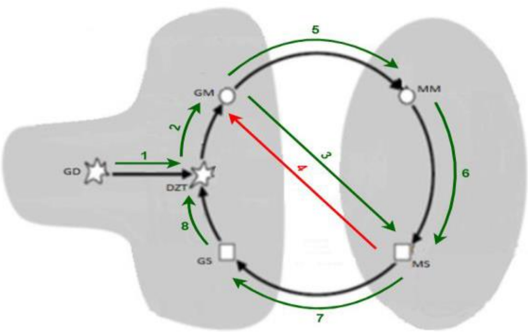
Modeling Routes of Groups for the Straw Bale Problem

	Completed	Uncompleted
Regular	G2,	-
Irregular	G1, G4, G5, G6, G7	G3

When the characteristics of modeling routes were examined, it was seen that only the modeling route of G2 was found to be in sequential form, as the modeling routes of other groups did not proceed hierarchically and respectively like the ideal one. Figure 3 shows G2's modeling route belonging to the Straw Bale Problem, the only modeling route in a completed and regular form.

Figure 3

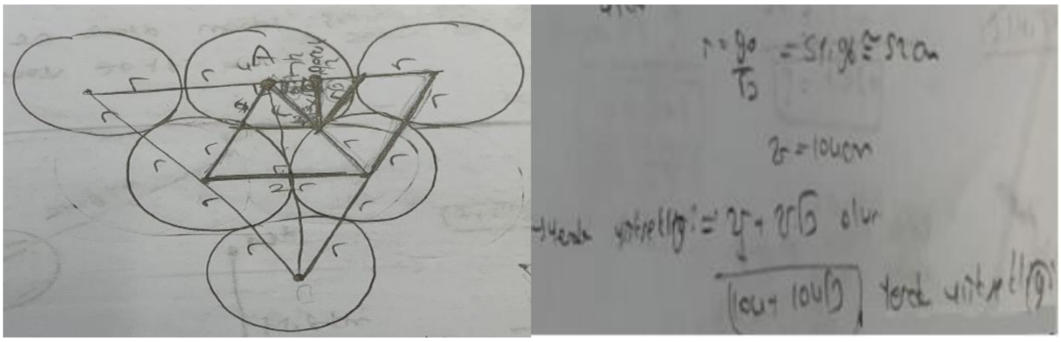
Modeling route of G2 belonging to the Straw Bale Problem



It is seen that the modeling route in Figure 3, which belongs to G2, proceeds as in the ideal modeling cycle. PSTs in G2 assumed they could reach the straw bale's radius by following the person's height in the picture. Then, they planned to calculate the height of the straw bale pile in the transition to the mental representation of the situation. They viewed straw bales, which they assumed to be three rows, as tangential circles and constructed the real model, which led them to the height by drawing on the location of the center of gravity of the triangle that they built, thereby adding the center of the circles. G2 reached the mathematical result by substituting 52 for r acting on the person's height in the mathematical model, which is constructed as "$2r\sqrt{3} + 2r$". After that, they completed the modeling cycle's real results phase by stating that the mathematical result equals 284cm. Finally, PSTs in G2 questioned the results by comparing the height of the person to the height of the straw bale pile. In 67 minutes, G2 completed the modeling cycle, which they followed sequentially and hierarchically.

Figure 4

The real model and the mathematical solution of the Straw Bale Problem of G2



In G2, the following dialogue took place between the participants in the validation phase:

PST16: The result that we have found is quite sensible. Because we found it with the help of the golden ratio. We calculated it from the woman's height. I do not think it is false.

PST1: We found the straw bales' height to be nearly 3 meters.

PST16: The average human height outpaces the straw bale's height. Because it is 104 cm.

PST1: We said a human height is half a straw bale. We found 284cm for the straw bales. We assumed the woman's height was 1.63m. I think we are right. I mean, when the woman stands up, she reaches approximately half of the straw bales' height, doesn't she?

PST16: Yes, she does.

PST11: How much did we find the radius?

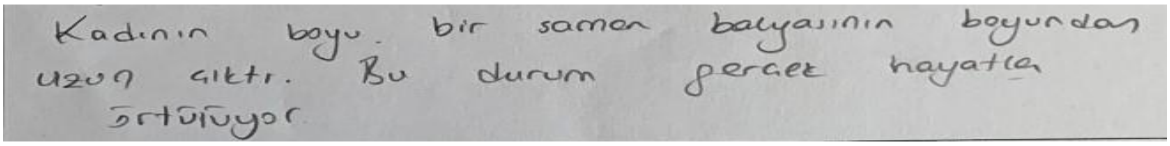
PST16: We found it 52 cm. If we consider a straw bale, its height is 104 cm. The woman's height is 1.63m also. In my opinion, one straw bale's *height does not overtake 1.63m. From my point of view, the result that we have found is making sense.*

PST1: So, the woman is taller than a straw bale.

PST16: It is over then.

Figure 5

G2's final report on the Straw Bale Problem


Kadının boyu. bir saman balyasının boyundan uzun çıktı. Bu durum gerçek hayatla örtüşüyor

(The woman was taller than a straw bale's height. This situation coincides with real life.)

Findings Related to the Filling Up Problem

Table 6 shows characteristics of modeling routes of groups that reflect the solving processes relating to the Filling Up (Turkiye) Problem. It was seen that six groups (G1, G2, G4, G5, G6, and G7) completed the modeling cycle, and one team (G3) failed to bring the solution process to an end.

Table 6

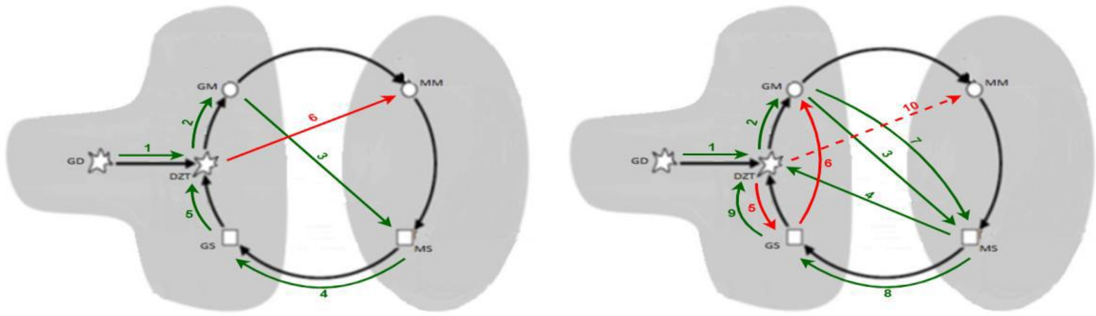
Modeling Routes of Groups for the Filling Up (Turkiye)

	Completed	Uncompleted
Regular	-	-
Irregular	G1, G2, G4, G5, G6, G7	G3

It was determined that the modeling routes of groups did not proceed sequentially, unlike the ideal modeling cycle. Groups skipped one or more phases or returned to some phases in the solution process several times. Based on the data (also see Table 3), it was discovered that Filling Up (Turkiye) is the problem in which the construction of the mathematical model phase was the most frequently skipped. After constructing the real model phase in the modeling cycles, all the groups engaged in mathematical operations to reach a mathematical result. Only G4 formed a mathematical model at the end of the solving process. G6 attempted to build a mathematical model based on their operations and the results they found, but they failed. The solution process was completed in about 50 minutes by G4 and G6. Figure 6 shows the modeling routes of G4 and G6.

Figure 6

Modeling routes of G4 (on the left) and G6 (on the right) Belonging to Filling Up (Turkiye) Problem



It can be seen that the modeling routes of G4 and G6 take an irregular path. It was determined that both groups understood the problem by proceeding to the situation's mental representation and making the required assumptions. The real models, which are appropriate for the problem, were built. They worked on some mathematical operations to obtain the result by skipping the construction of the mathematical model phase. G6, on the other hand, made a mistake by performing mathematical calculations using the "$departure\ cost + fillig\ up\ cost - arrival\ cost$" formula instead of the “$departure\ cost + fillig\ up\ cost + arrival\ cost$” formula. PST21, one of the G6 members, questioned why they subtract the arrival cost and warned friends, saying, “But we need to sum up all of them. There are three costs: departure, filling up, and arrival. We must include the arrival cost.” PST14 initially accepted that there was a logical error in the formula after that warning. However, PST7 and PST14 later persuaded PST21 that the cost of fuel spent on the way back should be subtracted since they had already spent the gasoline they bought. After PST21 was persuaded, they performed mathematical operations in compliance with the faulty formula and reached the mathematical result. Following the mathematical result, G6 got into the validation process and progressed to the real result in the fifth transition by examining whether or not their mathematical result made sense. At this stage, they decided that their result was reasonable. They reviewed the process again by applying similar operations to the second part of the problem. Finally, they tried to create a mathematical model but gave up because they could not build it. PST14 performed some calculations on the calculator, saying, “OK. Isn't that the liter I spent? If I multiply the gasoline price by the liter, I obtain my travel cost.” However, the calculator's result differed from theirs because they considered the average fuel consumption they accept for 100 km as the fuel consumed for 1 km. PST14 expressed his confusion, saying, “The profit makes sense, but why did it turn out that way?" Following that, they gave up on constructing the mathematical model. G4, on the other hand, followed a partially hierarchical route between the mathematical results and the validation phases. The participants in G4 questioned whether or not the results, which were found for two parts of the problem, were reasonable by comparing them. They concluded that the problem's results supported the idea that the greater the distance traveled to purchase gasoline, the less profit made. Finally, based on the solving processes, they created a mathematical model. They decided to form a cost allocation sheet (also see Fig. 7). During the construction of the mathematical model, G4 had the following discussion:

PST13: What are we going to write on the mathematical model?

PST2: What will we write on the graph, liter or gasoline?

PST15: For example, I created a graph like this. The liter of gasoline and price... However, how can we combine both? However, wait for a second! We calculated the price of one liter gasoline. So, there is no reason to do so. We can already find it by multiplying.

PST2: We can do... the table. Let us not graph this.

PST15: Yes.

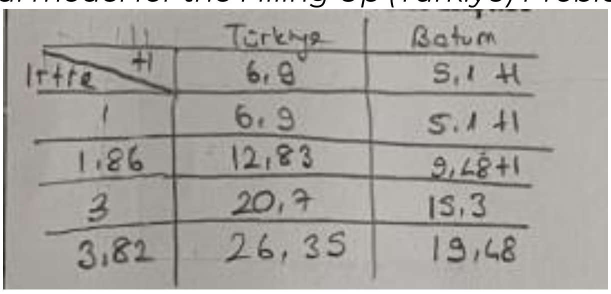
PST13: How are we going to make a table?

PST2: Let us do it this way. For example, in Turkey and Batumi...

PST13: We can write Turkey and Batumi. Here, we can write down the liter price of gasoline. This is how much it costs in Turkey and how much it costs in Batumi.

PST15: All right, that is it. Ok. 6.9 over here and 5.1 over here. We will give the liter here, in Turkey, and Batumi. For example, in this section, we will write 1,83 and explain TL (Turkish Lira). Alternatively, we can write down the previously calculated one. Okay, we will multiply liters by kilometers over there. Let this be the TL.

Figure 7
G4's mathematical model for the Filling Up (Turkiye) Problem



	Türkiye	Batum
litre / tl	6,9	5,1 tl
1	6,9	5,1 tl
1,86	12,83	9,48 tl
3	20,7	15,3
3,82	26,35	19,48

Findings Related to the Fuel Tank Problem

Table 7 presents features of groups' modeling routes in solving the Fuel Tank Problem. While three groups (G1, G5, and G6) were determined to complete the modeling cycle, it was revealed that four groups (G2, G3, G4, and G7) left the modeling cycle incomplete. Modeling routes of all groups involved in solving the Fuel Tank Problem were found to be irregular.

Table 7

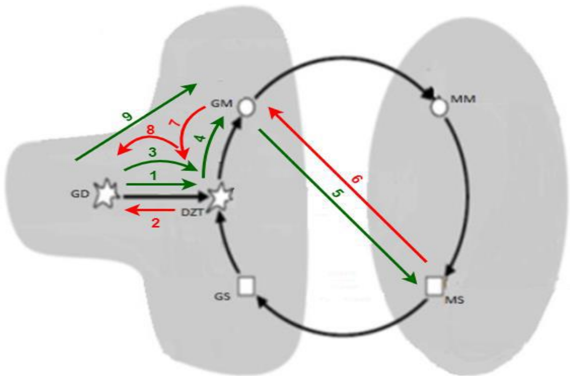
Modeling Routes of Groups for the Fuel Tank Problem

	Completed	Uncompleted
Regular	-	-
Irregular	G1, G5, G6	G2, G3, G4, G7

Table 3 shows that all groups skipped interpreting the mathematical result to the real results phase in the solution process. The participants did not interpret what the mathematical results might mean in real life at any phase of the solution process. In Figure 8, a modeling cycle, which is irregular and incomplete, is presented as an instance.

Figure 8

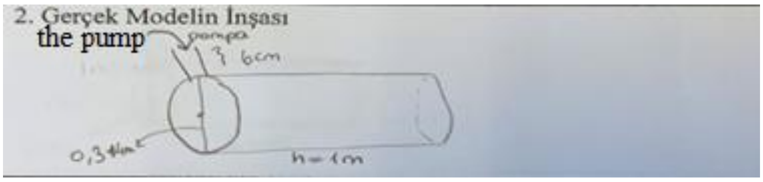
Modeling Route of G7 Belonging to the Fuel Tank Problem



In the modeling route of G7, shown in Figure 8, it is seen that the participants did not engage in constructing the mathematical model, interpreting the real results, and the validation processes. The PSTs in G7 spent significant time transitioning to the mental representation of the situation, as indicated by arrows 1, 2, and 3. (33 minutes). During the transition period, group members watched an online fuel tank dismantling video to learn more about fuel tanks. They went beyond the scope of the problem because they developed an idea to understand the fuel level by removing the fuel tank from the vehicle. They had lengthy discussions to comprehend the problem situation. After building the real model shown in Figure 9, team members turned their hands to mathematical calculations to determine the fuel tank size, which they assumed to be 74 liters.

Figure 9

The Real Model Of the Fuel Tank Problem of G7



In this phase, it was revealed that the PSTs had difficulties converting the volume units in liters and cubic meters, assumed the pi as 3 in contradiction to the reality principle, and made mistakes in some volume calculations. For example, PST17 claimed that the height of the cylinder is equal to the base's perimeter. Hence, PST19 warned her about the mistake.

PST17: Ok. We are getting closer. I feel it. Let us say r here and 2πr here. We wrote down mathematical properties that we know. Where do we switch now? Now, we are going to find the volume. How do we write the volume of this? Let us write down the volume of the cylinder.

PST3: $\pi r^2 h$*.*

PST17: I said 2πr for h.

PST19: I think we have a mistake here. Look.

PST3: No, no, it was the perimeter.

PST17: No, it is not wrong. It opens up.

PST19: It opens up, but this is not the part we call its perimeter.

PST17: Yes, it is.

PST19: No, it is not. When you open up this, it does not fit.

PST17: Ahh, all right! Mathematics is going under right now. Ok. We said $\pi r^2 h$*. How much does π come out? 0.074 cubic meters.*

PST3: Exactly.

PST17: Let's assume π is 3. Let's say 3 for π. Let's do 0,074 divided by 3. I say 0,0245. All right.

PST3: Okay, it's exactly 47 if you round it up.

Following that, group members changed their real model by assuming the fuel tank as a rectangular prism. However, they renounced again and proceeded according to the tank shape in Figure 10. After contending with the mathematical calculations for a while, they abandoned the solution. G7 did not show any attempt to find a link between the wetness of the stick and the amount of fuel in the tank. Solely, conversions between volume units and the mathematical calculations about the tank volume took place in their solution notebook, as shown in Figure 10. G7 spent more than 80 minutes on the solution.

PST17: I think we should give up.

PST3: I think so too.

PST17: I don't want to give up, but whatever.

PST19: What will we do?

PST17: We could not find anything so we won't write anything down. I mean, we will write "we could not find."

...

PST17: I am writing down that we could not build the real model.

PST19: I think we built the real model, but we could not construct the mathematical model.

PST17: Oh, no! Okay, that is fine. Let’s draw that figure.

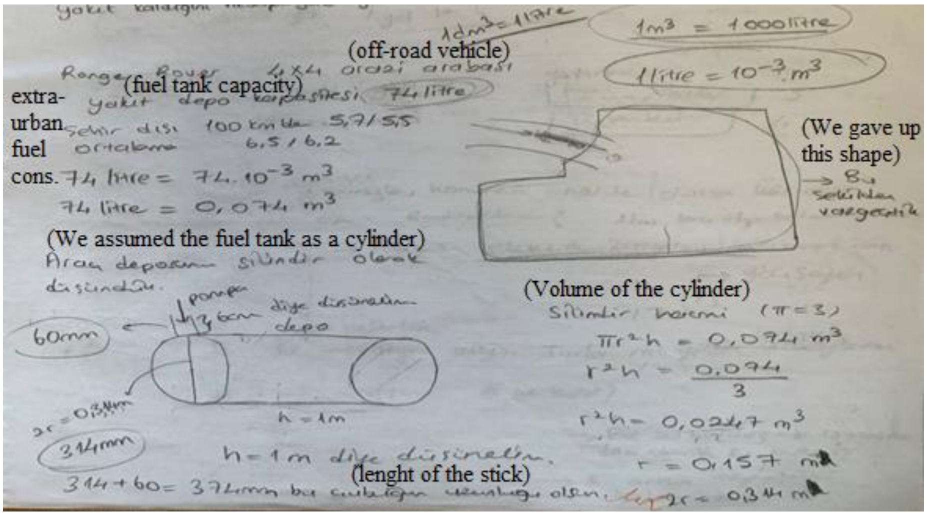
...

PST17: We could not create the mathematical model.

PST19: So, there is no mathematical result.

Figure 10

The Solution of G7’s Belonging to the Fuel Tank Problem



Summary of the Findings

Groups completed solutions for three problems ranging from 30 minutes to 80 minutes in general. While they spent less time in transition to the mental representation of the situation of the Straw Bale and Filling Up (Turkey) problems, PSTs made an effort to understand the problem situation almost half of the time that they spent solving the problem, in the Fuel Tank Problem. Data in Table 3 shows that the fuel tank problem mostly caused the phases in the modeling cycle in which groups dropped out.

The study's findings showed that the most skipped phases of the modeling cycle are creating a mathematical model, interpreting mathematical results to the real results, and validating parts. While PSTs reported some difficulties constructing a mathematical model, there was no expression in their written documents or conversations that they struggled with the interpretation and validation phases. On the other hand, only one modeling route was determined in 21 modeling routes, and the mathematical result phase was not reached. Almost all groups reached a mathematical result, true or false, and they all performed mathematical calculations during solution processes. Nonetheless, some teams spent a significant amount of time on the mathematical calculations; some got stuck in operations, whereas others made mistakes in the calculations while solving problems. Therefore, they had trouble monitoring the holistic structure of the mathematical modeling, which consisted of multiple phases.

The modeling routes that make PSTs' solution processes visible were evaluated in three categories: regular-completed, irregular-completed, and irregular-uncompleted. G2, which had the only modeling route in a regular-completed form, followed a path similar to the ideal modeling cycle in the solution of the Straw Bale Problem by transitioning to all phases in one try. The majority of the modeling routes were irregular-completed. In addition, nearly one-third of the modeling routes, which emerged from three problems, were classified as irregular-uncompleted. There are no modeling routes that are regular-uncompleted. In summary, the modeling routes of the groups were found to be nonhierarchical and non-sequential. It was observed that some phases of the modeling cycle were returned once or more than once. Different phases of the modeling cycle did not follow each other sequentially as in the ideal cycle.

Discussion

The present study aims to reveal PSTs' experiences with modeling cycle phases and the challenges they encounter and determine the characteristics of their modeling routes in the solving processes of three modeling problems.

The findings related to the first research question showed that all teams experienced all phases of Borromeo Ferri's (2006) modeling cycle at least one time except G3 and G6. It was seen that groups performed the phase another problem that they did not perform in any problem. Furthermore, for the same problem, another group may skip the phase that one group completed successfully. These results indicate that the same problem addresses different modeling phases in different people or different problems address different modeling phases in the same person. In other words, students can apply different solutions for the same problem and follow different phases in the modeling cycles. Thus, different results can be obtained. For example, in Filling Up (Turkiye), it was seen that the groups got different results based on different assumptions. This point was also valid for the results of other problems. Incomplete information in mathematical modeling problem situations and not providing detailed information to students necessitate making assumptions (Blum & Leiß, 2007; Chang et al., 2019). Maaß (2010) stated that the different assumptions will diversify the solution to the problem or the results. It has been pointed out in the literature that mathematical modeling problems inherently involve various solutions and mathematical results (Bukova Guzel, 2011; Diefes-Dux et al., 2012; English & Watters, 2004; Schukajlow et al., 2015; Wessels, 2014). Based on the studies in the literature, it can be said that the results obtained from the study are compatible with the results of the other studies in the literature.

The PSTs completed the moving into the mental representation of the situation, constructing the real model, and reaching the mathematical result by carrying out the mathematical solution process. It can be said that PSTs were successful in understanding the problem, which is the phase of transition to mental representation of the situation. Similarly, studies conducted with pre-service teachers concluded that the participants were successful in understanding the problem step (Albayrak & Tarim, 2022; Bukova Guzel, 2011; Ciltas & Isik, 2013; Duran et al., 2016; Kaya & Kesan, 2022; Sen Zeytun, 2013; Tekin Dede & Yilmaz, 2013).

All groups obtained a mathematical result, whether or not true, and performed mathematical calculations in any case. None of the participants had any experience with mathematical modeling. The tendency of the PSTs to reach a mathematical result one way or another may be related to the result-oriented education system, which involves all school levels. In Turkey, large-scale centralized exams are applied to advance high school and university levels. These central exams consist of multiple-choice closed-ended questions similar to the classic textbooks. Furthermore, PSTs must get enough scores from a centralized exam after the undergraduate level to be appointed mathematics teachers in state schools. Research in the literature showed that standardized large-scale central exams trigger a result-oriented education approach and that technical studies on exams tend to replace the content in the curriculum (Etsey, 1997; Hess; 2002; Stecher, 2002). Therefore, PSTs might excessively focus on mathematical calculations and results during solving. Some groups failed to notice the holistic structure of mathematical modeling due to excessive time spent on mathematical operations. Thus, one of the factors in skipping the creation of a mathematical model phase may be the tendency of participants to use mathematical calculations.

Another important finding of the study is related to the interpretation and validation phases. Although nearly all groups experienced all three phases for all three problems, it was seen that mostly the phase of creating a mathematical model and interpreting the real results and then the validation phases were missing in the modeling cycles. This may indicate that PSTs have difficulties in creating mathematical models, interpreting real results, and validating them. The creation of the mathematical model phase in the cycle is the part where the representations of the given situation are used, and the transition from reality to the mathematical world is provided (Borromeo Ferri, 2006). This phase, which is at the center of mathematical modeling, is the most challenging in the cycle (Berry, 2002; Kaiser, 2005; Stillman, 2015). Similarly, some studies revealed that PSTs have difficulties in creating a mathematical model phase (Albayrak & Tarim, 2022; Ciltas & Isik, 2013; Deniz & Akgun, 2018; Duran et al., 2016; Eraslan, 2012; Shahbari & Tabach, 2020; Sen Zeytun, 2013).

The real result(s) phase in the modeling cycle requires the interpretation of the mathematical result(s) into non-mathematical contexts, generalizing to larger contexts, and communication with the use of mathematical language (Blum & Kaiser, 1997). For example, it was understood from G2's dialogue that they acknowledged 284 cm as the one straw bale's diameter that they found as “$104 + 104\sqrt{3}$ cm” by interpreting based on real life. G3, G4, G5, and G7 did not make any interpretations about the length of the straw bale that might correspond to real life. Particularly in the Fuel Tank Problem, it is remarkable that none of the groups transitioned to the real result(s) phase. This may be related to the structure of the problems used in the study. While the Straw Bale and Filling Up (Turkiye) problems used in the study belong to Borromeo Ferri, who introduced the modeling cycle, the Fuel Tank Problem was designed by Tekin Dede and Yilmaz (2013) as a model eliciting activity. Studies revealed that PSTs have difficulties in interpreting the mathematical results into real life and are insufficient in adapting the difference to contexts (Blum, 2011; Bukova Guzel, 2011; Bukova Guzel & Ugurel, 2010; Ciltas & Isik, 2013; Hidiroglu et al., 2018; Maaß, 2006; Sen Zeytun, 2013; Sen Zeytun et al., 2017; Tekin Dede & Yilmaz, 2013). For instance, Ciltas and Isik (2013) concluded that pre-service teachers had difficulty interpreting real-life mathematical results. Similarly, Bukova Guzel and Ugurel (2010) found that pre-service teachers had difficulties adapting mathematical results to real life. Sen Zeytun et al. (2017) concluded that in most cases, pre-service teachers did not interpret their results in real-life contexts. Bukova Guzel (2011) stated that the interpretation phase is one of the most challenging stages in the modeling process. Tekin Dede and Yilmaz (2013) also concluded that pre-service teachers did not question the meaning of the mathematical results they found in real life.

The study's findings revealed that PSTs were more successful in transitioning to the validation phase than in the transition to creating mathematical models and interpreting the real result(s). Blum and Kaiser (1997) mentioned two types of validation: offering alternative solutions to the problem situation and controlling the solution process. As seen from the in-group dialogues, the participants validated the solution process by controlling it. Tekin Dede and Yilmaz (2013) and Yilmaz and Tekin Dede (2016) also found that pre-service teachers validated their results by controlling the solutions. However, it has been determined that there are no alternative solutions in the solution notebooks and result reports. This may be because offering different solutions to the problem is highly resistant to change (Aydin Guc & Baki, 2019; Schukajlow et al., 2015). Because of the effect of central exams, it can be said that the tendency of students to look for alternative solutions after reaching a solution has been low in solving classical textbook problems since primary school. Despite this, PSTs performed the validation phase in 16 modeling cycles out of 21 by controlling their solutions. This result contradicts the results of the studies of Bukova Guzel (2011), Duran et al. (2016), Hidiroglu et al. (2018), Kaiser et al. (2010), Karahan and Ergene (2023), Kaya and Kesan (2022), and Sen Zeytun (2013). Sen Zeytun (2013) concluded that most of the pre-service teachers did not feel the need to go back and check the solution because they believed that the result they found was correct. In contrast to the PSTs in this study, Bukova Guzel (2011), Duran et al., Doruk and Kaplan (2016), and Kaiser et al., Schwarz and Tiedemann (2010) reported that pre-service teachers had difficulties in the validation phase. This result may be due to the solution tracking template used in the research. The sections in the template may have allowed the participants to think again about what they did during the solution process and to be aware of what phase they were at in the solution process. Schukajlow et al. (2015) concluded that a similar template consisting of four titles: understanding the problem, searching for mathematics, using mathematics, and explaining the results, which they developed to track the solution process, contributed to the organization, elaboration, control, and planning strategies of the students. On the other hand, relating to the most skipped phases of the modeling cycle, PSTs reported difficulty creating the mathematical model. However, surprisingly, none of the participants reported difficulties in these stages, including those who skipped the interpretation to the real result(s) and validation phases. Given the PSTs who successfully proceeded with interpretation to the real result phase, it seems consistent that they did not state any difficulty. One possible reason PSTs could not proceed to interpretation and did not comment on this phase may be that they were unaware of whether they were experiencing any difficulties. Zbiek & Conner (2006) shed light on this situation by mentioning that the reason why modelers do not present the mathematical and real results in the solution processes can be doing these as a subconscious action. Borromeo Ferri (2006) also pointed out that the transition from the mathematical results to the real results, which is one of the critical phases in the modeling cycle, is not always done consciously. Similarly, none of the participants in this study reported having difficulty with the validation phase. According to Borromeo Ferri (2006), most individuals do "inner-mathematical validation" because they perceive mathematical operations as validation. Another reason for the finding concerning the validation might be related to the metacognitive aspect. Because the validation occurs at the same time as metacognition in that it means monitoring and organizing the solution process (Schukajlow et al., 2021). Sol et al. (2011) suggest that one of the possible reasons for the failure in the validation phase could be a lack of awareness. The inconsistency between PSTs moving through the modeling cycle and their opinions on the validation might be attributed to the "all is well" idea about the solution process and obtained mathematical results. If a modeler acknowledges outcomes as "all is well", he/she keeps proceeding in the modeling cycle (Czocher, 2018). In other words, modelers could not recognize Goos' (2002) metacognitive "red flag" situations, which required returning to previous phases and taking corrective actions. That is to say, PSTs who took part in the study might have metacognitive gaps in interpreting the real results and validation phases. However, these results need to be interpreted with caution for this study.

Almost all modeling routes of the PSTs in the study were evaluated as irregular since participants did not proceed sequentially and hierarchically. Furthermore, most of the modeling cycles were completed during the solution processes. None of the uncompleted modeling cycles had a regular route. That is, regular-uncompleted did not exist in the study. This result may be explained by PSTs' returns from phases that they are blocked to the previous phases in the modeling cycle to revise their acceptances relating to the solution process. These returns make the modeling routes irregular. In addition, it was observed that the groups, that couldn't structure the moving to the mental representation of the situation, were unable to pass through other phases of the cycle successfully by tracking regular or irregular routes (e.g. G3 in all problems, G7 in the Fuel Tank Problem). Failure to make assumptions concerning problem situations within reason and to identify variables might obstruct groups' transition to other phases. For instance, G3, which has irregular-uncompleted modeling routes, developed an idea to find the straw bale's radius with the help of the person in the picture, constructed the mathematical model as "$4r\sqrt{3}+2r$" but couldn't establish a connection between the mathematical model and the problem situation. Despite crossing the border between Turkey and Batumi being free, by including the crossing border fee, G3 was the only group that reached the mathematical result as loss unlike others in the Filling Up (Turkiye) Problem. In both problems, members of G3 structured the problem situation absently or improperly. In the meantime, some groups required one or more attempts to transition to the mental representation of the situation phase to identify assumptions and variables appropriately (e.g. G4 and G6 in the Straw Bale problem). These attempts distract the modeling routes from being sequential and hierarchical from the very beginning of the solution. Borromeo Ferri (2006) pointed out that in modeling problems, a modeler makes some choices, by acting according to these preferences, an individual can focus on some phases and ignore others, change his or her mind in some phases, and therefore the process is not sequential. For this reason, modeling routes become "idiosyncratic" as Czocher (2016) explained in her own words. In this regard, the results of the study are in line with the studies which suggest that modeling cycles do not proceed in a sequential, hierarchical, and sequential way (Blum & Borromeo Ferri, 2009; Blum & Leiss, 2007; English et al., 2016; Leiss et al., 2019; Lesh & Lehrer, 2003; Maaß, 2006).

Conclusion

In the current study, which modeling phases the participants performed in the solution processes of the problems and which phases they ignored, repeated, or returned to became visible in the modeling cycle. Various routes were followed in each modeling cycle. It can be stated that it is difficult to derive a general pattern from the emerging modeling cycles because modelers follow an idiosyncratic path through modeling processes (Czocher, 2016). The results, however, may indicate a metacognitive gap for groups that skip the modeling cycle's real results and validation phases. PSTs did not report that they had difficulty interpreting the real results and the validation phases. Nonetheless, we can conclude that challenges in creating the mathematical model, interpreting the real results, and the validation phases, as pointed out in the literature, remain relevant for PSTs. Difficulties in these phases lead to skipping other phases and irregular modeling routes. One of the obstacles to completing the modeling cycle is the difficulty encountered during the validation phase, which is expressed as a return to the problem situation at the beginning. In this respect, studies with different participants that take into consideration the interpretation of the results and the validation phases along with metacognitive processes can be done. In addition, the factors affecting the modeling routes can also be examined in future studies.

Limitations

Chosen modeling tasks limit the study. This study focused on the solution processes of specific modeling tasks of the PSTs. It is aimed to assess these modeling tasks with the help of cycles. Modeling cycles may vary in different tasks, as modeling tasks are open-ended questions. The routes in the modeling cycles may depend on many factors, such as the demands, capacities, intervention styles, and experiences of the organizer of the activity and the PSTs.

Ethics Committee Approval: *This research was conducted with the permission of the Marmara University Institute of Educational Sciences Research and Publication Ethics Committee with decision number 2020-8-20 and protocol number 2020/101 dated 11/11/2020.*

Conflict of Interest: *There is no conflict of interest between the authors.*

Author Contribution: *The authors contributed equally to the study.*

References

Albayrak, H. B., & Tarim, K. (2022). Mathematical modelling competencies of pre-service primary school teachers': The time at school. *Journal of Theory and Practice in Education,* *18*(2), 95-112. https://doi.org/10.17244/eku.1163414

Alwast, A., & Vorhölter, K. (2022). Measuring pre-service teachers' noticing competencies within a mathematical modeling context – an analysis of an instrument. *Educational Studies in Mathematics 109*, 263–285. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10102-8

Anhalt, C.O., & Cortez, R. (2016). Developing understanding of mathematical modeling in secondary teacher preparation. *J Math Teacher Educ, 19*, 523–545 https://doi.org/10.1007/s10857-015-9309-8

Ärlebäck, J.B., & Doerr, H.M. (2018). Students' interpretations and reasoning about phenomena with negative rates of change throughout a model development sequence. *ZDM Mathematics Education 50*, 187–200. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0881-5

Aydin Güc, F., & Baki, A. (2019). Evaluation of the learning environment designed to develop student mathematics teachers' mathematical modelling competencies. *Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA, 38*(4), 191–215. https://doi.org/10.1093/teamat/hry002

Berry, J. (2002). Developing mathematical modelling skills: the role of CAS. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik-ZDM, 34*(5), 212-220.

Berry, J. S., & Houston, S. K. (1995). *Mathematical modelling*. Edward Arnold.

Blum, W. (2002). ICMI Study 14: Applications and modelling in mathematics education-Discussion document. *Educational Studies in Mathematics, 51*, 149–171.

Blum, W. (2011). Can modelling be taught and learnt? Some answers from empirical research. G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri & G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling* (pp. 15–30). Springer.

Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? In S. J. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 73–96). Springer.

Blum, W., & Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application, 1*(1) 45-58.

Blum, W., & Kaiser, G. (1997). *Vergleichende empirische Untersuchungen zu mathematischen Anwendungsfähigkeiten von englischen und deutschen Lernenden*. Unpublished application to Deutsche Forschungsgesellschaft.

Blum, W., & Leiß, D. (2007). How do students and teachers deal with modeling problems? C. Haines, P. Galbraith, W. Blum & S. Khan (Eds.), *Mathematical modeling (ICTMA 12): Education, engineering and economics* (pp. 222–231). Horwood Publishing.

Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik-ZDM, 38*(2), 86-95.

Borromeo Ferri, R. (2007). Personal experiences and extra-mathematical knowledge as an influence factor on modelling routes of pupils. Pitta-Pantazi, D & Philippou, G. (Ed.), *CERME 5 – Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 2080-2089.

Borromeo Ferri, R. (2010). On the influence of mathematical thinking styles on learners' modelling behavior. *Journal für Mathematik-Didaktik, 31*, 99–118. https://doi.org/10.1007/s13138-010-0009-8

Borromeo Ferri, R. (2011). Effective mathematical modelling without blockages - A commentary. G. Kaiser, W. Blum, R. B. Ferri ve G. Stillman

(Eds.), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling: The 14. ICMTA study içinde* (pp. 181–185). Springer.

Borromeo Ferri, R. (2018). *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education*. Springer.

Bukova Guzel, E. (2011). An examination of pre-service mathematics teachers'approaches to construct and solve mathematical modeling problems. *Teaching Mathematics and Its Applications, 30*(1), 19-36.

Chang, Y. P., Krawitz, J., Schukajlow, S., & Yang, K. L. (2019). Comparing German and Taiwanese secondary school students' knowledge in solving mathematical modelling tasks requiring their assumptions. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik-ZDM, 52*, 59-72. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01090-4

Ciltas, A., & Isik, A. (2013). The effect of instruction through mathematical modelling on modelling skills of prospective elementary mathematics teachers. *Educational Sciences: Theory & Practice, 13*(2), 1187–1192.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K., (2007). *Research methods in education* (Sixth Edition). Routledge.

Creswell, J. W. (2009). *Research design: Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches* (Third edition). Sage.

Creswell J. W., & Miller D. L. (2000). Determining validity in qualitative inquiry. *Theory into Practice, 39*, 124–130.

Czocher, J. A. (2016). Introducing modeling activity diagrams as a tool to connect mathematical modeling to mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning, 18*(2), 77–106.

Czocher, J.A. (2018). How does validating activity contribute to the modeling process? *Educational Studies in Mathematics, 99*, 137–159. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9833-4

Deniz, D., & Akgun, L. (2016). The sufficiency of high school mathematics teachers' to design activities appropriate to model eliciting activities design principles. *Karaelmas Journal of Educational Sciences, 4*, 1-14.

Deniz, D., & Akgun, L. (2018). Investigation of prospective secondary mathematics teachers' mathematical modellling skills. *Mediterranean Journal of Educational Research, 12*(24), 294-312. https://doi.org/10.29329/mjer.2018.147.16

Diefes-Dux, H. A., Zawojewski, J. S., Hjalmarson, M. A., & Cardella, M. E. (2012). A framework for analyzing feedback in a formative assessment system for mathematical modeling problems. *Journal of Engineering Education, 101*(2), 375–406. https://doi.org/10.1002/j.2168-9830.2012.tb00054.x

Doerr, H.M., Ärlebäck, J.B., & Misfeldt, M. (2017). Representations of modelling in mathematics education. In: Stillman, G., Blum, W., Kaiser, G. (eds) *Mathematical Modelling and Applications. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (pp. 71-81). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-62968-1_6

Doerr, H. M., & English, L. D. (2006). Middle grade teachers' learning through students' engagement with modeling tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education, 9*(1), 5–32. https://doi.org/10.1007/s10857-006-9004-x

Duran, M., Doruk, M., & Kaplan, A. (2016). Mathematical Modeling Processes of Mathematics Teacher Candidates: The Example of Tortoise Paradox. *Cumhuriyet International Journal of Education, 5*(4), 55–71. https://doi.org/10.30703/cije.321415

English, L. D., Ärlebäck, J. B., & Mousoulides, N. (2016). Reflections on progress in mathematical modelling research. A. Gutierrez, G. Leder & P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 383–413). Sense Publishers.

English, L. D., & Mousoulides, N. G. (2015). Bridging STEM in a real-world problem. *Mathematics Teaching in the Middle School, 20*(9), 532–539. https://doi.org/10.5951/mathteacmiddscho.20.9.0532

English, L., & Watters, J. (2004). Mathematical modeling in the early school years. *Mathematics Education Research Journal, 16*(3), 59–80.

Eraslan, A. (2012). Prospective elementary mathematics teachers' thought processes on a model eliciting activity. *Educational Sciences: Theory & Practice, 12*(4), 12-16.

Etsey, Y. K. (1997). Teachers and administrators' perspectives and use of standardized achievement tests: A review of published research. *Paper presented at the annual meeting of American Educational Research Center*, Chicago, IL.

Ferrando, I., & Albarracín, L. (2019). Students from grade 2 to grade 10 solving a Fermi problem: Analysis of emerging models. *Mathematics Education Research Journal, 33,* 61-78. https://doi.org/10.1007/s13394-019-00292-z

Gibbs, G. R. (2007). Analyzing qualitative data. U. Flick (Eds.), *The SAGE qualitative research kit* (pp. 100–108). Sage.

Goos, M. (2002). Understanding metacognitive failure. *Journal of Mathematical Behavior, 21*(3), 283–302.

Hess, F. M. (2002). Reform, resistance, … retreat? The predictable politics of accountability in Virginia. In D. Ravitch (Ed.), *Brookings papers on education policy* (pp. 69–122). Brookings Institution Press.

Hidiroglu, C. N., Ozaltun Celik, A., Kula Unver, S., & Bukova Guzel, E. (2018). Prospective mathematics teachers' actions in technology-aided mathematical modeling process: distance problem. *Erzincan University Journal of Education Faculty, 20* (3), 782-809. https://doi.org/10.17556/erziefd.441732

Julie, C. (2020). Modelling competencies of school learners in the beginning and final year of secondary school mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 51*(8), 1181–1195. https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1725165

Kaiser, G. (2005). Mathematical modelling in school – Examples and experiences. Kaiser, G. & Henn, H.-W. (Eds.), *Mathematikunterricht im Spannungsfeld von Evaluation und Evolution* (pp. 99-108). Franzbecker.

Kaiser, G. (2017). The Teaching and Learning of Mathematical Modeling. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 267–291). National Council of Teachers of Mathematics.

Kaiser, G., & Brand, S. (2015). Modelling competencies: Past development and further perspectives. G. Stillman, W. Blum & M. S. Biembengut (Eds.), *Mathematical modelling in education research and practice. Cultural, social and cognitive influences* (pp. 129–149). Springer.

Kaiser, G., Schwarz, B., & Tiedemann, S. (2010). Future teachers' professional knowledge on modeling. R. Lesh, P. L. Galbraith, C. R. Haines & A. Hurford (Eds.), *Modeling students' mathematical modeling competencies, ICTMA 13* (pp. 433–444). Springer.

Karahan, M., & Ergene, O. (2023). Investigation of pre-service mathematics teachers' modeling processes in the context of crop ınsurance model-eliciting activity. *Sakarya University Journal of Education Faculty, 23*(1), 1-22. https://doi.org/10.53629/sakaefd.1271618

Kaya, D. & Kesan, C. (2022). Mathematical modelling processes of elementary mathematics teacher candidates: An example of waste of water. *Van Yüzüncü Yıl University Journal of Education, 19*(3), 1068-1097. https://doi.org/10.33711/yyuefd.1177845

Kaygisiz, I., & Senel, E. A. (2023). Investigating mathematical modeling competencies of primary school students: Reflections from a model eliciting activity. *Journal of Pedagogical Research, 7*(1), 1-24. https://doi.org/10.33902/JPR.202317062

Leiss, D., Plath, J., & Schwippert, K. (2019). Language and mathematics - Key factors influencing the comprehension process in reality-based tasks. *Mathematical Thinking and Learning, 21*, 131–153. https://doi.org/10.1080/10986065.2019.1570835

Leong, R. K. E. (2012). Assessment of mathematical modeling. *Journal of Mathematics Education at Teachers College, 3*, 61–65.

Lesh, R., & Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modelling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: models and modelling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching* (pp. 3–33). Lawrance Erlbaum Associates Publishers.

Lesh, R., & Lehrer, R. (2003). Models and modeling perspectives on the development of students and teachers. *Mathematical Thinking and Learning, 5*, 109–130. https://doi.org/10.1080/10986065.2003.9679996

Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *The International Journal on Mathematics Education, 38*(2), 113–142.

Maaß, K. (2007). Modelling in class: What do we want the students to learn? C. Haines, P. Galbraith, W. Blum & S. Khan (Ed.), *Mathematical modelling (ICTMA 12): Education, engineering, and economics: Proceedings from the twelfth International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications* (p. 63–78). Horwood.

Maaß, K. (2010). Classification scheme for modelling tasks. *Journal für Mathematik-Didaktik, 31,* 285-311.

McMillan, J., & Schumacher, S. (2014). *Research in education. Evidence-based inquiry* (Seventh edition). Pearson.

Miles, M, B., & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis: An expanded Sourcebook* (2nd ed). Sage.

MoNE (Ministry of National Education) (2018). *Mathematics Curriculum* (Elementary and Secondary School Year 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, and 8.). MEB.

NCTM (2000). *Principals and standards for school Mathematics.* Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics Pub.

Niss, M. (2010). Modeling a crucial aspect of students' mathematical modeling. R. Lesh, P. Galbraith, C. R. Haines & A. Hurford (Ed.), *Modeling students' mathematical competencies* (pp. 43–59). Springer.

Niss, M., & Blum, W. (2020). *The learning and teaching of mathematical modelling.* London & New York: Routledge.

Patton, M. Q. (2002). *Qualitative research & evaluation methods* (3rd ed.). Sage.

Ramírez-Montes, G., Henriques, A., & Carreira, S. (2021). Undergraduate students' learning of linear algebra through mathematical modelling routes. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 21*, 357–377 (2021). https://doi.org/10.1007/s42330-021-00149-3

Schukajlow, S., Kaiser, G., & Stillman, G. (2021). Modeling from a cognitive perspective: theoretical considerations and empirical contributions. *Mathematical Thinking and Learning*. https://doi.org/10.1080/10986065.2021.2012631

Schukajlow, S., Kolter, J., & Blum, W. (2015). Scaffolding mathematical modelling with a solution plan. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik-ZDM, 47*(7), 1241–1254. https://doi.org/10.1007/s11858-015-0707-2

Schukajlow, S., Krug, A., & Rakoczy, K. (2015). Effects of prompting multiple solutions for modelling problems on students' performance. *Educational Studies in Mathematics, 89*(3), 393–417. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9608-0

Sevinc, S. ve Lesh, R. (2018). Training mathematics teachers for realistic math problems: A case of modeling-based teacher education courses. *ZDM Mathematics Education, 50*, 301–314. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0898-9

Shahbari, J. A., & Tabach, M. (2020). Features of modeling processes that elicit mathematical models represented at different semiotic registers. *Educational Studies in Mathematics, 105*, 115–135. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09971-2

Simon, L. H., & Cox, D. C. (2019). The role of prototyping in mathematical design thinking. *The Journal of Mathematical Behavior, 56*, 100724. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2019.100724

Sol, M., Giménez, J., & Rosich, N. (2011). Project modelling routes in 12–16-year-old pupils. G. Kaiser, W. Blum, R. B. Ferri &G. Stillman (Ed.), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling (ICTMA 14)* (pp. 231–240). Springer.

Stecher, B. M. (2002). Consequences of large-scale, high stakes testing on school and classroom practice. L. S. Hamilton, B. M. Stecher& S. P. Klein (Eds.), *Making sense of test-based accountability in education* (pp. 79–100). RAND Corporation.

Stillman, G.A. (2015). Applications and modelling research in secondary classrooms: What have we learnt?. Cho, S. (Eds.), *Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 791–805). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-17187-6_44

Stillman, G., Brown, J., & Galbraith, P. (2010). Identifying challenges within transition phases of mathematical modelling activities at year 9. Lesh, P. L. Galbraith, C. R. Haines & A. Hurford (Eds.), *Modelling students' mathematical modelling competencies ICTMA 13* (pp. 385–395). Springer.

Stillman, G., Galbraith, P., Brown, J., & Edwards, I. (2007). A framework for success in implementing mathematical modelling in the secondary classroom. J. Watson & K. Beswick (Eds.). *Mathematics: Essential research, essential practice* (pp. 691–700). Merga.

Stillman, G. A., Kaiser, G., Blum, W., & Brown, J. P. (2013). Mathematical modelling: Connecting to teaching and research practices–The impact of globalisation. G. A. Stillman, G. Kaiser, W. Blum & J. P. Brown (Ed.), *Teaching mathematical modelling: Connecting to research and practice* (pp. 1–24). Springer.

Stohlmann, M., & Yang, Y. (2021). Investigating the alignment to mathematical modelling of teacher-created mathematical modelling activities available online. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1961030

Sen Zeytun, A. (2013). *An Investigatıon of Prospective Teachers' Mathematical Modelling Processes And Their Views About Factors Affecting These Processes* [Unpublished doctoral dissertation, Middle East Technical University]. National Theses Center.

Sen Zeytun, A., Cetinkaya, B., & Erbas, A. (2017). Understanding prospective teachers' mathematical modeling processes in the context of a mathematical modeling course. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education,* *13*(3), 691–722. https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.00639a

Taşpınar Şener, Z. (2017). *The Examination of Preservice Middle School Mathematics Teachers' Model Eliciting Activities and Their Opinions on the Use of These Activities in the Teaching Process* [Unpublished doctoral dissertation, Gazi University]. National Theses Center.

Tekin Dede, A., & Yilmaz, S. (2013). Examination of primary mathematics student teachers' modelling competencies. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education, 4*(3), 185-206.

Turker Biber, D. B., & Yetkin Ozdemir, I. (2021). Teacher's noticing and noticing strategies about student's thinking in the context of mathematical modeling activities. *Pamukkale University Journal of Education, (53)*, 521-554. https://doi.org/10.9779/pauefd.761629

Vorhölter, K. (2018). Conceptualization and measuring of metacognitive modeling competencies: Empirical verification of theoretical assumptions. *ZDM Mathematics Education, 50*, 343–354. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0909-x

Wagner, T. (2008). Rigor redefined. *Educational Leadership, 66*(2), 20–24.

Weber, R. P. (1990). *Basic content analysis*. Sage.

Wessels, H. (2014). Levels of mathematical creativity in model-eliciting activities. *Journal of Mathematical Modelling and Application, 1*(9), 22–40.

Yenmez, A.A., & Erbas, A.K. (2022). Facilitating a Sustainable Transformation of Sociomathematical Norms Through Mathematical Modeling Activities. *International Journal of Science and Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s10763-022-10275-5

Yilmaz, S., & Tekin Dede, A. (2016). Mathematization competencies of pre-service elementary mathematics teachers in the mathematical modelling process. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology,* 4(4), 284-298. https://doi.org/10.18404/ijemst.39145

Zawojewski, J. (2010). Problem solving versus modeling. R. Lesh, P. Galbraith, C. R. Haines & A. Hurford (Ed.), *Modeling students' mathematical modeling competencies: ICTMA 13* (pp. 237-244). Springer.

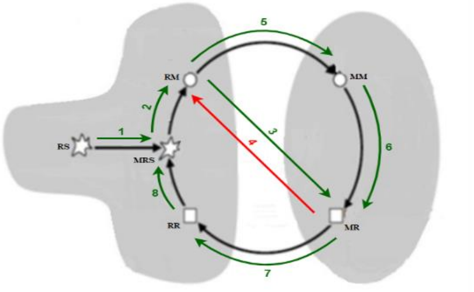
Zbiek, R., M., & Conner, A. (2006). Beyond motivation: Exploring mathematical modeling as a context for deepening students' understandings of curricular mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 69*, 89-112.

Appendices

Table 8

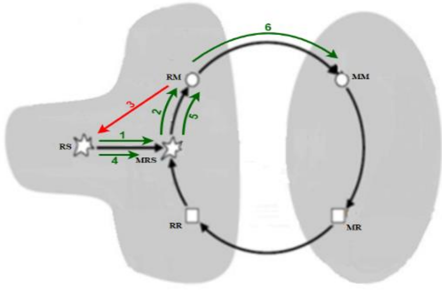
Modeling Routes of Groups for the Straw Bale Problem

Group 1



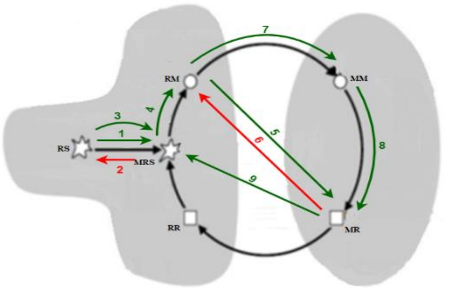
MM: $4r\sqrt{3}+2r$ MR: 776 cm (5 sıra)

Group 3



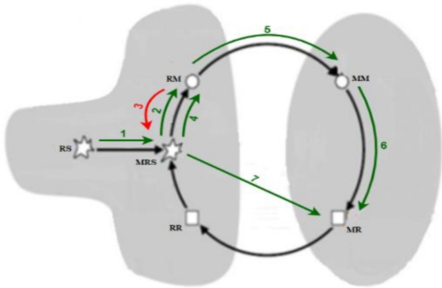
MM: $4r\sqrt{3}+2r$ MR: Yok (3 sıra)

Group 4



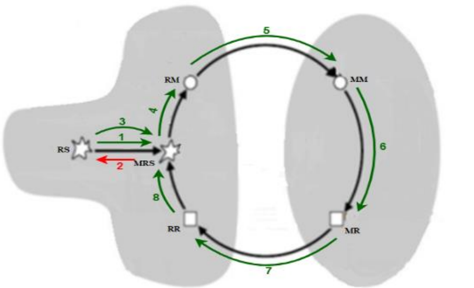
MM: $4r\sqrt{3}+2r$ MR: $232\sqrt{3}+116$ cm (5 rows)

Group 5



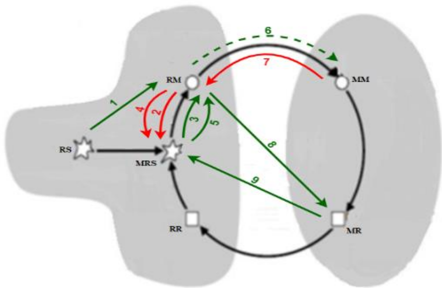
MM: $2r\sqrt{3}+2r$ MR: $150\sqrt{3}+150$ cm (3 rows)

Group 6



MM: $5r+r\sqrt{6}$ MR: 321,8 cm (4 sıra)

Group 7

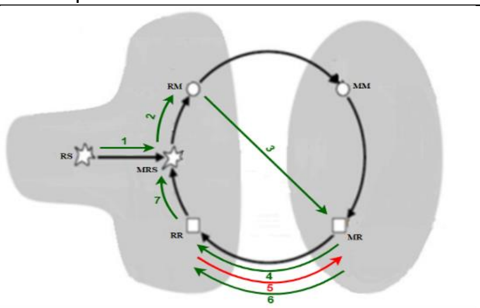


MM: Yok MR: 323,89 cm (5 rows)

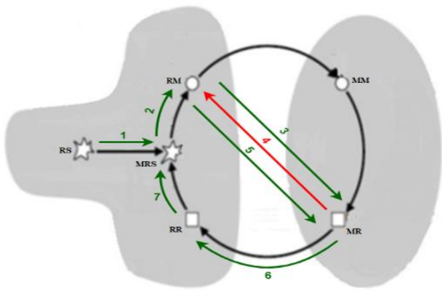
Table 9

Modeling Routes of Groups for the Filling Up (Turkiye)

Group 1



Group 2



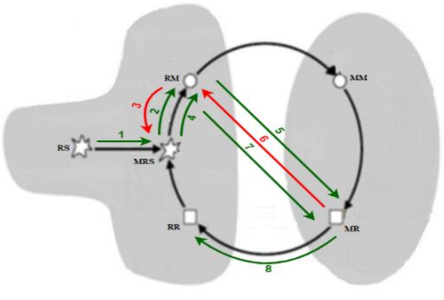
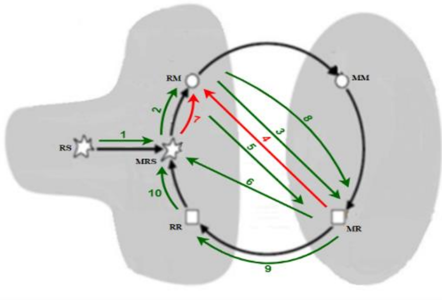
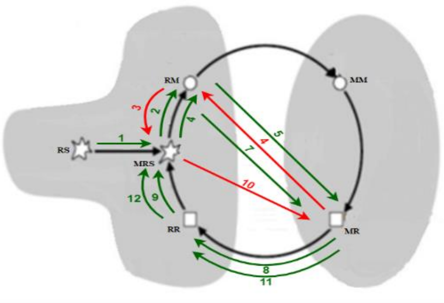
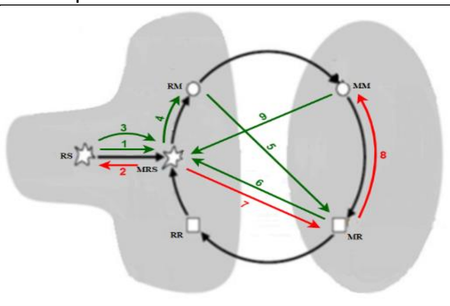
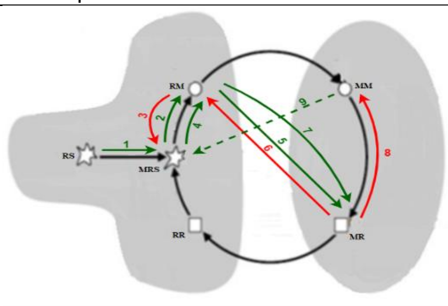
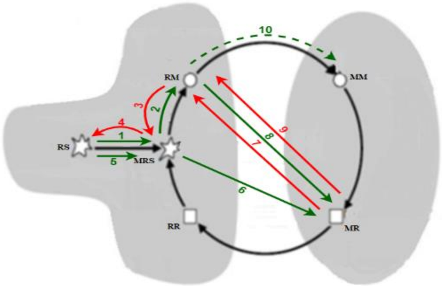
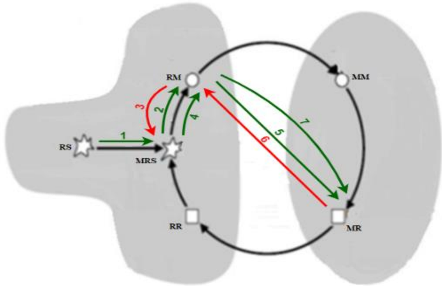
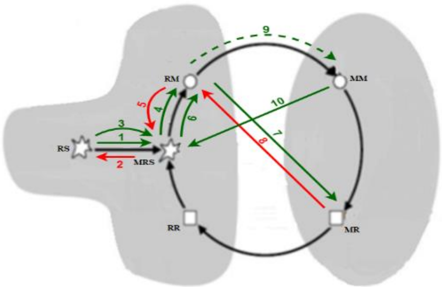
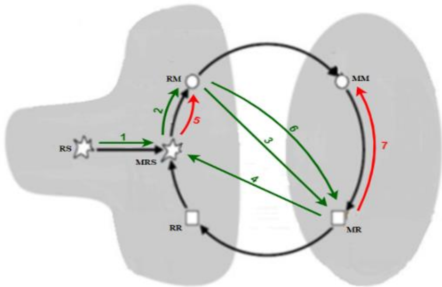
MM: Yok	MR: Hopa : +75,5 TL Artvin: +47,43 TL	MM: Yok	MR: Hopa : +29,84 TL Artvin: +4,96 TL
Group 3		Group 5	
			
MM: Yok	MR: Hopa : -23,92 TL Artvin: -37,14 TL	MM: Yok	MR: Hopa : +80,31 TL Artvin: +66,86 TL
Group 7			
			
MM: Yok	MR: Hopa : +79,06 TL Artvin: +51,32 TL		

Table 10

Modeling Routes of Groups for the Fuel Tank Problem

Group 1		Group 2	
			
MM: 5/3x	MR: 1 cm wetness 1,7 l fuel.	MM: y=x.1230/450	MR: 1 mm wetness 1,73 km road.
Group 3		Group 4	

			
MM: Yok	MR: Dimensions of the Tank = 40x50x40 cm	MM: Yok	MR: $20\sqrt{3}$ cm wetness 37 l fuel.
Group 5		Group 6	
			
MM: Yok	MR: 1 cm wetness 2 l fuel.	MM: Liters= x.1,8180	MS: 1 cm wetness 1,818 l fuel.