Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi
Afyon Kocatepe University – Journal of Science and Engineering
https://dergipark.org.tr/tr/pub/akufemubid

Araştırma Makalesi / Research Article
DOI: https://doi.org/10.35414/akufemubid.1343106
AKÜ FEMÜBİD **24** (2024) 021301 (260-265) AKU J. Sci. Eng. **24** (2024) 021301 (260-265)

Monoidlerin Bruck-Reilly Genişlemelerinin İkinci Tamsayı Homolojisi

Makale Bilgisi / Article Info
Alındı/Received: 15.08.2023
Kabul/Accepted: 07.03.2024
Yayımlandı/Published: 29.04.2024

On the Second Integral Homology of Bruck-Reilly Extensions of Monoids

Melek YAĞCI*

Sinop Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Sinop, Türkiye

Öz

M bir monoid ve θ, M üzerinde bir endomorfizm olsun. $\mathbb{N}^0$ negatif olmayan tamsayıların kümesi, $r = \max\{n,p\}$ ve θ^0, M üzerinde birim dönüşüm olmak üzere $\mathbb{N}^0 \times M \times \mathbb{N}^0$ kümesi

$$(m,a,n)(p,b,q) = (m-n+r,(a\theta^{r-n})\,(b\theta^{r-p}),q-p+r)$$

ikili işlemi ile birlikte bir monoid tanımlar. Bu monoide θ nin belirlediği M nin Bruck-Reilly genişlemesi denir ve $\mathrm{BR}(M,\theta)$ ile gösterilir. Bu çalışmada, bir sonlu M monoidinin Bruck-Reilly genişlemesinin ikinci tamsayı homolojisinin, öyle bir $k \in \mathbb{N}$ için

$$H_2(\mathrm{BR}(M,\theta)) = H_2(\mathrm{M}) \times \mathbb{Z}^k$$

olduğu gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: *Monoid; Bruck-Reilly Genişlemesi; İkinci Tamsayı Homolojisi; Takdim.*

Abstract

Let M be a monoid and let θ be an endomorphism on M. Then the set $\mathbb{N}^0 \times M \times \mathbb{N}^0$ where $\mathbb{N}^0$ is the set of non-negative integers, is a monoid together with the binary operation

$$(m,a,n)(p,b,q) = (m-n+r,(a\theta^{r-n})\,(b\theta^{r-p}),q-p+r)$$

where $r = \max\{n,p\}$ and θ^0 is the identity map on M, which is called the Bruck-Reilly extension of M determined by θ and denoted by $\mathrm{BR}(M,\theta)$. In this paper, we show that the second integral homology of Bruck-Reilly extension of a finite monoid M is

$$H_2(\mathrm{BR}(M,\theta)) = H_2(\mathrm{M}) \times \mathbb{Z}^k$$

for some $k \in \mathbb{N}$.

Keywords: *Monoid; Bruck-Reilly Extension; Second İntegral Homology; Presentation.*

1. Giriş

M bir monoid olmak üzere 1_M, M nin birim elemanı ve $\theta: M \to M$ bir endomorfizm olsun. $\mathbb{N}^0$ negatif olmayan tamsayıların kümesi, $r = \max\{n,p\}$ ve θ^0, M üzerinde birim dönüşüm olmak üzere $\mathbb{N}^0 \times M \times \mathbb{N}^0$ kümesi üzerinde tanımlanan

$$(m,a,n)(p,b,q) = (m-n+r,(a\theta^{r-n})\,(b\theta^{r-p}),$$
$$q-p+r)$$

ikili işlemi ile birim elemanı $(0,1_M,0)$ olan bir monoid olur. Bu monoide θ nin belirlediği M nin Bruck-Reilly genişlemesi denir ve $\mathrm{BR}(M,\theta)$ ile gösterilir. Carvalho (2005)'nın vurguladığı gibi bu yapı Bruck (1958), Reilly (1966) ve Munn (1970) yapılarının genelleştirilmiştir halidir.

Yarıgrup Teorisinde bir yarıgrubun (monoidin) bir sonlu yarıgrup (monoid) takdimini bulmak ve üstelik monoidlerin Bruck-Reilly genişlemelerinin özelliklerini incelemek önemli bir çalışma alanıdır ve literatürde uzun yıllardır çalışılır (örneğin, Araujo and Ruskuc 2001, Carvalho 2006, Carvalho 2007, Carvalho 2009, Karpuz 2015, Yamamura 2001).

Bir sonlu takdime sahip S yarıgrubunun yarıgrup noksanlığı $\mathrm{def}_S(S)$ ile gösterilir ve $\langle A|R\rangle, S$ nin bir sonlu yarıgrup takdimi olmak üzere

$$\mathrm{def}_S(S) = \min\{|R| - |A|\}$$

şeklinde tanımlıdır. Bir sonlu takdime sahip M monoidinin monoid noksanlığı $\mathrm{def}_M(M)$ ile gösterilir ve $\langle A|R\rangle, M$ nin bir sonlu monoid takdimi olmak üzere

$$\mathrm{def}_M(M) = \min\{|R| - |A|\}$$

*Sorumlu Yazar/Corresponding Author: Melek YAĞCI e-posta/e-mail: myagci@sinop.edu.tr

şeklinde tanımlıdır. Bir sonlu S yarıgrubu (M monoidi) için $\mathrm{def}_S(S) \geq 0$ $(\mathrm{def}_M(M) \geq 0)$ olduğu iyi bilinmektedir. Pride 1997 yılında, $H_2(M)$ M nin ikinci tamsayı homolojisi ve $\mathrm{rank}(U)$ da bir U yarıgrubunun (monoidinin) tüm yarıgrup (monoid) üreteç kümelerinin kardinalitesinin minimumu olmak üzere, bir sonlu M monoidi için

$$\mathrm{def}_M(M) \geq \mathrm{rank}(H_2(M))$$

olduğunu (yayınlanmamış) gösterdi. S^1, S ye gerekirse birim eleman eklenerek elde edilen monoid olmak üzere

$$\mathrm{def}_S(S) = \mathrm{def}_M(S^1) \geq \mathrm{rank}(H_2(S^1))$$

olduğu gösterilmştir (Ayık *et al*. 2000). S sonlu bir yarıgrup olmak üzere eğer $\mathrm{def}_S(S) = \mathrm{rank}(H_2(S^1))$ ise S ye etkin yarıgrup aksi takdirde etkin olmayan yarıgrup denir. Benzer şekilde, M sonlu bir monoid olmak üzere eğer $\mathrm{def}_M(M) = \mathrm{rank}(H_2(M))$ ise M ye etkin monoid aksi takdirde etkin olmayan monoid denir. Sonlu değişmeli grupların, n çift iken D_{2n} dihedral gruplarının ve sonlu dikdörtgensel bandların etkin yarıgruplar; fakat mertebesi en az 3 olan sonlu sıfır yarıgrupların ve $|A| \geq 2$ olan sonlu bir A kümesi üzerindeki sonlu serbest yarılatislerin etkin olmayan yarıgruplar olduğu gösterilmiştir (Ayık *et al*. 2000). S ve T sonlu monoidlerinin $S \lozenge T$, Schützenberger çarpımının ikinci tamsayı homolojisinin

$$H_2(S \lozenge T) = H_2(S) \times H_2(T) \times \left(H_1(S) \otimes_{\mathbb{Z}} H_1(T)\right)$$

olduğu ve S ve T monoidlerinin her ikisi de sol veya sağ tersinir eleman içermiyor ise $S \lozenge T$ nin etkin olmadığı gösterilmiştir (Yağcı et al. 2015). Böylece açıkça görülmektedir ki bir yarıgrubun (monoidin) etkin olup olmadığını belirtmek için yarıgrubun (monoidin) ikinci tamsayı homolojisini bulmak oldukça önemlidir ve literatürde bu konu ile ilgili pek çok ilginç çalışma bulunmaktadır (Ayık *et al*. 2000, Ayık *et al*. 2007, Çevik 2003, Yağcı *et al.* 2015). (Burada açıklanmayan yarıgrup teorisindeki diğer tanımlar için Howie (1995), Johnson (1990), Ruskuc (1995)' e bakınız.)

Bu çalışmalardan esinlenerek, bir sonlu M monoidinin Bruck-Reilly genişlemesinin ikinci tamsayı homolojisinin, öyle bir $k \in \mathbb{N}$ için

$$H_2\left(\mathrm{BR}(M,\theta)\right) = H_2(\mathrm{M}) \times \mathbb{Z}^k$$

olduğu gösterilmiştir.

2. Ön Hazırlık

Bu bölümde, çalışmanın ana sonucunu elde etmek için Squier çözümlemesi (Squier 1987) kullanılacağından, burada verilmeyen tanımlamalar, basit terimler ve notasyonlar için Squier (1987)'e ya da Yağcı *et al.* (2015)'a bakınız. Şimdi kolaylık olması açısından sık kullanılacak olan tanımlamaları vereceğiz.

Yardımcı Teorem 2.1 A boş olmayan bir küme ve R, A üzerinde bir sınırlı yerine-yazma sistemi olsun. O zaman aşağıdakiler birbirine denktir.

i) R confluentdir.
ii) $r_2 \neq \varepsilon$ olmak üzere $\forall\, (r_1 r_2, s_{1,2})$, $(r_2 r_3, s_{2,3}) \in R$ için $s_{1,2} r_3 \xrightarrow{*} w$ ve $r_1 s_{2,3} \xrightarrow{*} w$ olacak şekilde bir $w \in A^*$ vardır ve $\forall\, (r_1 r_2 r_3, s_{1,2})$, $(r_2, s_{2,3}) \in R$ için $s_{1,2} \xrightarrow{*} w$ ve $r_1 s_{2,3} r_3 \xrightarrow{*} w$ olacak şekilde bir $w \in A^*$ vardır.
iii) Her $w \in A^*$ için w nın bir tek indirgenemez formu vardır.

İspat: Guba and Pride (1996), Teorem 1.1'e ve Squier (1987), Teorem 2.1'e ve bakınız.

Squier (1987)'de R, tek sınırlı yerine-yazma sistemi olduğunda $P_3 \xrightarrow{\partial_3} P_2 \xrightarrow{\partial_2} P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$ dizisinin tam olduğunu gösterdi. O halde bu çözümlemeye $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}M} -$ tensör çarpımı uygulanırsa kısaca

$$\bar{P}_3 \xrightarrow{\bar{\partial}_3} \bar{P}_2 \xrightarrow{\bar{\partial}_2} \bar{P}_1 \xrightarrow{\bar{\partial}_1} \mathbb{Z} \to 0 \qquad (1)$$

şeklinde değişmeli grupların zincir kompleksi elde edilir. Burada $a \in A$ ve $r_2 \neq \varepsilon$ için $(r_1 r_2, s_{1,2})$, $(r_2 r_3, s_{2,3})$, $(r, s) \in R$ olmak üzere $\bar{P}_1, \bar{P}_2$ ve $\bar{P}_3$ sırasıyla $[a], [r, s]$ ve $\left[(r_1 r_2, s_{1,2}), (r_2 r_3, s_{2,3})\right]$ formal sembol kümeleri üzerinde serbest değişmeli gruplardır. Açıkça $\bar{\partial}_1 \colon \bar{P}_1 \to \mathbb{Z}$ sıfır dönüşümdür. $w \in A^*$ ve $a \in A$ için w daki a - ların sayısına w nın a uzunluğu denir ve $\|w\|_a$ ile gösterilir. Ayrıca her $w = a_1 \cdots a_m \in A^*$ için $C[w] = [a_1, \dots, a_m]$ şeklinde bir liste olarak tanımlansın. $\bar{\partial}_2 \colon \bar{P}_2 \to \bar{P}_1$ dönüşümü

$$\bar{\partial}_2([r, s]) = \sum_{a \in A} (\|r\|_a - \|s\|_a)[a]$$

şeklinde tanımlıdır. Son olarak eğer $\Phi(w) = \sum_{i=1}^{q} \phi(u_i)[r_i, s_i]$ ise $\overline{\Phi} \colon A^* \to \bar{P}_2$ dönüşümü $\overline{\Phi}(w) = \sum_{i=1}^{q} [r_i, s_i]$ şeklinde tanımlı olmak üzere

$\bar{\partial}_3 \colon \bar{P}_3 \to \bar{P}_2$ dönüşümü

$$\bar{\partial}_3\left(\left[(r_1 r_2, s_{1,2}), (r_2 r_3, s_{2,3})\right]\right) = \left[r_2 r_3, s_{2,3}\right]$$
$$-\left[r_1 r_2, s_{1,2}\right] + \overline{\Phi}\left(r_1 s_{2,3}\right) - \overline{\Phi}\left(s_{1,2} r_3\right)$$

şeklinde tanımlıdır. Böylece bir M monoidinin ikinci tamsayı homolojisi

$$H_2(S) = {}^{\mathrm{Ker}\bar{\partial}_2}\!\big/_{\mathrm{im}\bar{\partial}_3}$$

şeklinde tanımlı serbest değişmeli gruptur.

3. Monoidlerin Bruck-Reilly Genişlemelerinin İkinci Tamsayı Homolojisi

M bir monoid ve $\theta: M \to M$ bir endomorfizm olsun. Howie and Ruskuc (1994)'de göstermiştir ki A, M nin bir üreteç kümesi olmak üzere

$$\{(0,a,0): a \in A\} \cup \{(0,1_M,1),(1,1_M,0)\}$$

kümesi $\mathrm{BR}(M,\theta)$ nın bir üreteç kümesidir. Bu durumda $(m,a,n) \in \mathrm{BR}(M,\theta)$ için $a \in M =< A >$ olup $a = a_1 \cdots a_t$ olacak şekilde $a_1, \dots, a_t \in A$ ve t$\in \mathbb{N}$ vardır. O halde

$$(m,a,n) = (m,1_M,0)(0,a,0)(0,1_M,n)$$

ve her bir çarpan

$$(m,1_M,0) = (1,1_M,0)^m,$$

$$(0,a,0) = (0,a_1 \cdots a_t,0) = (0,a_1,0)\cdots(0,a_t,0),$$

$$(0,1_M,n) = (0,1_M,1)^n$$

şeklinde yazılabileceğinden

$$(m,a,n) = (1,1_M,0)^m(0,a_1,0)\cdots(0,a_t,0)(0,1_M,1)^n$$

olarak yazılabilir.

Ayrıca Howie and Ruskuc (1994)'de yine göstermiştir ki $a \in A$ olmak üzere

$$ß = \langle A,b,c | R, bc = 1, ba = (a\theta)b, ac = c(a\theta)\rangle$$

takdimi $\mathrm{BR}(M,\theta)$ yı tanımlar.

$\mathrm{BR}(M,\theta)$ için verilen ß takdiminde ki ilişkiler kümesi Q ile gösterilirse $a \in A, w \in A^*$ ve k$\in \mathbb{N}$ olmak üzere $\theta: M \to M$ bir endomorfizm olduğundan ve $\mathrm{BR}(M,\theta)$ üzerinde tanımlanan çarpma işleminden

$$\begin{aligned} bw &= (w\theta)b, & wc &= c(w\theta),\\ b^k a &= (a\theta^k)b^k, & ac^k &= c^k(a\theta^k),\\ b^k w &= (w\theta^k)b^k, & wc^k &= c^k(w\theta^k) \end{aligned}$$

ilişkilerinin Q nun bir sonucu olduğunu görmek kolaydır (Bugay, 2010).

Yardımcı Teorem 3.1 M bir sonlu monoid ve $\theta: M \to M$ bir endomorfizm olsun. R, A üzerinde tek sınırlı yerine-yazma sistemi olmak üzere $\langle A|R\rangle$ M nin bir sonlu monoid takdimi olsun. O zaman $a \in A$ olmak üzere

$$Q = R \cup \{bc = 1, ba = (a\theta)b, ac = c(a\theta)\}$$

kümesi $A \cup \{b,c\}$ üzerinde sınırlı ve confluent (ve böylece tam) bir sistemdir.

İspat: $w \in (A \cup \{b,c\})^*$ olsun. Yukarıda verilen Q nun sonucu olan ilişkiler kullanılarak $w_0 \in A^*$, A da indirgenemez olmak üzere w nın indirgenmiş formunun $\overline{w} = c^k w_0 b^t$ şeklinde olduğu görülür. R, A üzerinde sınırlı olduğu için Q da $A \cup \{b,c\}$ üzerinde sınırlıdır. Ayrıca, R sınırlı ve confluent olduğu için $\overline{w} \in (A \cup \{b,c\})^*$, w nın bir tek indirgenemez formudur. Böylece Yardımcı Teorem 2.1 den Q, $A \cup \{b,c\}$ üzerinde confluent bir sistemdir.

Yardımcı Teorem 3.2 M bir sonlu monoid ve $\theta: M \to M$ bir endomorfizm olsun. R, A üzerinde tek sınırlı yerine-yazma sistemi olmak üzere $\langle A|R\rangle$ M nin bir sonlu monoid takdimi olsun. Yukarıdaki notasyonlar ile birlikte $a \in A$ ve $\overline{a\theta}$, $a\theta$ nın bir tek indirgenemez formu olmak üzere

$$Q'' = R \cup \{bc = 1, ba = (\overline{a\theta})b, ac = c(\overline{a\theta})\}$$

kümesi Q ya denk ve $A \cup \{b,c\}$ kümesi üzerinde bir tek sınırlı yerine yazma sistemidir.

İspat: Squier (1987) Teorem 2.4' den açıktır.

Sonuç 3.3 M bir sonlu monoid ve $\theta: M \to M$ bir endomorfizm olsun. R, A üzerinde tek sınırlı yerine-yazma sistemi olmak üzere $\langle A|R\rangle$ M nin bir sonlu monoid takdimi olsun. Yukarıdaki notasyonlar ile birlikte

$$\langle A \cup \{b,c\} | Q''\rangle$$

$\mathrm{BR}(M,\theta)$ monoidinin bir monoid takdimidir öyle ki Q'', $A \cup \{b,c\}$ üzerinde tek sınırlı yerine yazma sistemidir.

İspat: $\overline{a\theta}$, $a\theta \xrightarrow{Q} (\overline{a\theta})$ olacak şekilde bir tek indirgenemez form olmak üzere Tietze dönüşümleri kullanılarak $ba = (\overline{a\theta})b$, $ac = c(\overline{a\theta})$ ilişkileri eklenir ve $\overline{a\theta} \to a\theta$ olduğundan yine Tietze dönüşümleri kullanılarak $ba = (a\theta)b, ac = c(a\theta)$ ilişkileri çıkarılır ise Yardımcı Teorem 3.1 ve 3.2 den istenen sonuç elde edilir.

Teorem 3.4 M bir sonlu monoid ve $\theta: M \to M$ bir endomorfizm olsun. O halde öyle bir $k \in \mathbb{N}$ için

$$H_2(\mathrm{BR}(M,\theta)) = H_2(\mathrm{M}) \times \mathbb{Z}^k$$

dır.

İspat: Yardımcı Teorem 3.2 de verilen $A \cup \{b,c\}$ kümesi üzerindeki Q'' tek sınırlı yerine yazma sistemini ele alalım ve bu sisteme (1) zincir kompleksini uygulayalım.

M monoidinin $\mathrm{BR}(M,\theta)$ Bruck-Reilly genişlemesinin ikinci tamsayı homolojisi $H_2(\mathrm{BR}(M,\theta)) = {}^{\mathrm{Ker}\bar{\partial}_2}\!\big/_{\mathrm{im}\bar{\partial}_3}$ yı hesaplamaya başlamadan önce kabul edelim ki $\mathrm{Ker}\bar{\partial}_{2|M}$, $\{X_i | i \in I\}$ ve $\mathrm{im}\bar{\partial}_{3|M}$, $\{Y_j | j \in J\}$ üzerinde serbest değişmeli gruplar olmak üzere $H_2(M) = \mathrm{Ker}\bar{\partial}_{2|M} \big/ \mathrm{im}\bar{\partial}_{3|M}$ olsun. Şimdi aşağıdaki overlap-leri kullanarak $\mathrm{im}\bar{\partial}_3$ serbest değişmeli grubu için bir üreteç kümesi bulalım. O halde $a \in A; (ra = p), (ar = s), (r_1 r_2 = p_{1,2}), (r_2 r_3 = p_{2,3}) \in R$ olmak üzere tüm overlap-ler

$$V_1 = [(r_1 r_2, p_{1,2}), (r_2 r_3, p_{2,3})],$$

$$V_2 = [(ra, p), (ac, c(\overline{a\theta}))],$$

$$V_3 = [(ba, (\overline{a\theta})b), (ar, s)],$$

$$V_4 = [(ba, (\overline{a\theta})b), (ac, c(\overline{a\theta}))]$$

olur. Böylece

$$\overline{\partial_3}(V_1) = \mathrm{im}\bar{\partial}_{3|M}$$

$$\overline{\partial_3}(V_2) = \sum_{a \in C[ra]} [ac, c(\overline{a\theta})\ ] - \sum_{a \in C[p]} [ac, c(\overline{a\theta})\ ]$$

$$\overline{\partial_3}(V_3) = \sum_{a \in C[s]} [ba, (\overline{a\theta})b\ ] - \sum_{a \in C[ar]} [ba, (\overline{a\theta})b\ ]$$

$$\overline{\partial_3}(V_4) = [ac, c(\overline{a\theta})\ ] - [ba, (\overline{a\theta})b\ ]$$

elde edilir. Kabul edelim ki

$$W_1 = \{[ac, c(\overline{a\theta})\ ] : a \in C[r] \cup C[s], (r = s) \in R\}$$

$$W_2 = \{[ba, (\overline{a\theta})b\ ] : a \in C[r] \cup C[s], (r = s)\ \in R\}$$

olsun. O halde

$$\overline{\partial_3}(V_2) = \langle W_1 \rangle$$

$$\overline{\partial_3}(V_3) = \langle W_2 \rangle$$

$$\overline{\partial_3}(V_4) \subseteq \langle W_1 \cup W_2 \rangle$$

olur. Böylece $\{Y_j, W_1, W_2 : j \in J\}$ kümesi serbest değişmeli gup $\mathrm{im}\bar{\partial}_3$ için bir üreteç kümesi olur.

Şimdi de $\mathrm{Ker}\bar{\partial}_2$ için bir üreteç kümesi bulalım. Her $\alpha \in \bar{P}_2$,

$$\alpha = \sum_{(r=s) \in R} \alpha_{(r,s)}[r, s] + \alpha_{(bc,1)}[bc, 1]$$

$$+ \sum_{[ba,(\overline{a\theta})b\ ] \in Q''} \alpha_{(ba,(\overline{a\theta})b)}[ba, (\overline{a\theta})b]$$

$$+ \sum_{[ac,c(\overline{a\theta})\ ] \in Q''} \alpha_{(ac,c(\overline{a\theta}))}[ac, c(\overline{a\theta})]$$

şeklinde yazılabildiğinden $\alpha \in \mathrm{Ker}\bar{\partial}_2$ gerek ve yeter koşul

$$0 = \bar{\partial}_2(\alpha) = \sum_{a \in A} \alpha_{(r,s)}(\|r\|_a - \|s\|_a)[a]$$

$$+\alpha_{(bc,1)([b]+[c])}$$

$$+ \sum_{[ba,(\overline{a\theta})b\ ] \in Q''} \alpha_{(ba,(\overline{a\theta})b)}([a] - [\overline{a\theta}])$$

$$+ \sum_{[ac,c(\overline{a\theta})] \in Q''} \alpha_{\left(ac,c(\overline{a\theta})\right)}([a] - [\overline{a\theta}])$$

dır. $\alpha_{(bc,1)} = 0$ olduğu açıktır. $\alpha_{(r,s)}$ dışındaki katsayıların hepsini sıfır olarak alırsak

$$\bar{\partial}_2\Big(\sum_{(r=s) \in R} \alpha_{(r,s)}[r, s]\Big) = \sum_{a \in A} \alpha_{(r,s)}(\|r\|_a$$

$$-\|s\|_a)[a] = 0$$

olur ki bu bize $\mathrm{Ker}\bar{\partial}_{2|M}$ nin $\{X_i | i \in I\}$ üreteç kümesini verir.

Eğer $\overline{a\theta} = a$ ise yapacak bir şey yoktur. O halde $\overline{a\theta} \neq a$ olduğunu kabul edelim. O zaman $(r = s) \in R$ olmak üzere her bir $a \notin C[r] \cup C[s]$ için

$$\sum_{a \in A} (\alpha_{(r,s)}(\|r\|_a - \|s\|_a) + \alpha_{(ba,(\overline{a\theta})b)}$$

$$+\alpha_{\left(ac,c(\overline{a\theta})\right)})\ [a] = 0 \text{ ve}$$

$$\sum_{\overline{a\theta} \in A} (\alpha_{(r,s)}(\|r\|_a - \|s\|_a) + \alpha_{(ba,(\overline{a\theta})b)}$$

$$+\alpha_{\left(ac,c(\overline{a\theta})\right)})\ [\overline{a\theta}] = 0$$

ve $(r = s) \in R$ olmak üzere her bir $a \notin C[r] \cup C[s]$ için

$$\alpha_{(ba,(\overline{a\theta})b)} = -\alpha_{\left(ac,c(\overline{a\theta})\right)}$$

olur. Şimdi

$$W_3 = \{[ac, c(\overline{a\theta})] - [ba, (\overline{a\theta})b\ ] : a \notin C[r]$$
$$\cup\, C[s], (r = s) \in R\}$$

olsun. Böylece

$$\{X_i, W_1, W_2, [ac, c(\overline{a\theta})], [ba, (\overline{a\theta})b\ ] : a \notin C[r]$$
$$\cup\, C\ [s], (r = s) \in R, i \in I\}$$

kümesi serbest değişmeli grup $\mathrm{Ker}\bar{\partial}_2$ için bir üreteç kümesi olur. W_1 ve W_2, $\mathrm{im}\bar{\partial}_3$ nin üreteç kümesinde olduğu için

$$H_2(\mathrm{BR}(M, \theta)) = \langle X_i, W_3\ (i \in I)\ | Y_j = 0\ (j \in J) \rangle$$
$$= H_2(\mathrm{M}) \times \langle W_3 | \emptyset \rangle$$

olur. O halde $\langle\{x\}|\emptyset\rangle = \mathbb{Z}$ olduğundan $(r = s) \in R$ olmak üzere her bir $a \notin C[r] \cup C[s]$ için

$$\left\langle [ac, c(\overline{a\theta})] - [ba, (\overline{a\theta})b\,] \middle| \emptyset \right\rangle = \mathbb{Z}$$

olup $k = |a \in A: a \notin C[r] \cup C[s], (r = s) \in R|$ alınır ise

$$H_2\big(\mathrm{BR}(M,\theta)\big) = H_2(\mathrm{M}) \times \mathbb{Z}^k$$

olur.

Örnek 3.5 Yağcı (2018) Örnek 3.14 de verilen

$$\langle A|R\rangle = \langle a_1, a_2 | a_1{}^3 = 1, a_2{}^3 = 1, a_2a_1 = a_1a_2\rangle$$

takdimini ele alalım. Bu takdimin tanımladığı monoidi M ile gösterelim ve $\theta: M \to M$ herhangi bir endomorfizm olsun. θ nın belirlediği M nin Bruck-Reilly genişlemesinin takdimi

$$ß = \left\langle a_1, a_2, b, c \,\middle|\, \begin{array}{c} a_1{}^3 = 1, a_2{}^3 = 1, a_2a_1 = a_1a_2, \\ bc = 1, ba = (\overline{a\theta})b, ac = c(\overline{a\theta}) \end{array} \right\rangle$$

şeklindedir. Yağcı (2018) Örnek 3.14 den

$$H_2(M) = \mathbb{Z}_3$$

dir. $(a_1{}^3 = 1), (a_2{}^3 = 1), (a_2a_1 = a_1a_2) \in R$ için Teorem 3.4 den $k = 2$ olup

$$H_2\big(\mathrm{BR}(M,\theta)\big) = H_2(\mathrm{M}) \times \mathbb{Z}^k = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}^2$$

olur.

4. Kaynaklar

Araujo, I.M. and Ruskuc, N., 2001. Finite presentability of Bruck-Reilly extensions of groups. *J. Algebra,* **242**(1)**,** 20-30.

Ayık, H., Campbell, C.M., O'Connor, J.J. and Ruskuc, N., 2000. Minimal presentations and efficiency of semigroups. *Semigroup Forum,* **60,** 231-242.

Ayık, H., Campbell, C.M., O'Connor, J.J. and Ruskuc, N., 2000. On the efficiency of finite simple semigroups. *Turk J. Math,* **24,** 129-146.

Ayık, H., Campbell, C.M., O'Connor, J.J. and Ruskuc, N., 2000. The semigroup efficiency of groups and monoids. *Mathematical Proceedings of the Royal Irish Academy,* **100A**(2), 171-176.

Ayık, H., Campbell, C.M. and O'Connor, J.J., 2007. On the efficiency of the direct products of Monogenic Monoids. *Algebra Colloq.,* **14,** 279-284.

Bruck, R. H., 1958. A Survey of Binary Systems, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Neue Folge, Heft 20. Reihe: Gruppentheorie, Springer, Berlin.

Bugay, L., 2010. Yarıgrupların Bruck-Reilly genişlemelerinin sonlu takdim edilebilirliği. Yüksek Lisans Tezi, Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Adana, 109.

Carvalho, C.A., 2005. On Bruck-Reilly extensions of rectangular bands, zero semigroups and free monoids. *Southeast Asian Bull. Math.,* **29**(3), 423-431.

Carvalho, C.A. and Ruskuc, N, 2006. Finite presentability of Bruck-Reilly extensions of semilattices. *Communications in Algebra,* **34**(9), 3301-3313.

Carvalho, C.A. and Ruskuc, N, 2007. Finite presentability of Bruck-Reilly extensions of Clifford monoids. *Journal of Algebra and Its Applications,* **6**(5), 801-814.

Carvalho, C.A., 2009. Bruck-Reilly extensions of direct products of monoids and completely (0)-simple semigroups. *Semigroup Forum,* **79,** 145-158.

Carvalho, C.A., 2009. On Presentations of Bruck-Reilly extensions. *Communications in Algebra,* **34**, 2871-2886.

Çevik, A.S, 2003. Minimal but inefficient presentations of the semi-direct products of some monoids. *Semigroup Forum,* **66,** 1-17.

Çevik, A.S, 2003. The p-Cockcroft propertyof the semi-direct products of monoids. *Internat. J. Algebra Comput.,* **13,** 1-16.

Guba, V.S. and Pride, S.J., 1996. Low dimensional (co)homology of free Burnside monoids. *Journal Pure Appl. Algebra,* **108,** 61-79.

Howie, J. M. and Ruskuc, N., 1994. Construction and presentations for monnoids. *Communications in Algebra,* **22**(15), 6209-6224.

Howie, J. M., 1995. Fundamentals of Semigroup Theory. New York, Oxford University Press.

Johnson, D.L., 1990. Presentations of Groups. Cambridge Univ. Press, Cambridge.

Karpuz, E. G., 2015. Gröbner-Shirshov Bases of Some Semigroup Constructions. Algebra Colloquium, **22**(1), 35-46.

Munn, W.D., 1970. On simple inverse semigroups. *Semigroup Forum,* **1**(1), 63-74.

Reilly, N. R., 1966. Bisimple w-semigroups. *Proc. Glasgow Math. Assoc.,* **7,** 160-167.

Ruskuc, N., 1995. Semigroup presentations. Ph. D. Thesis, University of St Andrews, 256.

Squier,C., 1987. Word problems and a homological finiteness condition for monoids. *Journal Pure Appl. Algebra,* **49,** 79-97.

Yamamura, A., 2001. Presentations of Bruck-Reilly extensions and decision problems. *Semigroup Forum,* **62**(1), 79-97.

Yağcı, M., Bugay, L. and Ayık, H., 2015. On the second homology of the Schützenberger Product of monoids. *Turk J. Math.,* **39,** 763-772.

Yağcı, M., 2018. Yarıgrupların ikinci homolojisi ve etkinlik. Doktora Tezi, Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Adana, 73.