

GeoGebra ile Yapılan İspat Çalışmalarının Öğretmen Adayları ve Öğretmenlerin Sözsüz İspat Yapma Becerileri Üzerine Etkililiğinin Karşılaştırılması

Fatma KURTULUŞ¹, Esra YILDIZ²

Öz: Bu araştırma, GeoGebra ile ispat becerilerini geliştirmeye yönelik olarak tasarlanan eğitim programının, öğretmen ve öğretmen adaylarının sözsüz ispat edebilme becerileri üzerine etkililiğinin değerlendirilmesi amacıyla gerçekleştirilmiştir. Çalışmada nicel ve nitel verilerin birlikte kullanıldığı karma yöntem kullanılmıştır. Çalışmanın katılımcıları 35 Matematik öğretmen adayı ve 6 matematik öğretmeninden oluşmaktadır. Veriler “İspat Beceri Testiyle” toplanmıştır. Katılımcılara beş haftalık GeoGebra programıyla sözsüz ispat becerilerini geliştirme eğitimi verilmiştir. Nicel veriler için katılımcıların ön-test ve son-test puanları SPSS programı kullanılarak Wilcoxon İşaretli Sıralar testi ve Mann Whitney-U testiyle analiz edilmiştir. Wilcoxon İşaretli Sıralar testi sonucunda hem öğretmen adaylarının hem öğretmenlerin ön-testleriyle son-testleri arasında son-test lehine anlamlı farklılık tespit edilerek GeoGebra programının öğretmen ve öğretmen adaylarının sözsüz ispat becerilerinin gelişimini sağladığı görülmüştür. Mann Whitney-U testi sonucunda öğretmen ve öğretmen adaylarının ön-test puanları arasında farklılık bulunmamışken son-test puanları arasında öğretmenlerin lehine anlamlı farklılığın olduğu belirlenmiştir. GeoGebra programının, öğretmenleri daha çok geliştirdiği görülmüştür. Araştırmanın nitel verilerini, ölçüt örnekleme yöntemiyle gönüllü seçilen 9 katılımcının (5’i öğretmen adayı, 4’ü öğretmen) ispat beceri testine verdikleri cevaplar oluşturmaktadır ve bu cevaplar Kinach (2002) anlama düzeylerine göre sınıflandırılmıştır. Nitel verilerin analizi sonucunda katılımcıların ön-teste göre son-testte daha açıklayıcı cevaplar verdikleri tespit edilmiş, Kinach (2002) anlama düzeylerine göre öğretmen adaylarının işlemsel, öğretmenlerin kavramsal boyutta oldukları belirlenmiştir.

Anahtar kelimeler: Matematiksel ispat, sözsüz ispat, GeoGebra

Comparison of the Effectiveness of Proof Training Program Conducted with GeoGebra on the Non-Verbal Proving Skills of Pre-Service Teachers and Teachers

Abstract: This research was conducted to evaluate the effectiveness of the training program designed to improve proof skills with the dynamic geometry software GeoGebra, on pre-service teachers and teachers. Mixed method were used. The participants include 35 junior pre-service teachers and 6 mathematics teachers. Data were collected by “Proof Skill Test”. A five-week GeoGebra nonverbal proof skills

Geliş tarihi/Received: 22.08.2023

Kabul Tarihi/Accepted: 10.10.2023

Makale Türü: Araştırma Makalesi

*Bu çalışma birinci yazarın yüksek lisans tezinden üretilmiştir.

¹ MEB, fatoscak45@gmail.com, ORCID: 0000-0003-2923-8824

² Dr. Öğretim Üyesi, İstanbul Medeniyet Üniversitesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, esra.yildiz@medeniyet.edu.tr, ORCID:0000-0003-2771-4647

Atf için/To cite: Kurtuluş, F. & Yıldız, E. (2023). GeoGebra ile yapılan ispat çalışmalarının öğretmen adayları ve öğretmenlerin sözsüz ispat yapma becerileri üzerine etkililiğinin karşılaştırılması. *Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 20(3), 1244-1268. <https://doi.org/10.33711/yyuefd.1348064>

development training program was implemented with the participation of two groups. For quantitative data, the pre-test and post-test scores were analyzed with the SPSS program. As a result, a significant difference was found between pre-tests and post-tests scores of the pre-service teachers and mathematics teachers in favor of the post-test. According to results of the analyses, that while there was no difference between the pre-test scores of teachers and pre-service teachers, there was a significant difference in the post-test scores in favor of the teachers. For qualitative data, 5 pre-service teachers and 4 mathematics teachers were selected among the volunteer participants using the criterion sampling method and their solutions were classified based on their understanding level according to Kinach (2002). As a result, the participants gave more adequate and descriptive answers in the post-test compared to the pre-test, and according to Kinach (2002) understanding levels, while the pre-service teachers were in the operational dimension and the teachers were in the conceptual dimension.

Keywords: Mathematical proof, proofs without words, GeoGebra

Giriş

İspat, bir önermenin doğruluğunu veya yanlışlığını göstermek için tanım, teorem, aksiyom gibi matematiksel elemanları kullanarak, mantıksal çıkarımların yapıldığı ikna etmeye yönelik olarak tasarlanan bir süreçtir (Dede & Karakuş, 2014; Doruk & Kaplan, 2017; Uygur Kabael, 2020). Bu süreci doğru olarak planlamanın matematiğin en zor uğraş alanlarından birisi olduğunu söylemek mümkündür (Doğan, 2019). Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi tarafından hazırlanan "Okul Matematiği İlkeleri ve Standartları" öğretim programındaki standartlardan biri olan ispatın, Milli Eğitim Bakanlığı [MEB] öğretim programlarında da hedefleri bulunmaktadır (Güler, 2020; Knuth, 2002; MEB, 2018; NCTM, 2000; Zeybek Şimşek, 2020). Öğrencilerin büyük çoğunluğunun ispat yapmada zorlanmaları, onların ispat ile ilgili görüşlerini olumsuz yönde etkilemektedir. Öğretmenlerin, öğrencilerin başarısını ve görüşlerini değiştirme konusunda önemli rollere sahip oldukları (Doruk vd., 2014) göz önünde bulundurulduğunda, öğretmenlerin ispat yapma konusunda derinlemesine bilgi sahibi olmalarının ve öğrencilerini uygun etkinliklerle destekleyebilmeleri açısından önemini ortaya koymaktadır. Bu sebeple öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının ispat becerilerinin gelişimine önem verilmesi ve çeşitli eğitimlerle destek sağlanması gereklidir. Bu noktada yaşanan en büyük sıkıntılardan birinin öğretmenlerin ispat bilgilerini sınıf içi uygulamalara taşımakta zorluk yaşamaları olduğu söylenebilir (Doğan, 2019). Mevcut matematik öğretmen eğitimi programımızda, öğretmen adayları derslerin önemli bir bölümünde matematiksel ispatın ne olduğu ve yöntemleri hakkında bilgi sahibi olma fırsatı bulmaktadır. Ancak, öğretmen adaylarının bu derslerde matematiksel ispat yapma becerilerini geliştirmeleri ve ispat yapmaları gerektiğinde hangi yöntemi nasıl kullanacaklarını bilmeleri konusunda halen zorluk yaşadıkları görülmektedir (Doruk & Güler, 2014; Güler & Dikici, 2012; Moralı vd., 2006). Matematik öğretmenlerinin de benzer şekilde öğrencilerin ispat yapma becerilerini geliştirmek için uygun öğrenme ortamları oluşturmaları önemlidir (Altıntaş & İlgün, 2020; Moralı vd., 2006).

Alan yazında ispatın nasıl yapılacağına yönelik geliştirilen ispat yöntemleri incelendiğinde farklı sınıflandırmaların olduğu görülmektedir (Gökkurt vd., 2014; Uygur Kabael, 2020). MEB'in (2011) yaptığı sınıflandırmada ispat tümevarım ve tümdengelim olarak iki gruba ayrılmaktadır (Barak, 2018). Tümdengelim içeriğinde doğrudan ispat, dolaylı ispat, olmayana ergi yöntemi ile ispat, çelişki yöntemi ile ispat, deneme yöntemi ile ispat ve aksine örnek vererek ispat olmak üzere bölümlere ayrılmıştır (Barak, 2018). Uygur Kabael (2020) yaptığı

sınıflandırmada ispatı önermenin yanlış olma hali ve önermenin doğru olma hali olarak iki grupta toplamaktadır. Önermenin yanlış olma hali aksine örnek verme yöntemi ile açıklanırken, önermenin doğru olma hali doğrudan ispat ve dolaylı ispat yapma olarak iki grupta değerlendirilmiştir. Doğrudan ispat yapma tekniği tüketerek ispat, durumlarla ispat, varlık ispatı, tümevarım olarak belirlenmişken, dolaylı ispat yapma tekniği karşıt ters ile ispat ve çelişki ile ispat olmak üzere iki grupta incelenmiştir. Yapılan farklı sınıflandırmalar incelendiğinde ispatın daha çok mantıksal çıkarımların yapıldığı cebirsel bir süreç olduğu görülmektedir. Cebirsel ispat, matematiksel sembolleri kullanarak gerekli mantıksal çıkarımların yapıldığı ispat yapma olarak açıklanabilir (Arslan & Yıldız, 2010; Öztürk & Kaplan, 2017). Ancak ispat sadece cebirsel olarak yapıldığında ispatın özü yeterince anlaşılabilir (Tekin & Konyalıoğlu, 2010). Bu nedenle ispat yapılırken cebirsel yaklaşımın görselleştirme yaklaşımıyla desteklenmesi gerektiği düşünülmektedir (Özer & Şan, 2013).

Hem cebirsel hem görsel düşünmenin bir arada kullanılmasını sağlayan alternatif ispat yöntemlerinden biri Sözsüz ispatlardır (Polat, 2018; Tekin & Konyalıoğlu, 2010). Sözsüz ispatlar; bir matematiksel ifadenin neden doğru olabileceğini göstermeye yarayan, kelimeler olmadan yalnızca şekillere, şemalara, grafiklere, benzer çizimlere dayandırılarak yapılan ve sayılar yerine genellikle nokta, kare, top, küp veya basitçe anlaşılan nesnelere kullanıldığı resimler veya diyagramlardır (Alsina & Nelsen, 2010; Bardelle, 2010; Gierdien, 2007; Yiğit Koyunkaya, 2020). Sözsüz ispat konusunda yapılan çalışmalar incelendiğinde sözsüz ispatların öğrencilerin zihninde cebirsel bir ispatın nasıl yapılabileceğine ilişkin önemli fikirler verdiği ve öğrencilerin akıl yürütme becerilerinin gelişimine katkı sağladığı görülmektedir (Bell, 2011; Polat, 2018; Şadan & Uğurel, 2020). Sözsüz ispatlar, cebirsel ispatların yerini tutma veya ispat olarak kabul görme amacıyla ortaya çıkmamıştır. Halen sözsüz ispatların, ispat yapma yöntemleri arasında yer alıp almayacağı tartışma konusu olmaktadır (Demircioğlu & Polat, 2016a; Şadan & Uğurel, 2020). Sözsüz ispatların, cebirsel ispatlara bir alternatif olarak değil onları desteklemek ve anlaşılmasını kolaylaştırmak için ortaya çıktığını söylemek daha doğru bir yaklaşım olmaktadır.

Son yıllarda matematik yazılımlarının görselleştirme özelliklerinin ön plana çıkmasıyla, sözsüz ispat yapma sürecinde dinamik geometri programlarının kullanımına yönelik yapılan çalışmalarda bir artış gözlemlenmektedir (Baki, 1996; Baydaş, 2010; Güven, 2002; Karataş & Güven, 2015; Tutkun vd., 2011; Stupel et al., 2019; Şadan & Uğurel, 2020). Alan yazın incelendiğinde sözsüz ispatlar ile ilgili olarak yapılan çalışmalarda öğretmenlerin sözsüz ispatı zor buldukları ancak dinamik geometri programlarının sözsüz ispat yapma becerilerini geliştirme sürecini destekleyebileceği görüşünde oldukları tespit edilmiştir (Demircioğlu & Polat, 2016b; Şadan & Uğurel, 2020). Štrausová ve Hašek (2013) ile Gravina'nın (2008) çalışmalarında bu ispatlar "Dinamik Görsel İspat" olarak ele alınmıştır. Štrausová ve Hašek'in (2013) çalışmasında ortaokul matematik öğretiminde ve matematik öğretmeni yetiştirme programlarında kullanılan ve dinamik geometri yazılımı tarafından oluşturulan dinamik görsel ispat materyallerinden seçilmiş örnekler ele alınmıştır. Bu çalışmada aynı zamanda dinamik görsel ispatların cebirsel ispatlarla karşılaştırılması yapılmış ve dinamik ispatların cebirsel ispatlardan daha üstün olduğu sonucuna ulaşıldığı görülmüştür. Gravina'nın (2008) çalışmasında dinamik görsel ispatların ne anlama geldiği açıklanmaya çalışılmıştır. Bu çalışmada dinamik ortamda yapılan görsel ispat örneklerine yer verilmiştir. Bu ispatların akıl yürütme becerilerini geliştirdiği sonucuna ulaşılmıştır. Şadan ve Uğurel'in (2020) çalışmasında GeoGebra açık sitesinden aldıkları sözsüz ispat örneklerine yer verilmiştir. Bu ispatların dinamik yazılımlarda yapılmasının sağladığı faydalardan bahsedilmiştir.

Dinamik yazılımın renklendirme, sayısal doğrulama ve deneme yapabilmeyi olanak sağladığı belirtilmiştir. Dinamik görsel ispatların, statik görsel ispatlardan üstünlüğü belirtilmiştir. Stupel et al. (2019) çalışmalarında sözsüz ispatların dinamik geometri yazılımlarında kullanılması ele alınmıştır. Çalışmada geometri problemlerinin sözsüz ispatları ve GeoGebra yazılımında yapılan sözsüz ispatları incelenmiştir. Çalışmada bu ispatların dinamik yazılımlarda yapılmasının sağladığı faydalardan bahsedilmiştir. GeoGebra yazılımı gibi dinamik yazılımların genelleme ve çıkarım yaparak varsayımlarda bulunmayı sağladığı, sürüklenme yaparak çeşitli durumlarda oluşan değişimlerin görsel olarak ele alındığı belirtilmiştir.

Dinamik geometri programı ile öğrenciler karmaşık şekilleri oluşturabilme, bağlantı kurma, keşfetme, varsayımda bulunma, formüle etme gibi imkânlarla sahip olmaktadır (Karataş & Güven, 2015; Vatansever, 2007). Bu çalışmalarda, dinamik geometri yazılımlarının sözsüz ispat yapmayı desteklediği, kolaylaştırdığı ve öğrencilerin ispat yapma becerilerinin gelişimini desteklediği tespit edilmiştir (Demircioğlu & Polat, 2016a; Doyle et al., 2014; Gravina, 2008; Štrausová & Hašek, 2013; Hanna, 2000; Stupel et al., 2019; Şadan & Uğurel, 2020). Ek olarak, teknolojik yazılımların, öğrencilerin mantıksal çıkarımlar yapmalarını görselleştirmek suretiyle kolaylaştırması nedeniyle öğrencilerin özellikle sözsüz ispat yapma becerileri üzerinde olumlu etkileri olduğunu söylemek mümkündür (Karataş & Güven, 2015; Şadan & Uğurel, 2020; Yiğit Koyunkaya, 2020).

Cebirsel ispatların yanında sözsüz ispatların da kullanıldığı dinamik yazılımlardan GeoGebra yazılımı; matematiğin alt dallarından olan cebir, analiz ve geometri alanlarını birleştiren Türkçe ara yüzü olan bir yazılımdır (Ogan & Ibibo, 2018; Şadan & Uğurel, 2020). GeoGebra dinamik geometri yazılımı internette çok sayıda farklı dile çevrilmiştir. Dünya çapında birçok eğitimci bu yazılımı kullanmaktadır ve bu yazılım gün geçtikçe artan bir kullanıcı topluluğuna sahiptir (Hohenwarter et al., 2008). GeoGebra'nın cebir, grafik, tablo gibi çoklu gösterim yapısı sayesinde değişkenler arası ilişkiler kolayca çıkarılabilmekte, değişkenler arasında geçiş yapılabilen ve böylece sözsüz ispatların öğretiminde kolaylık sağlanabilmektedir (Hıdıroğlu & Bukova Güzel, 2014; Şadan & Uğurel, 2020). Literatür incelendiğinde sözsüz ispatların dinamik yazılımlarda kullanılmasının kolaylaştırıcı olması nedeniyle matematik eğitiminde sözsüz ispat yöntemini dinamik ortamlarda inceleyen çalışmaların artması önem arz etmektedir. Bu araştırmanın amacı, dinamik geometri yazılımı olan GeoGebra ile ispat becerilerini geliştirmeye yönelik olarak tasarlanan bir eğitim programının öğretmen ve öğretmen adaylarının sözsüz ispat becerileri üzerine etkililiğinin karşılaştırılarak değerlendirilmesidir.

Yöntem

Araştırma Modeli

Bu çalışmada, çeşitli veri toplama araçlarının bir arada kullanıldığı sıralı açıklayıcı desen kullanılmıştır. Kullanılan yöntemde ilk olarak nicel olarak elde edilen veriler toplanıp analizi yapılır, elde edilen nicel sonuçlara göre nitel veriler toplanarak analiz edilir ve iki veri analizi tartışma bölümünde birleştirilir ve derinlemesine incelenir (Baki & Gökçek, 2012). Nitel verilerden elde edilen veriler, Kinach'ın (2002) geliştirdiği anlama düzeyleri çerçevesinde analiz edilmiştir. Çalışmanın başlaması için öncelikle uygulamanın yapılacağı üniversitenin Etik Kurulundan onay ve Eğitim Fakültesi Dekanlığından uygulama izni alınmıştır.

Katılımcılar

Araştırmanın katılımcıları amaçsal örnekleme türlerinden ölçüt örnekleme ile belirlenmiştir. Ölçüt örnekleme yönteminde, katılımcılar önceden belirlenen kriterleri sağlayanlar arasından seçilir (Baltacı, 2018). Çalışmanın katılımcıları belirlenirken katılımcıların GeoGebra dinamik geometri yazılımını kullanmayı önceden biliyor olmaları bir kriter olarak belirlenmiştir. Çalışmada 2019-2020 eğitim öğretim yılı Orta Karadeniz Bölgesinde bir ilin devlet üniversitesinde okuyan İlköğretim Matematik Öğretmenliğinde öğrenim gören üçüncü sınıf 35 öğretmen adayı ve Matematik Eğitiminde yüksek lisans yapan 6 matematik öğretmeni olmak üzere 41 aday oluşturmaktadır. Katılımcılarla öncelikle araştırmacılar tarafından tasarlanan beş haftalık GeoGebra ile sözsüz ispat becerilerini geliştirme eğitimi yapılmıştır. Araştırmanın nicel verileri, 41 aday ile yapılan ispat beceri testlerinden elde edilmiştir. Araştırmanın nitel verileri için gönüllü katılımcılar arasından ön-teste göre son-testte yüksek puan alan katılımcılara arasından belirlenmiştir. Araştırmanın nitel bölümünün katılımcıları 5'i öğretmen adayı, 4'ü öğretmen olmak üzere toplam 9 kişiden oluşmaktadır. Seçilen bu katılımcılardan öğretmen adayları A_1, A_2, A_3, A_4 ve A_5 ; matematik öğretmenleri ise M_1, M_2, M_3 ve M_4 olarak kodlanmıştır.

Araştırma Problemi

Dinamik geometri destekli verilen Sözsüz İspat Becerileri eğitiminin matematik öğretmeni ve öğretmen adaylarının sözsüz ispat yapma becerileri üzerine nasıl bir etkisi vardır?

Alt Problemler

- Öğretmen adayları ve öğretmenler kendi aralarında karşılaştırıldıklarında ön test puanları ile son test puanları arasında anlamlı bir farklılık var mıdır?
- Öğretmenler ve öğretmen adaylarının son-test puanları birbirleriyle karşılaştırıldığında sözsüz ispat yapma becerisi açısından anlamlı bir farklılık var mıdır?
- İspat testine verilen yanıtlar nitel olarak incelendiğinde öğretmen adayları ve öğretmenlerin ön test ile son test sorulara yaptıkları açıklamalar arasında belirgin bir farklılık var mıdır?
- Son teste verdikleri cevaplar analiz edildiğinde öğretmen adayları ve öğretmenler Kinach (2002) anlama düzeylerine göre hangi boyutta yer almaktadırlar?

Veri Toplama Araçları

Araştırmanın verileri İspat beceri testi ile toplanmıştır. İspat beceri testinin taslağı literatürden derlenmek suretiyle, birinci araştırmacı tarafından oluşturulmuş, ikinci araştırmacı tarafından uzman görüşü alınarak gerekli düzeltmeler yapılmıştır. Testte cebirsel ve sözsüz ispatlar bir arada bulunmaktadır. İspat Beceri Testi çalışmada hem nicel hem nitel veri toplamak amacı ile kullanılmıştır. Bu test çalışmada ön-test ve son-test olarak uygulanmıştır. Nicel veriler için bir rubrik geliştirilerek her bir katılımcının verdiği yanıtlar değerlendirilmiş ve her bir katılımcı için bir puan oluşturulmuştur. 41 adaya, 10 tane açık uçlu sorudan oluşan ispat beceri testleri ön-test ve son-testte olarak uygulanmıştır.

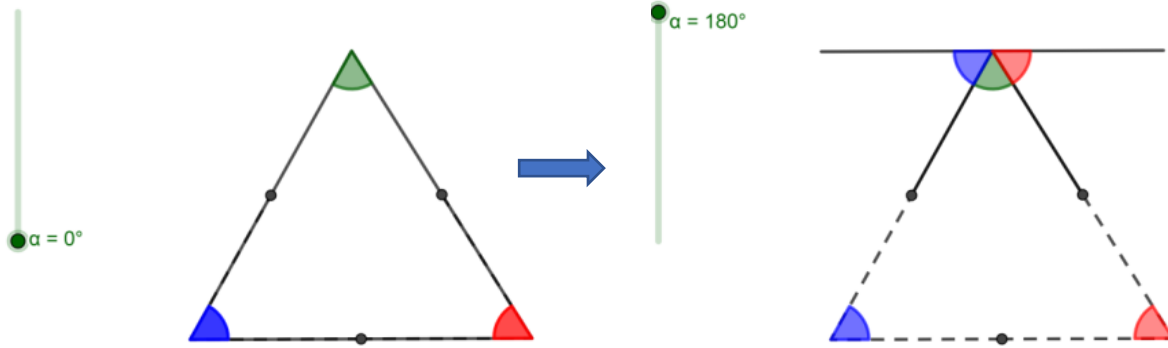
Veri Toplama Süreci

Araştırmanın verilerini toplamak için öncelikle araştırmacılar tarafından oluşturulan veri toplama aracı ön-test olarak uygulanmıştır. Sonra beş hafta boyunca haftada 3 saat olmak üzere

araştırmacılar tarafından tasarlanan ve bil fiil uygulanan GeoGebra dinamik geometri programı ile sözsüz ispat becerilerini geliştirme eğitimi öğretmen adayları ve öğretmenlerle ayrı ayrı olmak üzere iki grup halinde verilmiştir. Eğitim süreci kamera kayıtları ile kayıt altına alınmıştır. GeoGebra eğitim süreci, GeoGebra dinamik geometri yazılımında yapılan sözsüz ispat dinamik geometri etkinlikleri ile gerçekleştirilmiştir. Araştırmacı etkinlikleri adım adım göstererek yapmış, aynı anda öğretmen ve öğretmen adaylarının bireysel olarak kullandıkları bilgisayarlarda etkinlikleri aşama aşama yapmaları istenmiştir. Daha sonra yapılan etkinlikler matematik sınıflarında nasıl kullanılabileceğine ilişkin tartışma ve değerlendirmeler yapılmıştır. GeoGebra eğitim süreci bittikten sonraki hafta 41 adaya son-test uygulanmıştır. Daha sonra araştırmanın nitel bölümü için kriterlere uyan ve gönüllü olarak seçilen 9 katılımcının ispat beceri son-testine verdikleri cevaplar karşılaştırmalı olarak incelenmiştir. Aşağıda verilen Şekil 1 ve Şekil 2’de GeoGebra eğitim sürecinde uygulanan etkinliklerden ikisi gösterilmiştir.

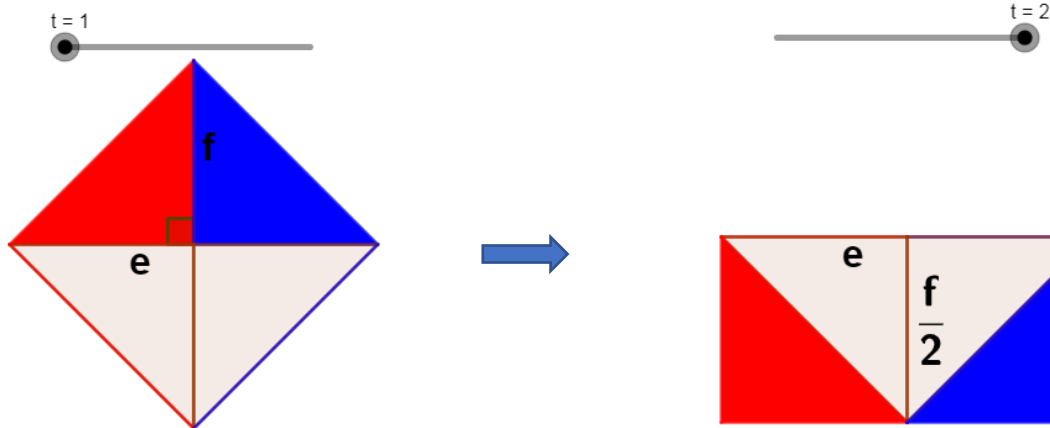
Şekil 1

Üçgenin İç Açuları Toplamı 180° dir Etkinliği



Şekil 2

Eşkenar Dörtgen Alanını Dikdörtgen Yardımıyla Bulma Etkinliği



Verilerin Analizi

Araştırmanın nicel verilerini katılımcıların İspat Beceri Testinden aldıkları ön test- ve son-test puanları oluşturmaktadır. Nicel veriler için bir rubrik geliştirilerek her bir katılımcının verdiği yanıtlar puanlanmış ve ön-test ve son-test puanları SPSS programı kullanılarak analiz edilmiştir. Araştırmanın nitel verilerini katılımcıların ispat beceri testine verdikleri açıklamalar oluşturmaktadır. Nitel veri analizi ise ispat beceri testlerinde verilen cevaplar araştırmacılar tarafından karşılaştırmalı olarak incelenerek yapılmıştır.

İspat Beceri Testinin Analizi

Araştırmada, nicel verilerin analizi SPSS programı ile yapılmıştır. Öğretmen adaylarının, ilişkili iki ölçüm olan ön-testleri ile son-testleri arasında anlamlı bir farkın bulunup bulunmadığını tespit etmek için Wilcoxon İşaretli Sıralar testi yapılmıştır. Verilerin normal dağılmaması nedeniyle bağımlı örneklem t-testinin parametrik olmayan karşılığı olan bu test kullanılmıştır. Aynı testler araştırmanın öğretmen grubu için de yapılmıştır. Öğretmen adayları ile öğretmenlerin ön-test puanları ile son-test puanları arasında anlamlı bir farklılık olup olmadığını belirlemek amacıyla Mann Whitney-U testi uygulanmıştır. Bu test bağımsız iki örneklemin karşılaştırılması için kullanılan parametrik olmayan bir testtir. İspat beceri testlerinin analizi için Balgalmış ve Ceyhan (2019) ile Öztürk ve Kaplan'ın (2017) çalışmalarındaki derecelendirme aşamalarına uygun "Dereceli Puanlama Anahtarı" oluşturulmuştur. Araştırmada, nitel verilerin analizi için içerik analizi tekniği kullanılmış olup ispat beceri testinde yer alan soruların tamamı yerine GeoGebra ile verilen eğitimde kullanılan problemlere paralel olan 4, 7, 8 ve 10 numaralı sorular incelenmiştir. Matematik öğretmeni ve öğretmen adaylarının belirlenen sorularda yaptıkları ispatlar, Kinach (2002) anlama düzeylerine göre karşılaştırılmıştır. Kinach (2002) anlama düzeylerini ikiye ayırmıştır. Bu düzeyler "İşlemsel Anlama" ve "Kavramsal Anlama" düzeyidir. İşlemsel Anlamada, bilgi konu düzeyinde kalarak yüzeysel işlemler, kurallar, terimler kullanılır. Kavramsal anlamada ise "kavram, problem çözme ve epistemik düzey" bulunmaktadır. Kavram düzeyinde kişi genel düşünceler hakkında tanımlamalar, araştırmalar yapabilir; problem çözme düzeyinde kendi düşüncelerini ortaya koyan stratejiler, çözümler bulabilir; epistemik düzeyde ise ispatlama ve gerekçelendirme yapabilir (Toluk Uçar, 2011).

Araştırmanın Güvenirlik ve Geçerlik Çalışmaları

Çalışmanın geçerlik ve güvenilirliğini sağlamak amacı ile hem öğretmenlerin hem öğretmen adaylarının etkinlik uygulama sürecinde her iki araştırmacı da bil fiil bulunmuştur. Her iki sınıfta da uygulanan etkinlikler ve veri toplama araçları aynıdır. Nitel analizler araştırmacılar tarafından bağımsız olarak yapılmış daha sonra bir araya gelinerek uzlaşma yoluna gidilerek yapılmıştır. Araştırmacılar arası uyum 0,85 düzeyindedir.

Bulgular

Araştırmanın verileri için 41 adayın ispat becerileri testlerinden aldıkları puanlar SPSS programı ile incelenerek yapılan Wilcoxon İşaretli Sıralar ve Mann Whitney-U testi analiz sonuçları raporlanmıştır. Çalışmanın nitel verileri için gönüllü katılımcılar arasından ölçüt örnekleme yöntemi ile 9 katılımcının ön-test ile son-teste verdikleri cevaplar karşılaştırmalı olarak incelenerek analiz edilmiştir.

Araştırmanın Birinci Alt Problemine İlişkin Bulgular

Çalışmaya katılan öğretmen adaylarına uygulanan ön-test ile son-test sonucunda alınan puanlar SPSS programına girilmiştir. Öğretmen adaylarının ön-testleri ile son-testleri arasında farklılık olup olmadığını belirlemek için aynı örneklemden alınan iki ortalamayı karşılaştıran bağımlı örneklem t testi uygulanmıştır. Bu sebeple verilerin gerekli varsayımları karşılama durumu incelenmiştir. Öğretmen adaylarından elde edilen ön-testteki verilerin basıklık değeri 2.125 son-testteki verilerin basıklık değeri 2.096 olarak belirlenmiştir. Bu sebeple verilerin basıklık değerleri -2 ile +2 aralığında bulunmaması nedeniyle normal dağılım göstermemektedir. Öğretmen adaylarının sayısı 50'den az olduğu için normallik testinde Shapiro-Wilk testi sonucu analiz edilmiştir. Buna göre ön-testte elde edilen anlamlılık düzeyi 0.047 ve son-testte elde edilen anlamlılık düzeyi 0.036'dır. Shapiro-Wilk testindeki p değeri 0.05'ten az olması nedeniyle bağımlı değişken normal dağılım göstermemektedir.

Öğretmen adaylarının son test ile ön testten aldıkları puanların normal dağılım göstermemesinden dolayı t test için gerekli varsayımlar karşılanmaması nedeniyle bağımlı örneklem t testinin parametrik olmayan karşılığına denk gelen Wilcoxon İşaretli Sıralar testi yapılmıştır. Aşağıda verilen Tablo 1'de bu testin sonuçları gösterilmektedir.

Tablo 1

Öğretmen Adaylarının Ön-Test ve Son-Test Puanlarına Dair Wilcoxon İşaretli Sıralar Testi Sonuçları

Son test- ön test	N	Sıra ortalaması	Sıralar toplamı	Z	P
Negatif sıralar	4	8.13	32.50	-4.235	.000
Pozitif sıralar	27	17.17	463.50		
Eşit sıralar	4				

Yukarıda verilen Tablo 1'de öğretmen adaylarının ön test ve son test verilerinden alınan p değeri 0.05'ten küçük olması nedeniyle son test puanlarının lehine anlamlı bir farklılık elde edilmiştir. GeoGebra ile tasarlanan eğitim programının, öğretmen adaylarının sözsüz ispat yapma becerilerine olumlu etkisinin olduğunu söylemek mümkündür.

Öğretmen sayısının 30'dan az olması ve öğretmenlerin ön-test ile son-test puanları arasında anlamlı bir farklılığın olup olmadığını tespit etmek amacıyla aynı örnekleme ait iki ortalamayı karşılaştıran bağımlı örneklem t-testinin parametrik olmayan karşılığı olan Wilcoxon İşaretli Sıralar testi yapılmıştır. Aşağıda verilen Tablo 2'de bu testin sonuçları gösterilmektedir.

Tablo 2

Matematik Öğretmenlerinin Ön Test ve Son Test Puanlarına Dair Wilcoxon İşaretli Sıralar Testi Sonuçları

Son test- ön test	N	Sıra ortalaması	Sıralar toplamı	Z	P
Negatif sıralar	0	.00	.00	-2.226	.026
Pozitif sıralar	6	3.50	21.00		
Eşit sıralar	0				

Yukarıda verilen Tablo 2'ye göre öğretmenlerin ön-test ile son-test verilerinden alınan p değeri 0.05'den küçük olması nedeniyle son-test puanlarının lehine anlamlı bir fark elde edilmiştir. GeoGebra ile tasarlanan eğitim programının, matematik öğretmenlerinin sözsüz ispat yapma becerilerine olumlu etkisinin olduğunu söylemek mümkündür.

Araştırmanın İkinci Alt Problemine İlişkin Bulgular

Çalışmaya katılan öğretmen adayları ile matematik öğretmenlerinin ön-test puanları arasında anlamlı bir farklılığın olup olmadığını tespit etmek amacıyla bağımsız iki örneklem t testinin parametrik olmayan karşılığı olan Mann Whitney-U testi yapılmıştır. Aşağıda verilen Tablo 3'te bu testin sonuçları gösterilmektedir.

Tablo 3

Matematik Öğretmeni ve Öğretmen Adaylarının Ön Test Puanlarına Dair Mann Whitney U Testi Sonuçları

	N	Sıra Ortalaması	Sıra Toplamı	U	p
Öğretmen Adayları	35	19.67	688.50	58.50	.087
Öğretmenler	6	28.75	172.50		

Yukarıda verilen Tablo 3'e göre öğretmen ve öğretmen adaylarının ön test puanlarından elde edilen p değeri 0.05'ten büyük olması nedeniyle öğretmen ve öğretmen adaylarının ön testlerinde anlamlı bir farklılık olmadığı tespit edilmiştir. Elde edilen sonuca göre araştırmanın başında öğretmen ve öğretmen adaylarının ön-test puanlarının denk sayılabileceği söylenebilir.

Çalışmaya katılan öğretmen adayları ile matematik öğretmenlerinin son test puanları arasında anlamlı olarak bir farklılığın olup olmadığını tespit etmek amacıyla bağımsız iki örneklem t testinin parametrik olmayan karşılığı olan Mann Whitney-U testi yapılmıştır. Aşağıda verilen Tablo 4'te bu testin sonuçları gösterilmektedir.

Tablo 4

Matematik Öğretmeni ve Öğretmen Adaylarının Son Test Puanlarına Dair Mann Whitney U Testi Sonuçları

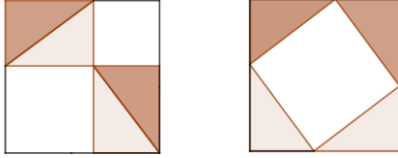
	N	Sıra Ortalaması	Sıra Toplamı	U	p
Öğretmen Adayları	35	18.03	631.00	1.000	.000
Öğretmenler	6	38.33	230.00		

Yukarıda verilen Tablo 4'e göre öğretmen ve öğretmen adaylarının son test puanlarından elde edilen p değeri 0.05'ten küçük olması nedeniyle öğretmen ve öğretmen adaylarının son test puanları arasında anlamlı olarak bir farklılık elde edilmiştir. Farklılık öğretmenlerin lehine gerçekleşmiş, öğretmenlerin son test puan ortalamaları anlamlı bir şekilde yüksek çıkmıştır. GeoGebra ile ispat becerilerini geliştirmeye yönelik olarak tasarlanan bu eğitim programının, öğretmenleri daha çok geliştirdiği söylemek mümkündür.

Araştırmanın Üçüncü Alt Problemine İlişkin Bulgular

Bu bölümde ispat beceri testinde yer alan soruların tamamı yerine GeoGebra eğitim sürecinde kullanılan şekillere paralel olan 4 ve 10 numaralı sözsüz ispat sorularına, gönüllü seçilen 9 katılımcının verdiği yanıtlar incelenmiştir.

4.Soru: Aşağıda verilen görsel ispatın hangi teoreme ait olduğunu belirtiniz. Verilen şekillerden bu ispatın nasıl yapıldığını yorumlayınız.

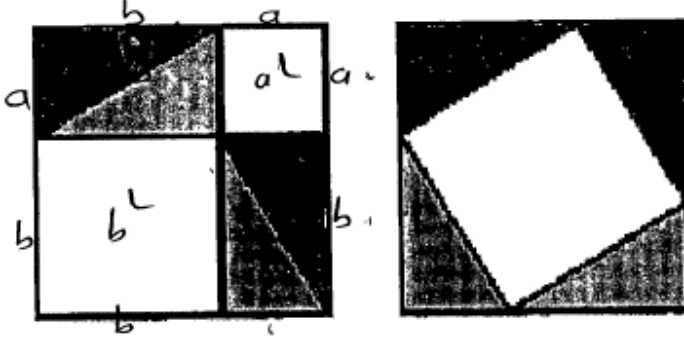


Örnek olarak katılımcılardan birinin ön testte 4. sorudaki yanıtı Şekil 3’te, son testteki yanıtı Şekil 4’te görülmektedir.

Şekil 3

M₃ Kodlu Katılımcının Ön Testte 4. Sorudaki Yanıtı

4. Aşağıda bir teoremin sözsüz ispatı verilmiştir. Verilen bu sözsüz ispatın hangi teoreme ait olduğunu ve ispatın nasıl yapıldığını tartışınız. Aynı renklerde verilen alanlarının eşit olduğunu göz önünde bulundurunuz.



$$\begin{aligned} \text{Tüm alan} &= a^2 + b^2 + 2ab \\ &= (a+b)^2 \end{aligned}$$

Yukarıda verilen Şekil 3’te *M₃* kodlu matematik öğretmenin “Tüm alan = $a^2 + b^2 + 2.a.b = (a + b)^2$ ” şeklinde cevap verdiği görülmektedir. *M₃* kodlu matematik öğretmeni ilk şekildeki karenin kenarlarını *a* ve *b* olarak harflendirerek karenin içindeki şekillerden ilk boyalı olan şeklin alanını *a.b*, *a* kenarlı karenin alanını a^2 , *b* kenarlı karenin alanını b^2 ve ikinci boyalı şeklin alanını *a.b* olarak belirtmiştir. Matematik öğretmeni ilk şekildeki tüm alanın $(a^2 + b^2 + 2.a.b)$ ’ye eşit olduğunu ve bu ifadenin de $(a + b)^2$ ’ne eşit olduğunu tespit etmiştir. Matematik öğretmeni sadece ilk şekildeki karenin alanı hakkında açıklamada bulunmuş, diğer şekildeki kare hakkında bir cevap vermediği hatta ilk şekildeki kare ile olan bağıntısını kurmadığı görülmektedir.

Şekil 4

 M_3 Kodlu Katılımcının Son Testte 4. Sorudaki Yanıtı

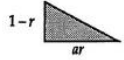
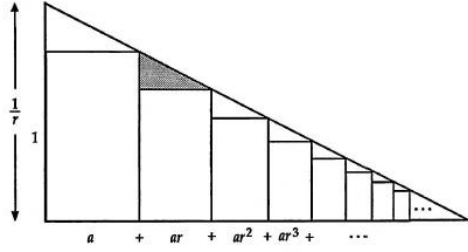
4. Aşağıda bir teoremin sözsüz ispatı verilmiştir. Verilen bu sözsüz ispatın hangi teoreme ait olduğunu ve ispatın nasıl yapıldığını tartışınız. Aynı renklerde verilen alanlarının eşit olduğunu göz önünde bulundurunuz.

Bu ispat $a^2 + b^2 = c^2$ (Pisagor) ifadesini görsel ispatıdır.
 Bu eşitliği derste yaptığımız dik üçgenlerin ötelenerek şekil elde edilmiş gibi ve tüm aşamalar sonucunda $a^2 + b^2 = c^2$ teoremin ispatı olduğu fark edilir.”
 şekli elde edilmiş gibi ve tüm aşamalar sonucunda bu ispatın $a^2 + b^2 = c^2$ teoremin ispatı olduğu fark edilir.”

Yukarıda verilen Şekil 4’te M_3 kodlu matematik öğretmenin “Bu ispat $a^2 + b^2 = c^2$ (Pisagor) ifadesinin görsel ispatıdır. Bu etkinliği derste yaptığımız dik üçgenlerin ötelenerek şekil elde edilmiş gibi ve tüm aşamalar sonucunda $a^2 + b^2 = c^2$ teoremin ispatı olduğu fark edilir.” şeklinde cevap verdiği görülmektedir. M_3 kodlu matematik öğretmeni her iki şekildeki karelerde kenarlara a, b ve c olarak harflendirmeler yapmıştır. Matematik öğretmeni ön-testte ikinci şekildeki kare hakkında hiçbir açıklamada bulunmamışken son-testte bu şekil üzerinde harflendirmeler yaparak ilk şekildeki karedeki dik üçgenlerin ötelenmesiyle diğer şeklin elde edildiğini belirterek şekiller arasındaki bağlantıyı açıklamış ve bu ispatın Pisagor Teoremine ($a^2 + b^2 = c^2$) ait olduğunu belirtmiştir. Matematik öğretmenin ön-testte ispatın nasıl yapıldığına dair bir açıklamada bulunmadığı son-testte ise GeoGebra eğitiminde öğrendiği dik üçgenlerin ötelenmesi bilgisi ile ispatta yapılanları açıkladığı söylenebilir.

Dördüncü soru için ön-testte 9 katılımcının hiçbirinin $a^2 + b^2 = c^2$ eşitliğini tespit edemediği, son-testte ise 9 katılımcının tamamına yakınının $a^2 + b^2 = c^2$ eşitliğini tespit ettiği görülmüştür. Ön-testte katılımcıların dördüncü soru için genel olarak eksik veya yanlış cevap verdikleri, son-testte ise yeterli ve doğru cevap verdikleri söylenebilir.

Onuncu Soru: Aşağıdaki şekilde sözsüz ispatı verilen teoremi bulunuz. İspatta yapılan işlemleri açıklayınız.



$$\frac{a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots}{1/r} = \frac{ar}{1-r}$$

Örnek olarak katılımcılardan birinin son testte 10. soruya verdiği yanıt Şekil 5'te görülmektedir. Bu katılımcı ön-testte soruyu boş bırakmıştır.

Şekil 5

M_2 Kodlu Katılımcının Son Testte 10. Sorudaki Yanıtı

10. İspatı verilmiş teoremin hangi teorem olduğunu yazınız. İspat yapılırken hangi işlemlerden faydalandığınızı belirtiniz. Yapılanları özetleyiniz:

$r \rightarrow 1$ den küçük seriler geometrik

$\frac{a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots}{1/r} = \frac{ar}{1-r}$

$\frac{a+b+c}{e} = \frac{b}{d}$ buna göre benzerlik

—J. H. Webb

Yukarıda verilen Şekil 5'te M_2 kodlu matematik öğretmenin ispatın geometrik seriler için yapıldığını ve verilen şekilde dik üçgenlerin dik kenarlarının üçgen benzerliğinden yararlanılarak orandığını belirttiği görülmektedir. Ayrıca matematik öğretmenin soruda verilen eşitliği kendi çizdiği üçgen üzerinden açıkladığı gözlenmiştir.

Onuncu soru için ön-testte 9 katılımcının tamamına yakınının şekilde verilen ispatın geometrik serilerin toplamının ispatı olduğuna dair doğru cevaplar veremedikleri hatta bazı

katılımcıların ispatta yapılanlar hakkında hiçbir açıklamada bulunmadığı görülmüştür. Genel olarak katılımcıların ön-testte ya soruyu boş bıraktığı ya da geçersiz/eksik açıklamalarda buldukları söylenebilir. Son testte ise genelinin ispatın geometrik seri toplamının ispatı olduğunu belirterek doğru cevap verdikleri görülmüştür.

Araştırmanın Dördüncü Alt Problemine İlişkin Bulgular

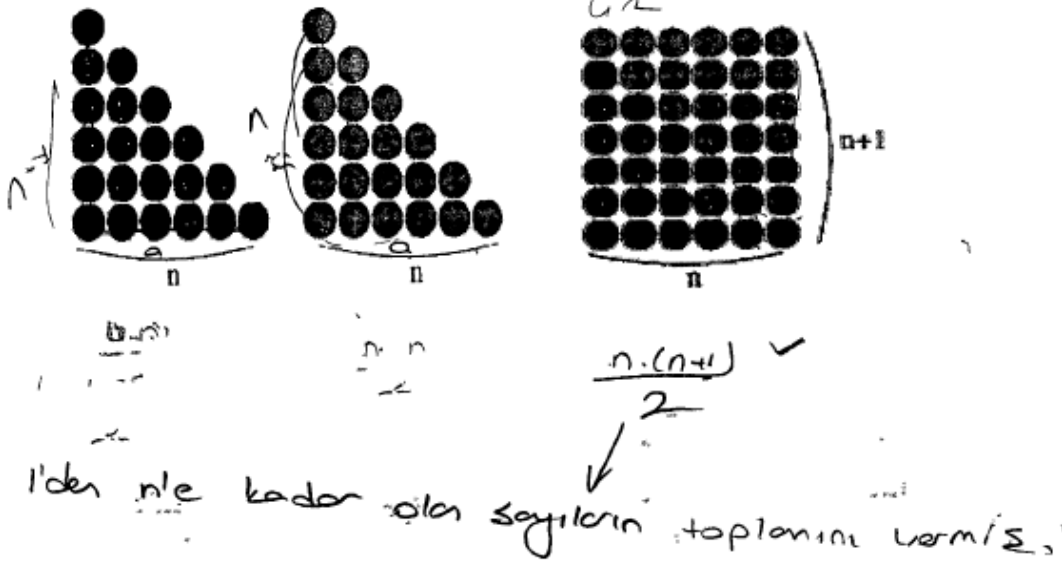
Bu bölümde gönüllü olarak seçilen öğretmen ve öğretmen adaylarının 7 ve 8 numaralı sözsüz ispat sorularına son-testte verdikleri cevaplar karşılaştırmalı olarak ele alınmıştır. Matematik öğretmeni ve öğretmen adaylarının yaptıkları ispatlar, Kinach (2002) anlama düzeylerine göre değerlendirilmiştir.

Yedinci soru için bir öğretmen adayı ile bir öğretmenin son-testte verdikleri cevaplar ele alınmıştır. Şekil 6'da öğretmen adayının, Şekil 7'de öğretmenin verdiği yanıtlar gösterilmiştir.

Şekil 6

A₅ Kodlu Öğretmen Adayının Son Testte Yedinci Sorudaki Yanıtı

7. Aşağıda matematiksel bir ifadenin sözsüz ispatı verilmiştir. Sizce bu ifade neyi ispatlamaktadır? Sözsüz-ispata verilen bu ifadenin formal ispatını yapabilir misiniz?

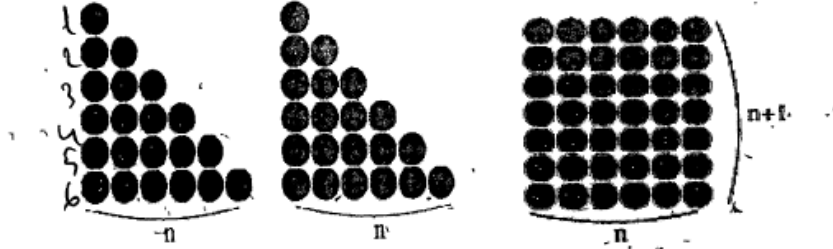


Yukarıda verilen Şekil 6'ya göre A₅ kodlu öğretmen adayının yedinci soruya " $\frac{n(n+1)}{2}$ " olarak 1'den n'e kadar olan sayıların toplamını vermiş." şeklinde cevap verdiği görülmektedir. Öğretmen adayı, şekilde verilen sözsüz ispatın 1'den n'e kadar olan sayıların toplamını verdiğini, bu toplamın $\frac{n(n+1)}{2}$ ye eşit olduğunu belirtmiştir. Bu öğretmen adayı verilen ifadeyi doğru tespit etmiş ancak şekillerde yapılanları ve şekiller arası ilişkiyi tam olarak açıklamamıştır. Analiz sonucunda öğretmen adayının sözsüz ispatı yeterince açıklayamayıp sadece işlemsel düzeyde bildiği için Kinach'ın (2002) anlama düzeylerine göre işlemsel anlama boyutunda yer aldığı söylenebilir.

Şekil 7

 M_4 Kodlu Matematik Öğretmeninin Son-Testte Yedinci Sorudaki Yanıtı

7. Aşağıda matematiksel bir ifadenin sözsüz ispatı verilmiştir. Sizce bu ifade neyi ispatlamaktadır? Sözsüz ispatı verilen bu ifadenin formal ispatını yapabilir misiniz?



Burada 1'den n'e kadar olan sayıların toplamı ile ilgili teorem açıklanmıştır ve görsel bir ispat yapılmıştır. Birinci üçgende A tane ve ikinci üçgende de A tane yuvarlak şekil olduğu için toplamda 2A tane yuvarlak şekil vardır. İkinci şekilde ise n.(n+1) tane yuvarlak şekil vardır. İkinci şekil bu iki üçgendeki yuvarlak şekillerin toplamı olduğundan $2A = n.(n+1)$ olur ve $A = \frac{n.(n+1)}{2}$ dir. Burada 1'den n'e kadar olan sayıların toplamının $\frac{n.(n+1)}{2}$ olduğunu görsel ispat yapmış olduk.

Yukarıda verilen Şekil 7'ye göre ise M_4 kodlu öğretmenin yedinci soruya "Burada 1'den n'e kadar olan sayıların toplamıyla alakalı teorem açıklanmıştır ve sözsüz bir ispat yapılmıştır. Birinci üçgende A tane ve ikinci üçgende de A tane yuvarlak şekil olduğundan toplamda 2A tane yuvarlak şekil olmuştur. İkinci şekilde ise n.(n+1) tane yuvarlak şekil vardır ve ikinci şekil bu iki üçgendeki yuvarlak şekillerin toplamı olduğundan $2A = n.(n+1)$ olur ve $A = \frac{n.(n+1)}{2}$ dir. Burada 1'den n'e kadar olan sayıların toplamının $\frac{n.(n+1)}{2}$ olduğunu görsel ispatı yapılmıştır." şeklinde cevap verdiği görülmektedir. Öğretmen, ilk olarak iki şekille son şekil arasındaki ilişkiyi doğru tespit etmiş, yuvarlak şekillerin sayısı ile son şeklin alanı arasındaki ilişkiyi ele alarak verilen ifadenin 1'den n'ye kadar olan sayıların toplamı olduğunu belirterek, toplamın $\frac{n.(n+1)}{2}$ 'e eşit olduğu sonucuna ulaşmıştır. Analiz sonucunda öğretmenin sözsüz ispatı ve ispatta yapılan işlemleri açıklarken cebirsel işlemlerle görsel ispat arasında olan örüntüleri, ilişkileri belirleme konusunda genellemelere varabildiği görülmüştür. Bu sebeple öğretmenin Kinach'ın (2002) anlama düzeylerine göre kavramsal anlama boyutunda yer aldığı söylenebilir.

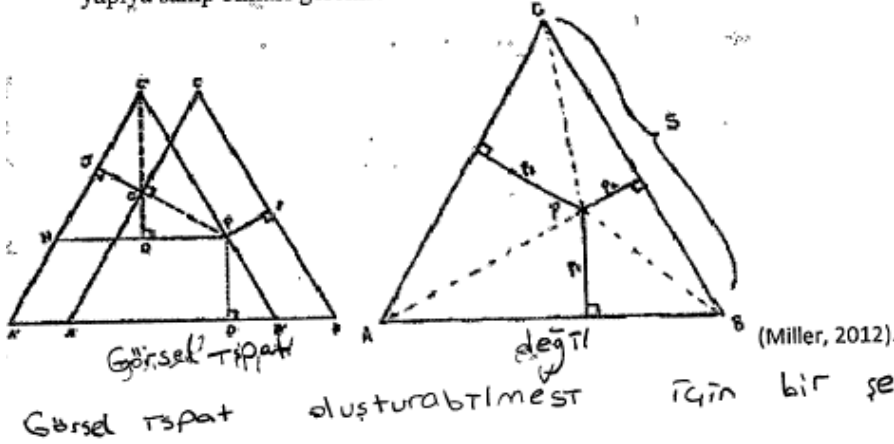
Yedinci soru için seçilen öğretmen adayı ile öğretmenin son testte verdikleri yanıtlar incelendiğinde öğretmenin, öğretmen adayına göre daha açıklayıcı cevaplar verdiği ve şekiller arası ilişkiyi açıklarken yuvarlak şekillerin sayısı ile şekillerin alanı arasında doğru tespitler bulunabildiği görülmüştür. Bu sebeple öğretmen adayının Kinach'ın (2002) anlama düzeylerine göre işlemsel boyutta olduğu, öğretmenin ise kavramsal boyutta olduğu söylenebilir.

Sekizinci soru için bir öğretmen adayı ile öğretmenin son-testte verdikleri cevaplar ele alınmıştır. Şekil 8'de öğretmen adayının, Şekil 9'da öğretmenin verdikleri yanıtlar gösterilmiştir.

Şekil 8

A₃ Kodlu Öğretmen Adayının Son Testte Sekizinci Sorudaki Yanıtı

8. Aşağıda verilen şekiller görsel ispat örnekleri oluşturur mu? Görsel ispat olmayanları nedenleriyle açıklayarak yorumlayınız. Görsel ispat olabilmesi için şeklin nasıl bir yapıya sahip olması gerekir?

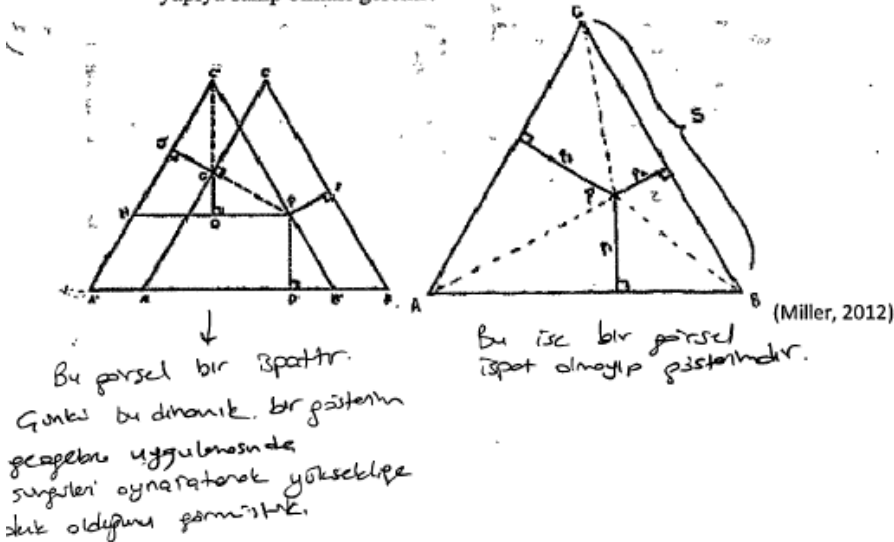


Yukarıda verilen Şekil 8'e göre A₃ kodlu öğretmen adayının sekizinci soruya "Görsel ispat oluşturabilmesi için bir şeklin..." şeklinde cevap verdiği görülmektedir. Öğretmen adayı birinci şeklin görsel ispat örneği olduğunu, ikinci şeklin ise görsel ispat örneği olmadığını belirtmiş ancak görsel ispat olma nedenlerini açıklayamamış, açıklamasını yarım bırakmıştır. Analiz sonucunda öğretmen adayının şekillerin sözsüz ispat olup olmama durumunu yeterince açıklayamayıp yüzeysel şekilde açıklama yapmaya çalıştığı için Kinach'ın (2002) anlama düzeylerine göre işlemsel anlama boyutunda yer aldığı söylenebilir.

Şekil 9

M₁ Kodlu Matematik Öğretmeninin Son Testte Sekizinci Sorudaki Yanıtı

8. Aşağıda verilen şekiller görsel ispat örnekleri oluşturur mu? Görsel ispat olmayanları nedenleriyle açıklayarak yorumlayınız. Görsel ispat olabilmesi için şeklin nasıl bir yapıya sahip olması gerekir?



Şekil 9'a göre M_1 kodlu öğretmenin sekizinci soruya “Birinci şekil görsel ispattır. Çünkü bu dinamik bir şekilde gösterilerek GeoGebra uygulamasında sürgüleri oynatarak yüksekliğe denk olduğunu görmüştük. İkinci şekil ise görsel ispat olmayıp bir gösterimdir.” şeklinde cevap verdiği görülmektedir. Öğretmen görsel ispat olan şekli doğru tespit etmiş ve görsel ispat olma nedenlerini GeoGebra eğitim sürecinde öğrendiği bilgilerle açıklamaya çalışmıştır. Analiz sonucunda öğretmenin şekillerin sözsüz ispat olup olmama durumlarını açıklarken GeoGebra eğitim sürecinde öğrendiği bilgilerle görsel ispat arasında olan ilişkileri belirleme, analiz etme ve transfer etme konusunda genellemelere varabildiği görülmüştür. Bu sebeple öğretmenin Kinach'ın (2002) anlama düzeylerine göre kavramsal anlama boyutunda yer aldığı söylenebilir.

Sekizinci soru için seçilen öğretmen adayı ile öğretmenin son-testte verdikleri cevaplar incelendiğinde öğretmen adayının görsel ispat olma nedenlerini açıklayamadığı, öğretmenin ise GeoGebra eğitim sürecinde öğrendiği bilgilerle açıklamaya çalıştığı görülmüştür. Bu sebeple öğretmen adayının Kinach'ın (2002) anlama düzeylerine göre işlemsel boyutta olduğu, öğretmenin ise kavramsal boyutta yer aldığı söylenebilir.

Sonuç, Tartışma ve Öneriler

Çalışmada, GeoGebra ile ispat becerilerini geliştirmeye yönelik olarak tasarlanan bir eğitim programının öğretmen ve öğretmen adaylarının sözsüz ispat edebilme becerileri üzerine etkililiğinin değerlendirilmesi amaçlanmıştır. Bu amaçla ilk olarak katılımcıların ispat beceri testine verdikleri cevaplar, oluşturulan dereceli puanlama anahtarına göre puanlanmıştır.

Araştırmanın Alt Problemine İlişkin Bulgular ve Sonuçları

Araştırmanın Birinci Alt Problemine İlişkin Bulgular ve Sonuçları

Çalışmanın nicel verileri için SPSS programında yapılan analiz sonucunda hem öğretmenlerin ön testleri ile son testleri hem öğretmen adaylarının ön testleri ile son testleri arasında son test lehine anlamlı bir farklılık tespit edilmiştir. Dinamik geometri yazılımı olan GeoGebra ile ispat becerilerini geliştirmeye yönelik olarak tasarlanan eğitim programının öğretmen ve öğretmen adaylarının sözsüz ispat becerilerinin gelişimini sağladığı görülmüştür. Literatür incelendiğinde İpek'in (2010) çalışmasında öğretmen adaylarının dinamik yazılımlar ile geometrik ispat ve cebirsel ispat gerçekleştirme süreçleri incelenmiştir. Mevcut çalışma sonucuna benzer olarak bu çalışmada matematik öğretmen adayları için ispat yapma süreçleri, dinamik geometri yazılımları ile geliştiği görülmüştür. Ceylan'ın (2012) yüksek lisans tez çalışmasında GeoGebra programı ile ilköğretim matematik öğretmen adaylarının ispat yapma becerilerinin ve ispat biçimlerinin ortaya çıkarılması amaçlanmıştır. Mevcut çalışma sonucuna benzer olarak öğretmen adaylarında GeoGebra programının varsayım yapma, akıl yürütme, genelleme yapma ve farklı gerekçelendirme biçimlerine geçiş yapma gibi özellikler kazandırarak ispat yapma becerilerini geliştirdiği görülmüştür.

Araştırmanın İkinci Alt Problemine İlişkin Bulgular ve Sonuçları

Çalışmanın nicel verileri için SPSS programında yapılan analiz sonucunda öğretmen ve öğretmen adaylarının ön test puanları arasında farklılık bulunmamışken son test puanları arasında öğretmenlerin lehine anlamlı olarak bir farklılığın olduğu belirlenmiştir. Dinamik geometri yazılımı GeoGebra ile ispat becerilerini geliştirmeye yönelik olarak tasarlanan eğitim programının, öğretmenlerin ispat becerileri üzerinde daha olumlu katkısı olduğunu söylemek mümkündür. Nitel verilerde de görüldüğü üzere, öğretmenler ispat yaparken daha esnek, görsel

ve açıklayıcı çözümler üretirken, öğretmen adaylarının daha yapılandırılmış, cebirsel ispat yöntemlerine bağlı kalmaya çalıştıkları ve derinlemesine açıklamalar yapmaktan kaçındıkları görülmüştür. Benzer olarak Demircioğlu'nun (2022) çalışmasında matematik öğretmen adaylarının, verilen matematiksel ifadenin ispatına ilişkin yaptıkları açıklarken sorgulamaktan kaçınarak, derslerde öğrendikleri yapılandırılmış ispat yöntemlerini kullanma eğiliminde oldukları görülmüştür. Tecrübe arttıkça, öğretmenlerin ispat yaparken önermenin doğruluğunu gösterme konusundaki düşüncelerini daha sorgulayıcı bir şekilde alternatif yöntemler kullanarak yapmaya çalıştıklarını söylemek mümkündür.

Araştırmanın Üçüncü Alt Problemine İlişkin Bulgular ve Sonuçları

Çalışmanın nitel verileri için incelenen 4, 7, 8 ve 10 numaralı sorularda katılımcıların ön-testte genel olarak eksik ve yetersiz cevaplar verdikleri görülmüştür. Katılımcıların bu sorulara verdikleri cevaplar incelendiğinde dördüncü ve yedinci soruda verilen şekiller arasında bağlantı kuramayıp şekilleri ayrı ayrı açıklamaya çalıştıkları, sekizinci ve onuncu soruda ise verilen şekillerde ne yapılmaya çalışıldığının anlaşılmasından kaynaklı olarak soru ile alakasız cevapların verildiği görülmüştür. Katılımcıların ön-testte bu sorularda düşük puan alma nedenlerinin, şekilleri anlayamama ve şekiller arasında bağlantı kuramama olduğu tespit edilmiştir. Literatür incelendiğinde Demircioğlu ve Polat'ın (2016b) çalışmasında öğretmen adaylarının sözsüz ispat yapma sürecindeki zorluklarla ilgili görüşleri incelenmiştir. Bu çalışmanın sonucuna göre öğretmen adaylarının sözsüz ispata dair yaşadıkları zorlukların nedenlerinden bazıları, mevcut çalışma sonuçlarına benzer olarak şekilleri algılayamama/anlayamama ve şekiller arası mantık/bağlantı kuramama olarak açıklanmıştır.

Katılımcıların, nitel veri analizi için incelenen 4, 7, 8 ve 10 numaralı sorularda ön-testte göre son-testte genel olarak yeterli ve doğru cevap verdikleri görülmüştür. Ayrıca katılımcıların son-testteki bu sorularda, testin cebirsel ispat sorularına göre daha yüksek puan aldıkları görülmüştür. Bu sebeple katılımcıların GeoGebra eğitim süreci sonunda cebirsel ispatı istenen sorulara göre sözsüz ispatı verilen sorularda daha başarılı oldukları tespit edilmiştir. Bu durumun nedeni olarak katılımcıların GeoGebra ile verilen eğitimle sözsüz ispatları cebirsel ispata göre daha kolay algılamaları ve yorumlamada daha başarılı oldukları görülmüştür. Literatür incelendiğinde bu sonuçlara benzer olarak Tekin ve Konyalıoğlu'nun (2010) çalışmasında trigonometrik olarak verilen fonksiyonlardaki toplam fark formüllerinin ortaöğretim seviyesinde görselleştirilmesi incelenmiştir. Çalışmada cebirsel ispat ile görsel ispatlar sırasıyla yapılmış ve ispattaki formüllerin özünü oluşturan ilişkilerin nasıl oluştuğunun sözsüz ispatlarda daha kalıcı olarak gösterilmesinden dolayı sözsüz ispatların cebirsel ispatlardan daha yararlı olduğu tespit edilmiştir. Alsina ve Nelsen (2010) çalışmasında, cebirsel ispat çeşitlerinden biri olan tümevarım yöntemiyle ispatlanabilecek matematiksel ifadelerin sözsüz ispatlarla daha kolay ve anlaşılır olarak ispatlanabildiğini açıklamıştır.

Araştırmanın Dördüncü Alt Problemine İlişkin Bulgular ve Sonuçları

Matematik öğretmeni ve öğretmen adaylarının 7. ve 8. sorularda yaptıkları ispatlar, Kinach (2002) anlama düzeylerine göre karşılaştırılmıştır. Öğretmen adaylarının ispat sorularını açıklarken yüzeysel olarak cevap verdikleri ve açıklama becerilerinin düşük olduğu; öğretmenlerin ise ilişkilendirme, analiz etme, gerekçelendirme yaparak daha kapsamlı cevap verdikleri görülmüştür. Kinach (2002) anlama düzeylerine göre öğretmen adaylarının işlemsel boyutta, öğretmenlerin ise kavramsal boyutta yer aldıkları tespit edilmiştir. Literatür incelendiğinde bu sonuçlara benzer olarak Demircioğlu ve Tuncay'ın (2018), Güler ve Ekmekçi

(2016) ile Altıntaş ve İlgün'nün (2020) çalışmaları bulunmaktadır. Demircioğlu ve Tuncay'ın (2018) çalışmasında matematik öğretmen adayları ile matematik öğretmenlerinin ispat yapma süreçlerinde öğretmenlerin, öğretmen adaylarına göre daha kapsamlı açıklamalar yaptıkları Güler ve Ekmekçi (2016) ile Altıntaş ve İlgün'nün (2020) çalışmalarında matematik öğretmen adaylarının ispat yaparken yaptıkları işlemleri açıklama becerilerinin düşük olduğu tespit edilmiştir.

Literatür incelendiğinde GeoGebra dinamik geometri yazılımı ile sözsüz ispat yapma çalışmalarına sınırlı sayıda rastlanmaktadır. Bu sebeple matematik eğitiminde GeoGebra dinamik geometri yazılımı ile sözsüz ispat yapma çalışmalarının yaygınlaştırılması gerekmektedir. Bu çalışmada GeoGebra ile ispat becerilerini geliştirmeye yönelik olarak tasarlanan eğitim programının sözsüz ispat yapma becerilerinin gelişimini desteklediği görülmüştür. Öğretmenlerin görsel ispat yapma amaçlı dinamik geometri yazılımı kullanımını geliştirmek için bu teknolojiyi sınıflarında etkili bir şekilde kullanma yeterliliğini kazanma konusundaki eğitimlere aktif katılımları gereklidir. Müfredatın içeriği görsel ispat örnekleri açısından geliştirilmelidir. Okulların teknolojik donanımı dinamik matematik yazılımı kullanımını destekleyebilecek nitelikte olmalıdır. Çalışmanın sonuçlarına göre farklı katılımcı grupları için araştırmalar yapılabilir, uygulanan etkinliklerin konuları genişletilerek daha kapsamlı araştırmalar yapılabilir, çalışma grubunun etkinlik geliştirmesi ve diğer dinamik geometri yazılımları ile sözsüz ispat etkinlikleri yapılması önerilebilir. Ayrıca ortaokul seviyesinde ispat sürecinin dinamik geometri programı ile planlanması ve süreçte karşılaşılabilecek problemlerin neler olabileceği ile ilgili araştırmaların yapılması önerilmektedir.

Etik Kurul İzin Bilgisi: Bu araştırma, Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi Sosyal ve Beşeri Bilimler Araştırmaları Etik Kurulu 14/02/2020 tarihli 01/03 sayılı kararı ile alınan izinle yürütülmüştür.

Yazar Çıkar Çatışması Bilgisi: Bu çalışmada çıkar çatışması yoktur ve finansman desteği alınmamıştır.

Yazar Katkısı: Yazarlar makaleye eşit katkı sağlamış olduklarını beyan ederler.

Kaynakça

- Alsina, C. & Nelsen, R. (2010). An invitation to proofs without words. *European Journal of Pure And Applied Mathematics*, 3(1), 118–127. <https://www.acarindex.com/pdfler/acarindex-d1e5969cc283b0f40130aa5e9a745def.pdf>
- Altıntaş, E. & İlgün, Ş. (2020). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının matematiksel ispata yönelik görüşlerinin belirlenmesi: Kars örnekleme. *Kastamonu Education Journal*, 28(3), 1573-1582. <https://doi.org/10.24106/kefdergi.706125>
- Arslan, S. & Yıldız, C. (2010). 11. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünmenin aşamalarındaki yaşantılarından yansımalar. *Eğitim ve Bilim Dergisi*, 35(156), 17-31. <http://egitimvebilim.ted.org.tr/index.php/EB/article/view/40/8>
- Baki, A. (1996). Matematik öğretiminde bilgisayar herşey midir. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 12(12), 135–143. <https://dergipark.org.tr/tr/pub/hunefd/issue/7825/102864>

- Baki, A. & Gökçek, T. (2012). Karma yöntem araştırmalarına genel bir bakış. *Elektronik Sosyal Bilimler Dergisi*, 11(42), 1–21. <https://dergipark.org.tr/pub/esosder/issue/6156/82721>
- Balgalmış, E. & Ceyhan, E. I. (2019). Dörtgenlerin ilişkilendirme becerisinin gelişimine yönelik öğretiminin 7. sınıf öğrencilerinin erişim düzeylerine etkisi. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*. 10(1), 130-156. <https://doi:10.16949/turkbilmate.393116>
- Baltacı, A. (2018). Nitel araştırmalarda örnekleme yöntemleri ve örnek hacmi sorunsalı üzerine kavramsal bir inceleme. *Bitlis Eren Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, 7(1), 231–274. <https://dergipark.org.tr/tr/pub/bitlissos/issue/38061/399955>
- Barak, B. (2018). *Ortaokul matematik öğretmen adaylarının ispat yapma süreçlerinin incelenmesi* [Yayınlanmamış yüksek lisans tezi]. Eskişehir Anadolu Üniversitesi.
- Bardelle, C. (2010). Visual proofs: An experiment. V. Durand-Guerrier (Eds.). *Proceedings of CERME 6* içinde (ss. 251-260). INRP
- Baydaş, Ö. (2010). *Öğretim elemanlarının ve öğretmen adaylarının görüşleri ışığında matematik öğretiminde GeoGebra kullanımı* [Yayınlanmamış yüksek lisans tezi]. Atatürk Üniversitesi.
- Bell, C. J. (2011). Proofs without words: A visual application of reasoning and proof, *Mathematics Teacher*, 104(9), 690-695. <https://doi:10.5951/MT.104.9.0690>
- Ceylan, T. (2012). *GeoGebra yazılımı ortamında ilköğretim matematik öğretmen adaylarının geometrik ispat biçimlerinin incelenmesi* [Yayınlanmamış yüksek lisans tezi]. Ankara Üniversitesi.
- Dede, Y. & Karakuş, F. (2014). Matematiksel ispat kavramına pedagojik bir bakış: Kuramsal bir çalışma. *Adıyaman Üniversitesi Eğitim Bilimleri Dergisi*, 4(2), 47–71. <https://doi:10.17984/adyuebd.52880>
- Demircioğlu, H. (2022). Preservice mathematics teachers' proving skills in an incorrect statement: sums of triangular numbers. *Pege Journal of Education and Instruction*, 13(1), 326-333. <https://www.pegegog.net/index.php/pegegog/article/view/2335/636>
- Demircioğlu, H. & Tuncay, H. A. (2018). Matematik öğretmen adaylarının, matematik öğretmenlerinin ve akademisyenin ispat becerilerinin incelenmesi. *Jass Studies-The Journal of Academic Social Science Studies*, (73), 493-508. <http://dx.doi.org/10.9761/JASSS7906>
- Demircioğlu, H. & Polat, K. (2016a). Matematik eğitiminde sözsüz ispatlar : Kuramsal bir çalışma. *Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi Dergisi*, (28), 129–140. <https://doi:10.14582/DUZGEF.686>
- Demircioğlu, H. & Polat, K. (2016b). Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının “Sözsüz İspatlar” ile yaşadıkları zorluklar hakkındaki görüşleri. *Uluslararası Türk Eğitim Bilimleri Dergisi*, 2016(7), 81–99. <https://dergipark.org.tr/tr/pub/goputeb/issue/34069/377021>
- Doğan, M. F. (2019). Ortaokul öğretmenlerinin ispatla ilişkili etkinliklere katılımlarının doğasının incelenmesi. *Çukurova Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 48(1), 100–130. <https://doi:10.14812/cufej.442893>

- Doruk, M. & Güler, G. (2014). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispata yönelik görüşleri. *Uluslararası Türk Eğitim Bilimleri Dergisi*, 2014(3), 71-93. <https://dergipark.org.tr/tr/pub/goputeb/issue/33496/380151>
- Doruk, M. & Kaplan, A. (2017). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının analiz alanında ürettikleri ispatların özellikleri. *Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, (44), 467-498. <https://doi.org/10.21764/maeuefd.305605>
- Doruk, M. Özdemir, F. & Kaplan, A. (2014). Matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispat yapmaya yönelik görüşleri ile matematiğe karşı öz- yeterlik algıları arasındaki ilişki. *K. Ü. Kastamonu Eğitim Dergisi*, 23(2), 861-874. <https://dergipark.org.tr/tr/download/article-file/209853>
- Doyle, T., Kutler, L., Miller, R. & Schueller, A. (2014). Proofs without words and beyond - proofs without words 2.0. <https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/proofs-without-words-and-beyond-proofs-without-words-20>
- Gierdien, M. F. (2007). From ‘proofs without words’ to ‘proofs that explain’ in secondary mathematics. *Pythagoras*, 65(65), 53-62. <https://doi:10.4102/pythagoras.v0i65.92>
- Gökkurt, B., Deniz, D., Akgün, L. & Soylu, Y. (2014). Matematik alanında ispat yapma süreci üzerine yapılmış bazı araştırmalardan bir derleme. *Başkent University Journal Of Education*, 1(1), 55-63. <http://buje.baskent.edu.tr/index.php/buje/article/view/10>
- Gravina, M. A. (2008). Dynamical visual proof: what does it mean?, ICME 11- TSG 22. https://www.researchgate.net/publication/283290995_Dynamical_visual_proof_what_does_it_mean
- Güler, G. (2020). Akıl yürütme ve ispat ilişkisi. I. Uğurel (Eds.), *Matematiksel ispat ve öğretimi. okul yıllarında ispat öğretimini destekleyen çok yönlü bir bakış* içinde (ss. 89-112). Anı Yayıncılık.
- Güler, G. & Dikici, R. (2012). Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispat hakkındaki görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 20(2), 571-590. <https://dergipark.org.tr/tr/pub/kefdergi/issue/48697/619549>
- Güler, G. & Ekmekci, S. (2016). Matematik öğretmeni adaylarının ispat değerlendirme becerilerinin incelenmesi: Ardışık tek sayıların toplamı örneği. *Bayburt Eğitim Fakültesi Dergisi*, 11(1), 59-83. <https://dergipark.org.tr/tr/pub/befdergi/issue/23129/247062>
- Güven, B. (2002). *Dinamik geometri yazılımı Cabri ile keşfederek geometri öğrenme* [Yayınlanmamış yüksek lisans tezi]. Karadeniz Teknik Üniversitesi.
- Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1), 5-23. https://www.researchgate.net/publication/226598348_Proof_Explanation_and_Exploration_An_Overview
- Hıdıroğlu, Ç. N. & Bukova Güzel, E. (2014). Matematiksel modellemede GeoGebra kullanımı: boy-ayak uzunluğu problemi. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 36(36), 29-44. <https://dergipark.org.tr/tr/pub/pauefd/issue/32869/374809>
- Hohenwarter, M., Hohenwarter, J. & Lavicza, Z. (2008). Introducing dynamic mathematics

- software to secondary school teachers: the case of GeoGebra. *Jl. of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 28(2), 135–146. https://www.researchgate.net/publication/234730242_Introducing_Dynamic_Mathematics_Software_to_Secondary_School_Teachers_The_Case_of_GeoGebra
- İpek, S. (2010). *İlköğretim matematik öğretmen adaylarının dinamik geometri yazılımları kullanarak gerçekleştirdikleri geometrik ve cebirsel ispat süreçlerinin incelenmesi* [Yayınlanmamış yüksek lisans tezi]. Hacettepe Üniversitesi.
- Karataş, I. & Güven, B. (2015). Dinamik geometri yazılımı Cabri'nin matematik eğitiminde kullanımı: Pisagor bağıntısı ve çokgenlerin dış açıları. *Gazi Eğitim Bilimleri Dergisi*, 1(1), 15–28. <https://dergipark.org.tr/tr/pub/gebd/issue/35201/390638>
- Kinach, B. M., (2002). Understanding and learning-to-explain by representing mathematics: Epistemological dilemmas facing teacher educators in the Secondary mathematics “methods” course. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5(2), 153–186. <https://doi:10.1023/A:1015822104536>
- Knuth, E. J. (2002). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 379-405. <https://doi.org/10.2307/4149959>
- MEB. (2018). 2018 Ortaokul Matematik Programı. <https://mufredat.meb.gov.tr/Dosyalar/201813017165445-MATEMAT%20K%20C3%96%20C4%99%20C4%B0M%20PROGRAMI%202018v.pdf>
- Moralı, S., Uğurel, I., Türnüklü, E. & Yeşildere, S. (2006). Matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 14(1), 147–160. <https://dergipark.org.tr/tr/pub/kefedergi/issue/49106/626665>
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Ogan, C. & Ibibo, G. (2018). GeoGebra : A technological soft ware for teaching and learning of calculus in Nigerian Schools. *American Journal of Applied Mathematics and Statistics*, 6(3), 115–120. <https://doi:10.12691/ajams-6-3-5>
- Özer, M. N. & Şan, İ. (2013). Görselleştirmenin özdeşlik konusu erişimine etkisi. *International Journal of Social Science*, 6(1), 1275–1294. https://doi:10.9761/JASSS_258
- Öztürk, M. & Kaplan, A. (2017). Matematik öğretmenlerine yönelik ispat yapma teşhis testi ve teste yönelik dereceli puanlama anahtarı geliştirilmesi. *Yüzüncü Yıl Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 14(1), 360–381. <http://dx.doi.org/10.23891/efdyyu.2017.14>
- Polat, K. (2018). *Alternatif bir ispat yöntemi olarak sözsüz ispatlar: lise öğrencilerinin ispat yapabilme becerilerinin incelenmesi* [Yayınlanmamış doktora tezi]. Atatürk Üniversitesi.
- Štrausová, I. ve Hašek, R. (2013) Dynamic visual proofs using DGS. *The Electronic Journal of Mathematics and Technology*, 7 (1),130-142. <https://go.gale.com/ps/i.do?p=AONE&u=googlescholar&id=GALE|A327236210&v=2.1&it=r&sid=AONE&asid=12aa0c79>
- Stupel, M., Sigler, A. & Jahangiri, J. (2019). Teaching proofs without words using dynamic

- geometry. *The Mathematical Gazette*, 103(557), 204-211.
<https://doi:10.1017/mag.2019.51>
- Şadan, N. & Uğurel, I. (2020). Görsel (Sözsüz) ispatlar. I. Uğurel (Ed.). *Matematiksel İspat ve Öğretimi. Okul Yıllarında İspat Öğretimini Destekleyen Çok Yönlü Bir Bakış* içinde (ss. 243-274). Anı Yayıncılık.
- Tekin, B. & Konyalıoğlu, A. C. (2010). Trigonometrik fonksiyonların toplam ve fark formüllerinin ortaöğretim düzeyinde görselleştirilmesi. *Bayburt Eğitim Fakültesi Dergisi*, 5(1), 24–37. <https://dergipark.org.tr/tr/pub/befdergi/issue/23156/247357>
- Toluk Uçar, Z. (2011). Öğretmen adaylarının pedagojik içerik bilgisi: öğretimsel açıklamalar. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, 2(2), 87-102. <https://dergipark.org.tr/tr/pub/turkbilmat/issue/21564/231439>
- Tutkun, Ö. F., Öztürk, B. & Demirtaş, Z. (2011). Matematik öğretiminde bilgisayar yazılımları ve etkililiği. *Dünya'daki Eğitim ve Öğretim Çalışmaları Dergisi*, 1(1), 133–139. http://www.jret.org/FileUpload/ds217232/File/17.omer_f_tutkun.pdf
- Uygur Kabael, T. (2020). İspat ve ispatlamada bazı temel kavramlar. I. Uğurel (Eds.), *Matematiksel İspat ve Öğretimi. Okul Yıllarında İspat Öğretimini Destekleyen Çok Yönlü Bir Bakış* içinde (ss. 23-40). Anı Yayıncılık.
- Vatansever, S. (2007). *İlköğretim 7. sınıf geometri konularını dinamik geometri yazılımı Geometer's Sketchpad ile öğrenmenin başarıya, kalıcılığa etkisi ve öğrenci görüşleri* [Yayınlanmamış yüksek lisans tezi]. Dokuz Eylül Üniversitesi.
- Yiğit Koyunkaya, M. (2020). İspat öğretiminde teknolojiye yararlanma. I. Uğurel (Eds.), *Matematiksel İspat ve Öğretimi. Okul Yıllarında İspat Öğretimini Destekleyen Çok Yönlü Bir Bakış* içinde (ss. 393-426). Anı Yayıncılık.
- Zeybek Şimşek, Z. (2020). İspatın matematik öğretim programları ve uluslar arası standartlardaki yeri ve önemi. I. Uğurel (Eds.). *Matematiksel ispat ve öğretimi. Okul yıllarında ispat öğretimini destekleyen çok yönlü bir bakış* içinde (ss. 69- 88). Anı Yayıncılık

Extended Summary

Introduction

A proof is an argument for a mathematical statement. It is a general, accurate and convincing process in which logical inferences are made via relating them the stated assumptions (Dede & Karakuş, 2014; Doruk & Kaplan, 2017; Uygur Kabael, 2020). Proof, one of the standards of "Principles and Standards of School Mathematics" curriculum stated by the National Council of Mathematics Teachers, has and important goal of the mathematics education (Knuth, 2002; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000) and also goal of Turkish Ministry of Education (Güler, 2020; MoNE, 2018). Focusing on improving students' proof skills one of the important issue of elementary school mathematics (Bell, 2011; Moralı et al., 2006; Zeybek Simsek, 2020). It is known that mathematics teachers have some difficulties while relating their curricular knowledge about proof with classroom practices (Doğan, 2019). Exposure to effective training and support systems capable of addressing mathematical proof in

elementary school can significantly enhance teachers' proficiency, ultimately boosting their motivation to adopt proof activities as an integral part of their teaching (Morali et al., 2006).

One of the ways to improve especially elementary school teachers' proof-making skills is the "Visualization Approach" (Demircioğlu, & Polat, 2016a). According to the contemporary learning approach, the algebraic approach to proof in mathematics should be supported by the visualization approach (Özer & Şan, 2013). "Non-Verbal Proofs", which is mentioned with the Visualization Approach, is one of the alternative proof methods might be use in elementary grade levels (Polat, 2018). Non-verbal proof is mostly a pictures or diagrams based on figures without words or numbers and using dots, squares, balls, cubes or simply understandable objects instead of numbers (Alsina & Nelsen, 2010; Bardelle, 2010; Gierdien, 2007; Yigit Koyunkaya, 2020).

In recent years, the use of dynamic geometry programs for visualization approach has become widespread especially in nonverbal proof. Research studies showed that Dynamic Geometry Software (DGS) improved visual proof and proof-making skills of participants in the classroom (Demircioğlu & Polat, 2016b; Hanna, 2000; Şadan & Uğurel, 2020). DGS saves the static paper-and-pencil process and provides dynamism with illustrations (Baki, 1996). To improve teachers' utilization of dynamic geometry software teacher training programs should provide fitting courses, resources concerning dynamic math software, and pre-service teachers and teachers should actively engage in acquiring proficiency in effectively employing this technology within their classrooms. PSTs are better prepared to utilize the advantages of these technological tools while making mathematical proof. With these dynamic software, proofs can be made for all grade levels even in primary education especially in nonverbal proofs (Karataş & Güven, 2015; Şadan & Uğurel, 2020; Yiğit Koyunkaya, 2020).

GeoGebra software, which is one of the dynamic geometry software commonly used in mathematics education, combines geometry, algebra and analysis while doing nonverbal proofs (Ogan & Ibibo, 2018; Şadan & Uğurel, 2020). With the help of GeoGebra's multi-display structure such as relationships between two variables can be easily extracted via algebra, graphics, and spreadsheets screen. These qualifications support teaching of nonverbal proofs (Hidroğlu & Bukova Güzel, 2014; Şadan & Uğurel, 2020). There are few studies in the literature (Doyle et al., 2014; Štrausová & Hašek, 2013; Stupel, Sigler & Jahangiri, 2019; Şadan & Uğurel, 2020) in which dynamic geometry software is used to improve nonverbal proof skills. For this reason, it is thought that this study has a potential to contribute to the literature. The aim of this research is to evaluate the effectiveness of a training program designed to improve proof skills with GeoGebra on non-verbal proof making skills of mathematics teachers and prospective teachers.

Method

Due to the use of both quantitative and qualitative data collection tools in the research, the sequential explanatory method, one of the mixed research methods, was used in the study. The participants of the study consist of 35 junior pre-service mathematics teacher studying at a public university in a province in the Central Black Sea Region in 2019-2020 and 6 mathematics teachers doing a master's degree in Mathematics Education. The study was carried out with a total of 41 participants. A five-week GeoGebra nonverbal proof skills development training program was implemented with the participation of two separate groups. In the study, a five-week training on improving non-verbal proof skills with GeoGebra was conducted with 35 junior pre-service mathematics teacher and 6 mathematics teachers. Research data was collected with

the Proof Skills Test, which was developed by the researchers by compiling from the literature based on experts' opinion. Proof Skill Test, which includes 10 open-ended proof problems was administered to 41 participants as the pre-test and post-test. Proof Skills Test was used in the study to collect both quantitative and qualitative data. A rubric was developed for quantitative data, each participant's answers were scored, and pre-test and post-test scores were analyzed using the SPSS program. For qualitative data, 9 participants were selected among the volunteer participants using the criterion sampling method and their solutions were classified according to their understanding level according to Kinach (2002). These 9 people consist of 5 pre-service teachers and 4 teachers. Qualitative data analysis, on the other hand, was implemented by comparatively investigating of the pre-service and mathematics teachers' answers given to the proof skill tests.

Findings and Discussion

For the quantitative data of the study, the scores of 41 participants' proof skills tests were analyzed with the SPSS program. The data analyzed via the Wilcoxon Signed Ranks test. According to the results of Wilcoxon Signed Ranks test, a significant difference was found between the pre-tests and post-tests of the participants in favor of the post-test. According to the results of the Wilcoxon Signed Ranks test analyzes conducted in the SPSS program, a significant difference in favor of the post-test was detected between the pre-tests and post-tests of the pre-service teachers and the pre-tests of the pre-service teachers. It has been observed that the training program designed to improve proof skills with GeoGebra, supports the development of non-verbal proof skills of pre-service teachers and mathematics teachers.

In order to determine whether there was a significant difference between the pre-test scores of the prospective teachers and mathematics teachers participating in the study, the Mann Whitney-U test, which is the non-parametric equivalent of the independent two-sample t-test, was conducted. As a result of the analysis, it was determined that while there was no difference between the pre-test scores of teachers and pre-service teacher, there was a significant difference in the post-test scores in favor of the teachers. It is possible to say that this training program, designed to develop proof skills with GeoGebra, improves teachers' knowledge about proof more than pre-service teachers. The qualitative data of the research consists of the 9 participants' answers to the proof skill test. The answers given to the test by the participants, which are the qualitative data of the research, were examined comparatively according to Kinach's (2002) understanding levels, and it was determined that the participants gave more adequate and explanatory answers in the post-test compared to the pre-test. As a result, it is possible to say that the activities carried out with the dynamic geometry program supported the visual proof skills of teachers and pre-service teachers. When the answers given by the participants to the pre-test and post-test questions are examined comparatively, it can be said that while, pre-service teachers generally gave incomplete or incorrect answers in the pre-test for the selected questions, teachers gave adequate and correct answers in the post-test by making associations and analyzes. As a result of the qualitative data analysis, Kinach (2002) determined that pre-service teachers were in the operational dimension and teachers were in the conceptual dimension, according to their understanding levels.

Conclusion and Recommendations

In this study, it was seen that the training program designed to develop proof skills with GeoGebra enabled the development of nonverbal proof making skills. To improve teachers'

utilization of non-verbal proof skills, teachers should actively engage in acquiring proficiency in effectively employing this technology within their classrooms. With the acknowledgment by educational institutions and teacher education programs regarding the crucial role of offering substantial support and training in integrating educational software such as GeoGebra, PSTs are better prepared to utilize the advantages of these technological tools. This enhanced preparedness allows them to actively contribute to the continual transformation of mathematics education. When the literature is examined, it is rare to find nonverbal proofs with GeoGebra dynamic geometry software. For this reason, it is necessary to spread nonverbal proofs with GeoGebra dynamic geometry software in mathematics education. In this study, mathematics teachers and pre-service teachers have been studied, research can be repeated for students. More comprehensive research can be done by expanding the topics of the applied activities, it can be suggested that the study group develop activities and non-verbal proof activities with other dynamic geometry software.