Süleyman Demirel Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi
Cilt 21, Sayı 1, 24-30, 2017

Süleyman Demirel University
Journal of Natural and Applied Sciences
Volume 21, Issue 1, 24-30, 2017

DOI: 10.19113/sdufbed.67151

Yaşam Sürdürme Analizinde Gamma Kırılganlık Modelleri

Emel BAŞAR*[1]

[1]Gazi Üniversitesi, Fen Fakültesi, İstatistik Bölümü, 06500, Ankara

(Alınış / Received: 27.06.2015, Kabul / Accepted: 25.07.2016, Online Yayınlanma / Published Online: 21.08.2016)

Anahtar Kelimeler
Yaşam sürdürme analizi,
Orantılı hazard modeli,
Gamma kırılganlık modeli,
Parametrik modeller,
Çocuk suçluluğu

Özet: Yaşam sürdürme verilerinin analizinde kullanılan modellerin çoğunda tüm birey ya da birimlerin aynı başarısızlık riskine sahip olduğu varsayılmaktadır. Bireylerin bazılarının başarısızlık yapısı diğerlerinden daha farklı olabildiği için bu varsayım her zaman gerçekçi olmamaktadır. Bireylerin oluşturduğu yığında gözlenemeyen bir heterojenlik bulunmaktadır. Bu durum dikkate alınmadığı zaman ciddi sorunlara neden olabilmekte ve yanıltıcı sonuçlara yol açmaktadır. Yaşam sürdürme verisindeki gözlenemeyen heterojenliği tanımlamak üzere kırılganlık modelleri kullanılmaktadır. Genellikle kırılganlık faktörünün temel hazard fonksiyonu üzerinde çarpımsal bir rol oynadığı varsayılmaktadır. Kırılganlık modelleri koşullu modellerdir ve kırılganlık faktörü rastgele bir yapıya sahip olmaktadır. Bu nedenle kırılganlık modellerinde kırılganlık dağılımının belirlenmesi gerekmektedir. Bu çalışmada orantılı hazard varsayımı altında gamma kırılganlık modeli dikkate alınmış ve gerçek veri setine uygulanmıştır.

Gamma Frailty Models in Survival Analysis

Keywords
Survival analysis,
Proportional hazards model,
Gamma frailty model,
Parametric models,
Child delinquency

Abstract: Most of the models used in the analysis of survival data have been assumed that all individuals had the same risk of failure. This situation is not always realistic because some of individuals have different failure structure than the others. This heterogeneity in the population could cause serious problem and could lead to misleading conclusions. To describe the unobserved heterogeneity in survival data frailty models are used. The frailty factor is usually assumed to act multiplicatively on a baseline hazard function. Frailty models are conditional models and the frailty factor is random. Therefore a frailty distribution needs to be specified in the frailty model. In this study gamma frailty model has been considered under the proportional hazards assumption and the models have been illustrated with real data set.

1. Giriş

Yaşam sürdürme analizi, önceden tanımlanan herhangi bir olayın meydana gelmesine kadar geçen zaman sürelerinden oluşan veriyi çözümlemeyi amaçlamaktadır. Yaşam sürdürme verisinin önemli bir özelliği diğer veri türlerinde olmayan durdurmanın (censoring) bulunmasıdır. Yani ilgilenilen olayın, çalışmanın yapıldığı süre içinde mutlaka gözlemlenmiş olması gerekli değildir. İlgilenilen olay bazı birim ya da bireyler için gerçekleşir, ancak bazı bireyler için gerçekleşmez. Bu durumda yaşam sürdürme verisi tamamlanmamıştır.

Tamamlanmış ve tamamlanmamış verinin bir arada bulunması yaşam sürdürme verisinin temel karakteristiği olmaktadır ve böyle verinin analizi için özel yöntemlere ihtiyaç duyulmasının asıl nedenini oluşturmaktadır. Yaşam sürdürme analizinde asıl amaç tanımlanan değişkene ilişkin başarısızlık yapısını çözümlemektir. Bunun için hazard fonksiyonundan yararlanılmaktadır. Hazard fonksiyonu, t zamana kadar yaşamını sürdürdüğü bilinen bir birey için tanımlanan olayın o andan hemen sonra meydana gelmesi riskidir ve aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$h(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Pr(t \leq T < t + \Delta t | T \geq t)}{\Delta t} \qquad (1)$$

Yaşam sürdürme analizine konu olan pek çok çalışmada, başarısızlık yapısı üzerinde etkili olduğu düşünülen bir ya da daha çok eşdeğişken (covariate), analize dâhil edilerek başarısızlık yapısının zaman boyutunda gösterdiği değişim açıklanmaya çalışılmaktadır. Bu amacı gerçekleştirmek üzere pek

*İlgili yazar: ebasar@gazi.edu.tr

çok model kurulabilmektedir. Eşdeğişenlerin modele dâhil edilmesi genellikle çarpımsal modeller kurularak gerçekleştirilmekte ve X eşdeğişken vektörü olmak üzere koşullu hazard fonksiyonu;

$$h(t|X) = h_0(t)r(X) \tag{2}$$

biçiminde tanımlanmaktadır. Burada $h_0(t)$ temel hazard fonksiyonu, $r(X)$ risk fonksiyonudur.

Temel hazard fonksiyonu için herhangi bir parametrik biçim varsayılmadığı zaman yaşam sürdürme analizinde en çok kullanılan model Cox orantılı hazard modeli ya da kısaca Cox modeli olmaktadır ve model;

$$h(t|X) = h_0(t)\exp(\beta' X) \tag{3}$$

şeklinde tanımlanmaktadır [1]. Burada β regresyon katsayı vektörü, X eşdeğişken vektörüdür. Model parametrik olmayan kısım (temel hazard) ve parametrik kısım (risk fonksiyonu) olmak üzere iki parça halindedir ve bu nedenle yarı-parametrik model olarak isimlendirilmektedir. Model farklı eşdeğişken vektörlerine sahip iki bireye ilişkin hazard oranının zaman boyunca değişmez ve orantılı olması varsayımına dayalıdır. Böylece eşdeğişkenin etkisi, göreli risk olan ($\exp(\beta' X)$) ifadesi ile açıklanmakta ve kolayca yorumlanmaktadır [2].

Eğer temel hazard fonksiyonunun özel bir biçime sahip olduğu varsayılırsa parametrik hazard modeli elde edilmektedir. Parametrik bir dağılım varsayıldığı zaman en çok kullanılan model Weibull modelidir. Bu model aynı zamanda orantılı hazard modeli olmaktadır ve hazard fonksiyonu, X eşdeğişken vektörü olmak üzere;

$$h(t|X) = \delta t^{\delta-1}\alpha(X)^{-1}\,,\ \alpha, \delta > 0 \tag{4}$$

biçiminde tanımlanmaktadır [3].

Yaşam sürdürme analizinde başarısızlık yapısı regresyon modelleri ile ayrıntılı olarak açıklanmaya çalışılmaktadır. Ancak yine de kimi zaman modelde yer alan eşdeğişkenler tarafından açıklanamayan, modelin içinde yaşayan ve değişimi gözlemlenemeyen bir heterojenlik bulunmaktadır. Söz konusu heterojenlik modellenmek istendiği zaman kırılganlık (frailty) kavramı kullanılmaktadır. Kırılganlık modellerinde, bireyler arasında risk bakımından eşdeğişkenler tarafından açıklanamayan önemli farklılıkların var olduğu ve bir rastgelelik bulunduğu varsayılmaktadır. Kırılganlık faktörünün dikkate alınmaması pek çok hataya yol açmakta ve yanlış sonuçlara ulaşılmasına neden olmaktadır.

Kırılganlık modellerinde asıl olarak veride iki değişkenlik kaynağının bulunduğu düşünülmektedir.
İlki, teorik olarak tahmin edilebilen bir değişkenliktir ve modelde yer alan, gözlemlenebilen risk faktörlerinden meydana gelmektedir. İkincisi, teorik olarak tahmin edilemeyen bir değişkenliktir ve bilinmeyen eşdeğişkenlerin meydana getirdiği heterojenlik nedeniyle ortaya çıkmaktadır.

Kırılganlık sözcüğü, gözlenemeyen heterojenliği tanımlamak üzere ilk olarak Vaupel vd. [4] tarafından tek değişkenli yaşam sürdürme modellerinde kullanılmıştır. Vaupel, demografik anlamda bir bireye ilişkin ölümülük gücünü, bireyin kırılganlık düzeyi ve temel bir fonksiyonun çarpımı olarak tanımlayan bir rasgele etki modeli önermiştir. Clayton ve Cuzick [5], temel hazard fonksiyonu üzerinde çarpımsal biçimde etkili olan orantılı hazard kırılganlık modelini önermiştir. Hougaard [6,7,8] bireyler arasındaki heterojenliği gamma, invers Gaussian dağılımlarını kullanarak parametrik olarak modellemiştir. Aalen (9) Weibull dağılımından yararlanmış, Therneau vd. (10) ceza fonksiyonlarını kullanmıştır. Huber-Carol vd. (11) durdurulmuş ve budanmış veride kırılganlık modellerini incelemiş, Hanagal (12, 13) kırılganlık faktörünü karma dağılımlardan yararlanarak açıklamaya çalışmıştır. Bu konuda yapılan çalışmalar sürmektedir.

Çalışmanın bundan sonraki bölümlerinde orantılı hazard varsayımı altında kırılganlık modelleri ve gamma kırılganlık modelleri incelenmiştir. 4. bölümde çocuk suçluluğu verileri için incelenen modellerin bir uygulaması yapılmış ve son bölümde elde edilen sonuçlar tartışılmıştır.

2. Orantılı Hazard Varsayımı Altında Kırılganlık Modelleri

Bir kırılganlık modelinde esas alınan temel düşünce, bireyler arasındaki gözlemlenemeyen heterojenliği rastgele etki olarak hazard fonksiyonuna dâhil edebilmektir. Bu bakımdan kırılganlık modelleri koşullu modellerdir ve kırılganlık faktörü, belli bir dağılıma sahip olduğu varsayılan rastgele bir değişkendir.

Kırılganlık kavramını matematiksel olarak ifade etmenin bir biçimi, her bireye ilişkin hazard hızı üzerinde orantılı biçimde hareket eden bir kırılganlık faktörü olduğunu varsaymaktır. Bu varsayıma dayalı model orantılı kırılganlık modeli olmaktadır. Orantılı kırılganlık modeli bireylere ilişkin heterojenliği zaman boyutuna bağlı olmadan açıklamakta ve heterojenlikle ilgili sorunun çözümünde etkili bir model olmaktadır (14, 15).
Yaşam sürdürme zamanlarını gösteren rastgele değişken T ve gözlemlenemeyen rastgele kırılganlık değişkeni Z olsun. Orantılı hazard varsayımı altında kırılganlık modeli;

$$h(t|Z) = Z\, h_0(t) \tag{5}$$

olarak gösterilmektedir. Burada $h_0(t)$ temel hazard fonksiyonudur. Kırılganlık faktörü Z, yığındaki bireyler arasında bulunan heterojenliği ölçmektedir, negatif olmayan rastgele bir değişkendir ve bir dağılımı vardır. Bu modelde kırılganlık faktörü Z, temel hazard fonksiyonu $h_0(t)$ üzerinde çarpımsal bir rol oynamaktadır. Z ve $h_0(t)$ ifadelerinin her ikisi de gözlemlenemez. Yığından gözlemlenen şey bireye ilişkin hazard hızı değildir, farklı kırılganlığa sahip çok sayıda bireye ilişkin bir sonuçtur ve yığın hazard hızı olarak adlandırılan kavramdır. Bireysel kırılganlık değişkeni Z dışında, tüm bireyler aynı risk yapısına sahiptir (16).

Yaşam sürdürme analizinde birikimli hazard fonksiyonu;

$$H_0(t) = \int_0^t h_0(u)du \tag{6}$$

olarak tanımlanmaktadır.

Z koşulu altında bir bireye ilişkin yaşam sürdürme fonksiyonu;

$$\begin{aligned} S(t|Z) &= exp\left[-\int_0^t h(u|Z)du\right] \\ &= exp\left[-Z\int_0^t h_0(u)du\right] \\ &= exp[-ZH_0(t)] \end{aligned} \tag{7}$$

biçiminde elde edilmektedir.

Yığına ilişkin yaşam sürdürme fonksiyonu ise, koşullu yaşam sürdürme fonksiyonlarının beklenen değeridir ve;

$$S(t) = \boldsymbol{E}[S(t|Z)] = \boldsymbol{E}\{exp[-ZH_0(t)]\} \tag{8}$$

şeklinde elde edilmektedir.

Kırılganlık modellerinde Laplace dönüşümünden yararlanılmaktadır. Laplace dönüşümü kısaca, difrensiyel eşitlikleri cebir formunda ifade etmek üzere kullanılan bir tekniktir. T negatif olmayan rastgele değişken olmak üzere Laplace dönüşümü;

$$\mathcal{L}(u) = \boldsymbol{E}(e^{-uT}) = \int_0^\infty e^{-ut}f(t)dt \tag{9}$$

biçiminde tanımlanmaktadır. Laplace dönüşümünden yararlanarak yaşam sürdürme fonksiyonu;

$$S(t) = \boldsymbol{E}\{exp[-ZH_0(t)]\} = \mathcal{L}\{H_0(t)\} \tag{10}$$

olarak elde edilmektedir. Benzer biçimde olasılık yoğunluk fonksiyonu, hazard fonksiyonu, kırılganlığa ilişkin beklenen değer ve varyans aşağıdaki gibi tanımlanabilmektedir (14).

$$f(t) = -h_0(t)\,\mathcal{L}'\{H_0(t)\} \tag{11}$$

$$h(t) = -h_0(t)\frac{\mathcal{L}'\{H_0(t)\}}{\mathcal{L}\{H_0(t)\}} \tag{12}$$

$$\boldsymbol{E}(Z) = -\mathcal{L}'(0) \tag{13}$$

$$\boldsymbol{V}(Z) = \mathcal{L}''(0) - \left[\mathcal{L}'(0)\right]^2 \tag{14}$$

Teorem: Kırılganlık modelinin; $h(t|Z) = Z\,h_0(t)$ olduğu varsayılsın. Yığına ilişkin hazard genel olarak; $h(t) = E\{h(t|z)|T > t\}$ şeklinde, bireylere ilişkin hazardların beklenen değeri biçiminde ifade edilebilmektedir. Ayrıca $f(z|T > t)$ ifadesi, t zaman noktasında yaşayanlar arasındaki kırılganlık yoğunluğunu göstermek üzere yığın hazard fonksiyonu;

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_0^\infty h(t|z)f(z|T > t)\,dz \\ &= h_0(t)\int_0^\infty zf(z|T > t)\,dz \end{aligned} \tag{15}$$

biçiminde yazılabilmektedir (4).

Teorem yığına ilişkin hazardın, t noktasında yaşamını sürdüren bireylere ilişkin hazardların ağırlıklı ortalaması olarak ifade edilebildiğini göstermektedir. Ağırlıklar kırılganlık dağılımı ile belirlenmektedir. Kırılganlığı yüksek olan bireyler yüksek Z değerine sahiptir ve daha önce başarısız olma eğilimindedir. Böylece bir kuşağın ortalama kırılganlığı zamanla azalacaktır. Sonuç olarak bireylere ilişkin hazard, bireyin ait olduğu kuşağın hazardından daha hızlı artmaktadır. Yani bireyler tek tek ait oldukları topluluktan daha çabuk tükenmektedir.

Eşdeğişken bilgisinin modelde yer alması durumunda orantılı kırılganlık modeline ilişkin koşullu hazard fonksiyonu;

$$h(t|X,Z) = Z\,h_0(t)r(X) \tag{16}$$

şeklindedir. Burada $r(X)$ risk fonksiyonu, X eşdeğişken vektörüdür. Koşulsuz hazard fonksiyonu ise;

$$h(t|X) = h_0(t)r(X)\boldsymbol{E}(Z|T > t, X) \tag{17}$$

olarak elde edilmektedir. Beklenen değer yığındaki tüm bireyler üzerinden alınan bir ortalamayı göstermektedir (17).

Kırılganlık faktörü Z rastgele değişkenine ilişkin olarak en çok gamma, log-normal, pozitif kararlı ve ters Gaussian dağılımlarından yararlanılmaktadır. Bu çalışmada kırılganlık dağılımı için gamma dağılımı dikkate alınmıştır.

3. Gamma Kırılganlık Modeli

Gamma dağılımı yaşam sürdürme verisine bir karma dağılım olarak çok iyi uyum sağlamaktadır. Laplace dönüşümü kolayca uygulanmakta, koşulsuz yaşam sürdürme, yoğunluk, dağılım ve hazard fonksiyonları elde edilebilmektedir. Kırılganlık modellerinin pek çoğunda zaman sonsuza giderken kırılganlık dağılımı gama dağılımına yakınsamaktadır (18). Gamma dağılımı biçim (k) parametresine bağlı olarak çeşitli özelliklere sahip olmaktadır. $k = 1$ iken üstel dağılıma dönüşmektedir. k büyüdükçe dağılımın simetrikliği artmakta ve normal dağılıma benzer biçime sahip olmaktadır. k ve λ parametreleri ile gamma dağılımına sahip bir rastgele değişkenin yoğunluğu;

$$f(z) = \frac{1}{\Gamma(k)}\lambda^k z^{k-1} e^{-\lambda z} \quad , \quad k, \lambda > 0 \qquad (18)$$

dır. Laplace dönüşümünden yaralanarak;

$$\mathcal{L}(u) = \frac{1}{\Gamma(k)}\lambda^k \int_0^\infty e^{-uz} z^{k-1} e^{-\lambda z} dz$$

$$= \frac{\lambda^k}{(\lambda+u)^k}\frac{1}{\Gamma(k)}(\lambda+u)^k \int_0^\infty z^{k-1} e^{-(\lambda+u)z}\, dz \qquad (19)$$

$$= (1+\frac{u}{\lambda})^{-k}$$

ifadeleri elde edilebilir (14). Laplace dönüşümünün birinci ve ikinci türevleri;

$$\mathcal{L}'(u) = -\frac{k}{\lambda}(1+\frac{u}{\lambda})^{-k-1} \qquad (20)$$

$$\mathcal{L}''(u) = \frac{k(k+1)}{\lambda^2}(1+\frac{u}{\lambda})^{-k-2} \qquad (21)$$

şeklindedir. $u = 0$ iken beklenen değer ve varyans;

$$\boldsymbol{E}(Z) = \frac{k}{\lambda} \qquad (22)$$

$$\boldsymbol{V}(Z) = \frac{k}{\lambda^2} \qquad (23)$$

olur. $k = \lambda$ alınarak dağılımın standardize edilmesi ve $\boldsymbol{E}(Z) = 1$ olması sağlanabilmektedir. Bu durumda kırılganlık değişkeninin varyansı $\sigma^2 = \frac{1}{\lambda}$ olmaktadır. Z rastgele değişkeni $Z \sim \Gamma(\frac{1}{\sigma^2}, \frac{1}{\sigma^2})$ ile gamma dağılımına sahip olmaktadır. Yoğunluk fonksiyonu, koşulsuz yaşam sürdürme, koşulsuz yoğunluk ve koşulsuz hazard fonksiyonları; Laplace dönüşümü kullanılarak;

$$f(z) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{\sigma^2})}\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{\frac{1}{\sigma^2}} z^{\frac{1}{\sigma^2}-1} exp\left(-\frac{z}{\sigma^2}\right) \qquad (24)$$

$$S(t) = \mathcal{L}\{H_0(t)\} = \frac{1}{[1+\sigma^2 H_0(t)]^{\frac{1}{\sigma^2}}} \qquad (25)$$

$$f(t) = \frac{h_0(t)}{[1+\sigma^2 H_0(t)]^{\frac{1}{\sigma^2}+1}} \qquad (26)$$

$$h(t) = \frac{h_0(t)}{1+\sigma^2 H_0(t)} \qquad (27)$$

biçiminde elde edilmektedir (14).

Varyans 0 iken, kırılganlık yoktur. Bireye ilişkin hazard hızı ile yığına ilişkin hazard hızı aynıdır. Varyans ve zaman artarken payda büyüyecek ve bireye ilişkin hazard hızı artmayı sürdürse bile bir süre sonra yığın hazard hızı azalmaya başlayacaktır.

Gamma kırılganlık modelini, eşdeğişken bilgisinin yer aldığı ve Cox türünde regresyon terimlerinin bulunduğu duruma genişletmek mümkündür. Bu durumda birikimli temel hazard fonksiyonu $H_0(t)$ yerine, eşdeğişken bilgisinin risk fonksiyonunda yer aldığı $H_0(t)e^{\beta' X}$ ifadesini yazmak yeterli olmaktadır. Kırılganlığın dağılımı gamma dağılımı olmaya devam etmekte ancak parametresi eşdeğişkenlere bağlı olarak değişmektedir.

Daha önce de değinildiği gibi parametrik hazard modellerinde temel hazard fonksiyonu parametrik bir dağılımla karakterize edilmektedir. Yaşam sürdürme analizine sıklıkla kullanılan dağılım Weibull dağılımı olmaktadır. Weibull dağılımı aynı zamanda orantılı olma özelliğini taşımaktadır. Kırılganlığın modele dâhil edilmesi durumunda parametrik gamma kırılganlık modelleri elde edilmektedir.

Uygulama kısmında, temel hazard fonksiyonu için hiçbir varsayımın yapılmadığı yarı-parametrik gamma kırılganlık modeli ve temel hazard fonksiyonunun Weibull dağılımına sahip olduğu parametrik gamma kırılganlık modeli dikkate alınmıştır. Hesaplamalarda R istatistiksel paket programından yararlanılmıştır.

4. Uygulama

Suç kavramı insanlık tarihiyle birlikte var olan ve her toplumda karşılaşılan bir olgudur. Yalnız yetişkin insanlar değil çocuklar da suç işlemektedir ve toplumsal açıdan özellikle çocukların karıştığı suçlar daha önemli olmaktadır. On sekiz yaşından küçüklerin karıştığı suçlar çocuk suçluluğu (child delinquency) olarak ayrıca incelenmektedir. Yaşam sürdürme analizinin uygulandığı bu konuda yapılan çalışmalarda Kaplan-Meier yaşam sürdürme fonksiyonu tahmininden ve Cox regresyon analizinden yararlanılmıştır (19, 20).

Bu çalışmada Ankara ilinde kayıtlara geçen olaylar üzerinden en az bir suça karıştığı bilinen 448 çocuk 01.01.2006 tarihinden itibaren bir yıl boyunca izlenerek ikinci kez suç işlemelerine kadar geçen süre ölçülmüştür. Bu süre içinde 102 çocuk tekrar suça karışmıştır. İzleme süresi sona erdiğinde suça karışmayan çocuklara ilişkin süre durdurulmuş gözlem olarak kabul edilmiştir. Suça ikinci kez karışma süresi üzerinde etkili olduğu düşünülen, çocuğun cinsiyeti (kız=1, erkek=2), yaşı, öğrenim durumu (okula gitmemiş=1, öğrenci=2, okul terk=3, mezun=4), doğum yeri (Ankara=1, komşu iller=2, diğer iller=3) ve işlediği suç türü (yaralama=1, hırsızlık=2, yankesicilik-kapkaç=3, diğer=4) eşdeğişken olarak alınmıştır. Dikkate alınan eşdeğişkenler, düzeyleri ve bir yıl içinde yeniden suça karışanlara ilişkin bilgiler Tablo 1'de yer almaktadır (21).

Önce veriye Cox orantılı hazard modeli uygulanmış ve analize beş eşdeğişkenin hepsi alınmıştır. Analize katılan eşdeğişkenlerden yalnızca öğrenim durumu ve suç türü değişkenlerinin yeniden suç işlenmesinde etkili olan eşdeğişkenler olduğu sonucuna ulaşılmıştır ($p<0.01$). Diğer eşdeğişkenlerin yeniden suç işlenmesinde etkili olduğuna ilişkin bir delil bulunamamıştır. $\beta = 0$ vektörü için Log-olabilirlik değeri -584.948, Cox orantılı hazard modeli için ise -547.079 olarak elde edilmektedir. Olabilirlik oran testi Cox modelinin yüksek derecede anlamlı olduğunu göstermektedir (p=0.000).

Tablo 1. Eşdeğişkenler ve düzeyleri

Eşdeğişken	Düzey	Suça karışanlar	Yeniden suça karışanlar
Cinsiyet	Kız (1)	75	22
	Erkek (2)	373	80
Öğrenim durumu	Okula gitmemiş (1)	42	21
	Öğrenci (2)	198	24
	Okul terk (3)	122	37
	Mezun (4)	86	20
Doğum yeri	Ankara (1)	135	28
	Komşu iller (2)	87	15
	Diğer iller (3)	226	59
Suç türü	Yaralama (1)	152	20
	Hırsızlık (2)	105	45
	Yanks-Kapkaç (3)	36	19
	Diğer (4)	155	18

Cox orantılı hazard modeline gamma kırılganlık faktörünün ilavesi ile gamma kırılganlık modeli kurulmuştur. Gamma kırılganlık modeline ilişkin log-olabilirlik değeri -547.074 olarak elde edilmiştir. Modelin yüksek derecede anlamlı olduğunu göstermektedir. Ancak Cox modeli ile gamma kırılganlık modeli karşılaştırıldığı zaman olabilirlik oran testi sonucu gamma kırılganlık modelinin anlamlı olduğuna ilişkin bir delil bulunmadığı sonucuna varılmıştır (p=0.919). Cox orantılı hazard modeline kırılganlık faktörünün eklenmesinin değişkenliğin açıklanmasında ilave katkısı olmamıştır. Rastgele etkinin varyansı da bu sonuca uygun olarak 0,00005 değerini almıştır ve sıfıra çok yakındır. Bu sonuç bireye ilişkin hazard hızı ile yığına ilişkin hazard hızı hemen hemen aynı olduğunu göstermektedir. Her iki modele ilişkin katsayı tahminleri ve p-değerleri Tablo 2'de gösterilmiştir.

Öğrenim durumu ve suç türü kategorik değişkenlerdir, değişkenlerin ilk kategorileri referans kategori olarak alınmıştır. Anlamlı olan değişken düzeylerine ilişkin göreli riskler elde edilmiştir. Öğrenim durumu sabitken hırsızlık suçu işleyenlerin yaralamaya göre yeniden suç işleme riski 3.7 kat fazla ($exp(1.298) = 3.7$), yankesicilik-kapkaç suçu işleyenlerin yaralamaya göre riski 4.8 kat daha fazladır. Suç türü sabitken okula hiç gitmeyenlerin öğrenci olanlara göre yeniden suç işleme riski 2 kat daha fazla olmaktadır. Her iki modele ilişkin olarak elde edilen katsayı tahminleri aynıdır. Kırılganlık faktörünün ilave edilmesi göreli riskleri değiştirmemiştir.

Tablo 2. Cox Orantılı Hazard ve Gamma Kırılganlık Modeli

Parametre	Cox	p	Gamma	p
Öğrenim		0.012		0.012
Öğrenci	-0.715	0.026	-0.715	0.026
Okul terk	0.147	0.611	0.147	0.611
Mezun	-0.047	0.888	-0.047	0.888
Suç türü		0.000		0.000
Hırsızlık	1.298	0.000	1.298	0.000
Yank-kap.	1.565	0.000	1.565	0.000
Diğer	-0.181	0.579	-0.181	0.579
σ^2			0.00005	
Log-L	-547.079		-547.074	

İkinci olarak temel hazard fonksiyonunun Weibull dağılımına sahip olduğu parametrik model ile parametrik modele gamma kırılganlık faktörünün eklendiği Weibull orantılı hazard gamma kırılganlık modeli dikkate alınmıştır. Önce analize beş eşdeğişkenin hepsi alınmıştır ve yalnızca öğrenim durumu ve suç türü değişkenlerinin yeniden suç işlenmesinde etkili olan eşdeğişkenler olduğu sonucuna ulaşılmıştır ($p<0.01$). Diğer eşdeğişkenlerin yeniden suç işlenmesinde etkili olduğuna ilişkin bir delil bulunamamıştır. Weibull modeline ilişkin $\beta = 0$ vektörü için olabilirlik oranı testi, 6 sd'li χ^2=77.5 (p=0,0000) değerine sahiptir, istatistiksel bakımdan yüksek derecede anlamlıdır ve modelin uygun bir model olduğunu göstermektedir.

Parametrik Weibull modeline gamma kırılganlık faktörü eklenerek Weibull orantılı hazard gamma kırılganlık modeli elde edilmiştir. Parametrik Weibull ve Weibull orantılı hazard gamma kırılganlık modeline ilişkin katsayı tahminleri ve p-değerleri Tablo 3'de verilmiştir. Weibull orantılı hazard gamma kırılganlık modeli ile Weibull modeli olabilirlik oran testi ile karşılaştırılmış ve istatistiksel bakımdan yüksek derecede anlamlı bulunmuştur (p=0,00000).

Parametrik Weibull modeline gamma kırılganlık faktörünün eklenmesi gerektiği sonucuna varılmıştır. Bireye ilişkin hazard hızı ile yığın hazard hızı farklıdır. Rastgele etkiye ilişkin gamma dağılımının varyansı 2.79 olarak elde edilmiştir. Eşdeğişken değerleri benzer olan bireyler arasında risk bakımından önemli farklar bulunduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Tablo 3. Parametrik Weibull ve Gamma Kırılganlık Modeli

Parametre	Weibull	p	Gamma	p
Öğrenci	1.286	0.028	0.167	0.192
Okul terk	-0.279	0.586	-0.250	0.652
Mezun	0.100	0.866	-0.105	0.856
Hırsızlık	-2.327	0.000	-0.657	0.004
Yank-kap.	-2.840	0.000	-0.913	0.004
Diğer	0.303	0.602	-0.208	0.647
λ	1.778	0.000	0.172	0.000
ν	8.144	0.000	5.829	0.000
σ^2			2.79	
Log-L	-697.716		-451.621	

İki model arasında katsayı tahminlerinde farklar vardır. Kırılganlık faktörünün bireylere ilişkin riskleri değiştirdiğini söylemek mümkün olmaktadır. Weibull modele göre öğrenim durumu aynı olanlar arasında, hırsızlık suçu işleyenlerin yaralamaya göre yeniden suç işleme riski 10 kat daha fazla, yankesiciliğin yaralamaya göre riski 17 kat fazla olmaktadır. Suç türü sabitken, öğrenci olanların okula hiç gitmeyenlere göre yeniden suç işleme riski 3.6 kat daha fazladır. Gamma kırılganlık modelinde ise aynı kırılganlık ve öğrenim durumu değişkenine sahip olanlar bakımından hırsızlık suçu işleyenlerin yaralamaya göre yeniden suç işleme riski 1.9 kat daha fazla, yankesiciliğin yaralamaya göre riski 2.5 kat fazla olmaktadır. Aynı kırılganlık ve suç türü değişkenine sahip olanlar bakımından öğrenci olanların okula gitmeyenlere göre yeniden suç işleme riski 1.18 kat daha fazladır.

Cox modelinde ve Weibull modelinde herhangi bir risk faktörü bakımından karşılaştırılan bireyler için diğer risk faktörlerinin değişmez ya da aynı olduğu varsayılmaktadır. Kırılganlık modellerinde risk bakımından karşılaştırılan bireylerin ek olarak aynı kırılganlık değerine sahip olduğu varsayılmaktadır. Böylece sonuçların yorumları tüm gözlenebilen ve gözlenemeyen değişkenlere ilişkin olarak yapılmaktadır.

5. Tartışma ve Sonuç

Analize konu olan veri setinde kimi zaman bilinmeyen faktörlere bağlı olarak ortaya çıkan, gözlemlenemeyen değişkenlik bulunabilmektedir. Bu durumda klasik yaşam sürdürme analizinde kullanılan modeller başarısızlık yapısının açıklanmasında yetersiz kalmaktadır. Veride gözlemlenemeyen heterojenliğin bulunması ve modele dâhil edilmemesi hatalı sonuçlara yol açabilmektedir. Klasik analiz tekniklerinin yanı sıra bireyler arasında farklılıkların bulunduğuna işaret eden kırılganlık modellerinin dikkate alınması başarısızlık yapısının daha ayrıntılı biçimde anlaşılmasında yardımcı olmaktadır.

Bu çalışmada kırılganlık kavramı ve gamma kırılganlık modelleri incelenmiş ve suça bir kez karışmış olan çocukların tekrar suç işleme süreleri üzerinde hangi değişkenlerin etkili olduğu, kırılganlık faktörünün modelde meydana getirdiği değişikler araştırılmıştır. Dikkate alınan modellerin hepsinde öğrenim düzeyi ve işlenen suç türünün yeniden suça karışmada etkili olduğu sonucuna varılmıştır. Cox orantılı hazard modeline gamma kırılganlık faktörünün eklenmesinin değişkenliğin açıklanmasında ilave katkısı olmadığı, ancak parametrik Weibull modeline gamma kırılganlık faktörünün eklenmesinin değişkenliğin açıklanmasında ilave katkısı olduğu sonucuna varılmıştır.

Kaynakça

[1] Cox, D. R. 1972. Regression Models and Life Tables. Journal of the Royal Statistical Society, B 34, 187-220.

[2] Klein, J. P., Moeschberger M. L. 2003. Survival Analysis: Techniques for Censored and Truncated Data. Springer, New York, 536 s.

[3] Lawless, J. F. 2003. Statistical Models and Methods for Lifetime Data. Wiley, New York, 630 s.

[4] Vaupel, J. W., Manton, K. G ., Stallard, E. 1979. The Impact of Heterogeneity in Individual Frailty on the Dynamics of Mortality. Demography, 16, 439-454.

[5] Clayton, D., Cuzick, J. 1985. Multivariate Generalizations of the Proportional Hazards Model. Journal of the Royal Statistical Society (A), 148, 82-117.

[6] Hougaard, P. 1984. Life Table Methods for Heterogeneous Populations. Biometrika, 71, 75-83.

[7] Hougaard, P. 1986. Survival Models for Heterogeneous Populations Derived from Stable Distributions. Biometrika, 73, 387-396.

[8] Hougaard, P. 1995. Frailty Models for Survival Data. Lifetime Data Analysis, 1, 255-273.

[9] Aalen, O. O. 1988. Heterogenity in Survival Analysis. Statistics in Medicine, 7, 1121-1137.

[10] Therneau, T.M., Grambsch, P.M., Pankratz, V.S. 2003. Penalized Survival Models and Frailty. Journal of Computational and Graphical Statistics, 12, 156-175.

[11] Huber-Carol C., Vonta F. 2004. Frailty Models for Arbitrarily Censored and Truncated Data. Lifetime Data Analysis, 10, 369-388.

[12] Hanagal, D. 2009. Weibull Extension of Bivariate Exponential Regression Model with Different Frailty Distributions. Statistical Papers, 50, 29-49.

[13] Hanagal, D. 2010. Modelling Heterogeneity for Bivariate Survival Data by the Compound Poisson Distribution. Model Assisted Statistics and Applications, 5, 1-9.

[14] Wienke, A. 2011. Frailty Models in Survival Analysis. Chapman & Hall, New York, 298 s.

[15] Duchateau, L., Janssen, P. 2008. The Frailty Model. Springer, New York, 316 s.

[16] Aalen, O. O., Borgan, Ø., Gjessing, H., K. 2008. Survival and Event History Analysis: A Process Point of View, Springer, Berlin, 355 s.

[17] Hanagal D.D. 2011. Modeling Survival Data Using Frailty Models, Chapman &Hall New York, 312 s.

[18] Abbring, J., van den Berg, G. J. 2007. The Unobserved Heteregonity Distribution in Duration Analysis. Biometrika, 94, 87-99.

[19] DeHart, D. D., Moran, R. 2015. Poly-Victimization Among Girls in the Justice System: Trajectories of Risk and Associations to Juvenile Offending. Violence Against Women, 21(3), 291-312.

[20] Ryan, J.P., Abrams, L.S., Huang, H. 2014. First-Time Violent Juvenile Offenders: Probation, Placement, and Recidivism. Social Work Research, 38(1), 7-18.

[21] Göz, Ö. 2007. Orantılı hazard Modelinin Zamana Bağlı Değişkenlerle Genişletilmesi ve Çocuk suçluluğu Üzerine Bir Uygulama. Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 70 s, Ankara.