GAZİOSMANPAŞA BİLİMSEL ARAŞTIRMA DERGİSİ (GBAD)
Gaziosmanpasa Journal of Scientific Research
ISSN: 2146-8168
http://dergipark.gov.tr/gbad
Araştırma Makalesi (Research Article)

Cilt/Volume : 12
Sayı/Number: 3
Yıl/Year: 2023
Sayfa/Pages: 61-70

Alınış tarihi (Received): 19.09.2023
Kabul tarihi (Accepted): 11.10.2023

Geçiş Şartları İle Birleştirilmiş İki Aralıklı Sturm-Liouville Denklemleri İçin Karşılaştırma Kriterleri

Sevda Nur ÖZTÜRK[1], Oktay Sh. MUKHTAROV[2,3], Kadriye AYDEMİR[4,*]

[1] *Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Tokat, Türkiye*
[2] *Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Tokat, Türkiye*
[3] *Institute of Mathematics and Mechanics, Azerbaijan National Academy of Sciences, Baku, Azerbaijan*
[4] *Amasya Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Amasya, Türkiye*
**Sorumlu Yazar: kadriyeaydemr@gmail.com*

ÖZET: Bu çalışmanın amacı ortak uç noktasına sahip olan iki ayrık aralıkta tanımlı olan Sturm-Liouville denklemleri için bazı karşılaştırma özelliklerini elde etmektir. Ortak uç noktada sağ ve sol çözümleri birbirine birleştiren ve geçiş şartları olarak adlandırılan iki şart verilmiştir. Bu çeşit denklemleri geçiş şartları ile birleştirilmiş iki aralıklı Sturm-Liouville denklemleri olarak adlandıracağız. Geçiş şartları ile birbirine birleştirilmiş iki aralıklı diferansiyel denklemlere Sturm karşılaştırma teorisinin klasik yöntemlerinin nasıl uygulanacağı açık değildir. Bu çalışmada karşılaştırma özellikleri için bazı yeni kriterler elde ettik ve bu kriterleri elde etmek için yeni yaklaşımlar geliştirdik. Elde edilen sonuçlar Sturm-Liouville denklemleri için klasik karşılaştırma özelliklerinin genişlemesi ve genelleştirilmesidir.

***Anahtar Kelimeler** –Klasik olmayan Sturm-Liouville problemi, geçiş şartları, karşılaştırma teoremleri, salınım.*

Comparison Criteria For Two-İnterval Sturm-Liouville Equations Coupled with Transmission Conditions

ABSTRACT: The purpose of this work is to establish some comparison properties of the Sturm-Liouville equations defined on two non-intersecting intervals with a common end, on which two conditions for the interaction of the left and right solutions are given, the so-called transmission conditions. We will call equations of this type as two-interval Sturm-Liouville equations, coupled with transmission conditions. It is not clear how to apply the classical methods of Sturm's comparison theory to two-interval differential equations under given transmission conditions. We have derived some new criteria for comparison properties and have developed new approaches to obtain these criteria. The results obtained are an extension and generalization of the corresponding classical comparison properties for the Sturm-Liouville equations.

***Keywords**– Non-classical Sturm-Liouville problem, transmission conditions problems, comparison theorems, oscillation.*

1. Giriş

Diferansiyel denklemlerin çözümleri için karşılaştırma ve salınım teorisi diferansiyel denklemlerin nitel teorisinde hızlı gelişen dallardan biridir. Ayrıca, Sturm-Liouville tipi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin karşılaştırma ve salınımı ile diğer özellikleri arasındaki ilişki, sınır değer problemleri teorisinde merkezi bir öneme sahiptir. Diferansiyel denklemler için karşılaştırma ve salınım teorisinin tarihi 19. yüzyılın ortalarında Ch. Sturm ve J. Liouville'nin ünlü çalışmaları ile başlamıştır. Sturm'un esas karşılaştırma teoremi aşağıdaki şekilde formüle edilmiştir.

$$(k_i(x)y_i')' + g_i(x)y_i = 0\,, \qquad \forall x \in [a,b] \qquad (1.1)$$

diferansiyel denkleminin,

$$k_i(a)y_i'(a) = \alpha_i y_i(a) \qquad (1.2)$$

sınır koşulunu sağlayan çözümünü $y_i(x)$ ile gösterelim (i=1,2). Ayrıca varsayalım ki her $x \in [a,b]$ için

$$0 < k_2(x) \leq k_1(x), \quad g_2(x) \geq g_1(x) \qquad (1.3)$$

ve

$$\alpha_2 < \alpha_1 \qquad (1.4)$$

eşitsizlikleri sağlansın. O halde $y_1(x)$'in ardışık iki sıfırı arasındaki aralıkta $y_2(x)$'in en az bir sıfırı bulunacaktır (Sturm'un salınım teorisiyle ilgili diğer klasik sonuçlar için (Kreith,1973; çalışmasına bakınız). Son yıllarda karşılaştırma ve salınım teorisi artan bir şekilde ilgi görmektedir. Sturm-Liouville denklemlerinin fizik, biyoloji ve ekonomideki çeşitli problemlerde uygulamaları olduğundan (örneğin (Akbarfam ve Jodayree, 2014; Allahverdiev ve ark, 2013; Allegretto, 2001; Aydemir ve Mukhtarov, 2017; Bairamov ve Ugurlu, 2012)'e ve burada belirtilen referanslara bakınız) bu denklemlerin çeşitli türlerinin çözümlerinin karşılaştırılması için yeni yeterli koşullar elde etmeye sürekli bir ilgi vardır. Adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin karşılaştırma ve salınım teorisinin esas amacı, çözüm fonksiyonları için sıfırların dağılımı, ardışık iki sıfır arasındaki uzaklığın alt ve üst sınırları, belirli bir aralıktaki sıfırların sayısı, iki diferansiyel denklemin çözümlerinin sıfır yerlerinin karşılaştırılması gibi özelliklerinin araştırılmasıdır. Bu konular teorik olduğu kadar uygulama açısından da çok önemlidir. Çünkü fizik ve mühendislikte ortaya çıkan bazı problemleri incelerken çözümleri karşılaştırmak gerekir. Örneğin, bir derece serbestliğe sahip bir parçacık $F(t) = -g_1(t)y_1$ kuvveti ile $y_1 = 0$'a çekilirse bu parçacığın hareketi

$$y_1'' + g_1(t)y_1 = 0$$

şeklindeki en basit Sturm-Liouville denklemi ile tanımlanır. Burada t zaman değişkenidir. Benzer şekilde bir derece serbestliğe sahip ikinci parçacık $H(t) = -g_2(t)y_2$ kuvveti ile $y_2 = 0$'a çekilirse o halde bu parçacığın hareketi

$$y_2'' + g_2(t)y_2 = 0$$

Sturm-Liouville denklemi ile tanımlanır. Sturm karşılaştırma teoremi gereği, eğer $g_2(t) \geq g_1(t)$ ise o zaman ikinci parçacık daha hızlı salınım yapacaktır. Sturm'un karşılaştırma ve salınım teorisi ayrıca açık bir şekilde çözülemeyen çeşitli tipteki sınır değer problemlerinin bir çok spektral ve diğer nitel özelliklerini incelemek için de kullanılabilir. Adi diferansiyel denklemler için karşılaştırma ve salınım teorisinin klasik sonuçları için (Swanson, 1968)'e ve kısmi diferansiyel denklemler için karşılaştırma ve salınım teorisinin klasik sonuçları için ise (Yoshida, 2008)'e atıfta bulunuyoruz. Son zamanlarda, sadece Sturm-Liouville denklemleri için değil aynı zamanda farklı türde diferansiyel denklemler için karşılaştırma ve salınım teorisine büyük bir ilgi vardır. Bu yönde pek çok çalışma vardır. Ancak biz sadece çalışmamızın konusu ile yakından ilgili olan birkaç makaleden bahsedeceğiz. (Simon, 2005)'de yazarlar ikinci dereceden lineer olmayan diferansiyel denklemler için bazı ilginç karşılaştırma sonuçları ortaya koymuşlardır. (Binding ve Rynne; 2004)'da yazarlar karşılaştırma teoremleri yardımı ile ikinci dereceden fark denklemlerinin çözümlerinin salınımı için bazı yeterli koşullar türetmişlerdir. (Cannon ve Meyer, 1971; Dzurina, 2018; Graef ve ark, 2022; Mukhtarov ve Aydemir, 2021; Picone, 1909; Qui, 2012;

Tiryaki ve ark, 2016; Mukhtarov ve Aydemir, 2021)'de klasik Sturm teorisinin bazı sonuçlarından da yararlanılarak yeni türdeki diferansiyel denklemler için karşılaştırma ve salınım özellikleri elde edilmiştir.

Biz bu çalışmada

$$Ly := \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y = 0\,, \qquad x \in [a,c) \cup (c,b] \qquad (1.6)$$

şeklindeki iki aralıklı Sturm-Liouville denklemini x=c iletim noktasında verilen

$$y(c+0) = \alpha y(c-0), \quad y'(c+0) = \beta y'(c-0) \qquad (1.7)$$

geçiş şartları ile birlikte ele alacağız. Bu tür geçiş şartları doğa bilimlerinin bir çok dalında karşılaşılan çeşitli türdeki problemlerin çözümünde sıklıkla karşımıza çıkmaktadır. Bu tür klasik olmayan problemler farklı dielektrik özelliklere sahip ferromanyetik ortamlardaki elektromanyetik süreçlerde, elastik çoklu yapılarda, ısı ve kütle transferlerinde, "hidrolik kırılma" problemlerinde, mekanik sistemlerin titreşiminde vb. matematiksel model olarak ortaya çıkmaktadır (Cannon ve Meyer, 1971; Kreith, 1973; Swanson, 1968; Binding ve ark., 2004; Grace ve El-Morshedy, 2000). Son yıllarda iki-aralıklı Sturm-Liouville denklemleri için sınır değer problemlerinin bazı özellikleri çalışılmasına rağmen (Aydemir ve Mukhtaraov, 2016; Aydemir ve ark., 2018; Mukhtarov ve ark., 2018; Şen, 2021; Uğurlu, 2020; Allahverdiev ve Tuna, 2018, 2019; Ao ve Sun, 2014; Mukhtarov ve Yücel 2020; Mukhtarov ve ark. 2020; Yücel ve Muhtarov 2023; Yücel ve ark. 2023) bu denklemler için karşılaştırma ve salınım özelliklerinin literatürde ilk defa Mukhtarov ve Aydemir (2021) tarafından çalışılmaya başlandığını belirtmek isteriz. Biz ise bu çalışmamızda literatürde ilk olarak tek-aralıklı Sturm-Liouville denklemi ile iki-aralıklı Sturm-Liouville denklemleri için karşılaştırma özelliklerini araştıracağız.

2. İki Aralıklı Sturm- Liouville Denklemleri

Ortak uç noktası olan iki ayrık $[a,c)$ ve $(c,b]$ aralıklarında tanımlı olan

$$Ly := \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y = 0\,, \qquad x \in [a,c) \cup (c,b] \qquad (2.1)$$

biçiminde Sturm-Liouville diferansiyel denklemi verilsin. Bu denklemin $[a,c)$ sol aralığında tanımlı çözümüne sol çözüm, $(c,b]$ sağ aralığında tanımlı olan çözümüne ise sağ çözüm diyeceğiz. Doğal olarak $x = c$ "iletim" noktasında sol ve sağ çözümleri birbirine "bağlayan" ek şartlar verilmesi gerekiyor (aksi durumda (2.1) diferansiyel denklemi birbirinden bağımsız olan iki ayrı diferansiyel denkleme ayrıştırılmış olur). Bu çalışmada (2.1) denklemi

$$y(c+0) = \alpha y(c-0), \quad y'(c+0) = \beta y'(c-0) \qquad (2.2)$$

geçiş şartları ile birlikte incelenecek.

Tanım 1. (2.1) diferansiyel denkleminden ve (2.2) geçiş şartlarından oluşan probleme geçiş şartları ile birleştirilmiş iki-aralıklı Sturm-Liouville denklemi veya kısaca iki-aralıklı Sturm-Liouville denklemi diyeceğiz (kısaca 2A-SLD biçiminde yazacağız).

İleride aşağıdaki simgelerden de yararlanacağız:

$$\Omega_1 := [a,c), \;\; \Omega_1 := (c,b]\,, \quad \Omega := \Omega_1 \cup \Omega_2$$

2A-SLD'nin çözümünü tanımlamak için (2.1), (2.2) problemine özgü aşağıdaki yeni fonksiyonel uzayları tanımlayacağız.

$C^{(0)}[a, c-0] = \{$ f: $[a, c) \to \mathbb{R}$ I f fonksiyonu [a,c)'de süreklidir ve x=c noktasında sonlu $f(c-0) := \lim_{h\to 0} f(c-|h|)$ limiti mevcuttur. (yani f fonksiyonu [a,c] kapalı aralığına sürekli olarak devam ettirilebilir.)}

$C^{(0)}[c+0, b]$ uzayı benzer biçimde tanımlanabilir.

$$C^{(0)}[a, c-0] \oplus C^{(0)}[c+0, b]$$

$$:= \left\{ f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in [a, c) \text{ ise} \\ f_2(x), & x \in (c, b] \text{ ise} \end{cases} \mid f_1 \in C[a, c-0], f_2 \in C[c+0, b] \right\}$$

$C^{(k)}[a, c-0] :=$ {f:[a,c)→R I f fonksiyonu [a,c) yarıaçık aralığında k mertebeden sürekli diferansiyellenebilirdir ve $f, f', \dots f^{(k)} \in C[a, c-0]$ } , *k=1,2,....*

$C^{(k)}[c+0, b]$ uzayı ve $C^{(k)}[a, c-0] \oplus C^{(k)}[c+0, b]$ uzayları benzer biçimde tanımlanır.

$C^{(0)}[a+0, c-0] :=$ {f:(a,c)→R I f fonksiyonu (a,c) aralığında süreklidir ve sonlu f(a+0) ve f(c−0) limitleri mevcuttur}

$C^{(0)}[c+0, b-0]$ benzer biçimde tanımlanabilir.

$$C^{(0)}[a+0, c-0] \oplus C^{(0)}[c+0, b-0] = \left\{ f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in (a, c) \text{ ise} \\ f_2(x), & x \in (c, b) \text{ ise} \end{cases} \mid f_1 \in C^{(0)}[a+0, c-0], \quad f_2 \in C^{(0)}[c+0, b-0] \right\}$$

$C^{(k)}[a+0, c-0]$, $C^{(k)}[c+0, b-0]$ ve $C^{(k)}[a+0, c-0] \oplus C^{(k)}[c+0, b-0]$ uzayları benzer biçimde tanımlanabilir (k=1,2,3,…).

$$C^{(k)}(a, c) \oplus C^{(k)}(c, b) := \left\{ f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in (a, c) \ ise \\ f_2(x), & x \in (c, b) \ ise \end{cases} \mid f_1 \in C^{(k)}(a, c), \ f_2 \in C^{(k)}(c, b) \right\}$$

Burada

$$C^{(0)}(d_1, d_2) := \{f: (d_1, d_2) \to R | f \ fonksiyonu \ \forall x \in (d_1, d_2) \ noktasında \ süreklidir.\}$$

$$C^{(k)}(d_1, d_2) := \left\{f: (d_1, d_2) \to R \middle| f, f', \dots\dots, f^{(k)} \in C^{(0)}(d_1, d_2) \right\}, \ k = 1,2, \dots.$$

(2.1)-(2.2) 2A-SLD'nin katsayılarının aşağıdaki şartları sağladığını kabul edeceğiz.

1. $p \in C^{(0)}[a, c-0] \oplus C^{(0)}[c+0, b]$
2. $\forall x \in [a, c) \cup (c, b]$ *için* $p(x) > 0$
3. $p(c-0) > 0$, $p(c+0) > 0$
4. $q \in C^{(0)}[a, c-0] \oplus C^{(0)}[c+0, b]$
5. $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ (2.3)

Tanım 1.

$D(\tilde{L}) := \{f \mid f \in C^{(1)}[a, c-0] \oplus C^{(1)}[c+0, b],\ pf' \in C^{(1)}(a,c) \oplus C^{(1)}(c,b)\}$ (2.4) tanım bölgesinde

$$\tilde{L}f := \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y \qquad (2.5)$$

eşitliği ile verilmiş

$\tilde{L}: C^{(0)}[a, c-0] \oplus C^{(0)}[c+0, b] \rightarrow C^{(0)}[a, c-0] \oplus C^{(0)}[c+0, b]$ lineer operatörüne (2.1)-(2.2) 2A-SLD'nin ürettiği diferansiyel operatör diyeceğiz.

Tanım 2. $\tilde{L}y = 0,\ \ y(c+0) = \alpha y(c-0),\ \ y'(c+0) = \beta\, y'(c-0)$ (2.6)

eşitliklerini sağlayan $y \in D(\tilde{L})$ fonksiyonuna (2.1)-(2.2) 2A-SLD'nin çözümü diyeceğiz.

Not. $[a, c) \cup (c, b]$'de özdeşlik olarak sıfıra eşit olan $y(x) \equiv 0$ fonksiyonunun (2.1)-(2.2) 2A-SLD'nin bir çözümü olduğu açıktır. Bu çözüme aşikar çözüm denir. İleride aksi özel olarak belirtilmediği durumlarda (2.1)-(2.2) 2A-SLD'nin çözümünden bahsederken bu çözümün aşikar olmayan çözüm olduğu varsayılacak.

Şimdi tek aralıklı Sturm-Liouville denklemini ve bu denklemin çözümü kavramlarını hatırlatalım (Swanson, 1968).

Kapalı ve sınırlı [a,b] aralığında tanımlı olan

$$Mu := \frac{d}{dx}\left(r(x)\frac{du}{dx}\right) + s(x)u = 0 \ \ x \in [a, b] \qquad (2.7)$$

biçiminde kendine eşlenik Sturm-Liouville diferansiyel denklemini göz önüne alalım. (2.7) denkleminin katsayılarının aşağıdaki şartları sağladığını kabul edeceğiz.

1) $r, s \in C^{(0)}[a+0, b-0]$ (2.8)
2) $\forall x \in (a, b)\ \ için\ \ r(x) > 0$
3) $r(a+0) > 0,\ \ r(b-0) > 0$

Tanım 3. $D(\widetilde{M}) := \{u \mid u \in C^{(1)}[a, b],\ ru' \in C^{(1)}(a, b)\}$ (2.9)

tanım bölgesinde

$$\widetilde{M}u := \frac{d}{dx}\left(r(x)\frac{du}{dx}\right) + r(x)u = 0 \qquad (2.10)$$

eşitliği ile verilmiş

$$\widetilde{M}: C^{(0)}[a+0, b-0] \rightarrow C^{(0)}[a+0, b-0]$$

lineer operatörüne (2.7) tek aralıklı Sturm-Liouville denkleminin ürettiği diferansiyel operatör denir.

Tanım 4. $\boldsymbol{\widetilde{M}u = 0}$ eşitliğini sağlayan $u \in D(\widetilde{M})$ fonksiyonuna (2.7) Sturm-Liouville denkleminin çözümü denir.

Not. Aksini özel olarak belirtmediğimiz durumlarda (2.7) Sturm-Liouville denkleminin çözümünden bahsederken $u \not\equiv 0$ olduğunu, yani aşikar çözüm olmadığını kabul edeceğiz.

Teorem 2.
$$\begin{cases} Ly := \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y = 0, \quad x \in [a,c) \cup (c,b] \\ y(c+0) = \alpha y(c-0), \quad y'(c+0) = \beta\ y'(c-0) \end{cases} \qquad (2.11)$$

2A-SLD'i ve

$$My := \frac{d}{dx}\left(r(x)\frac{du}{dx}\right) + s(x)u = 0 \ \ x \in [a,b] \qquad (2.12)$$

tek aralıklı Sturm-Liouville denklemi (SLD) verilsin. (2.11) 2A-SLD'nin katsayılarının (2.3) şartlarını, (2.12) SLD'nin katsayılarının ise (2.8) şartlarını sağladığını kabul edelim. Ayrıca kabul edelim ki, y(x) fonksiyonu (2.11) 2A-SLD'nin aşikar olmayan keyfi bir çözümüdür. Eğer $x_1 \in [a,c)$ ve $x_2 \in (c,b]$ noktaları y(x) çözümünün ardışık sıfırları ise ve

$$\int_{x_1}^{c-0}\left((p(x)-r(x))\left(\frac{dy(x)}{dx}\right)^2 - (q(x)-s(x))(y(x))^2\right)dx$$
$$+\int_{c+0}^{x_2}\left((p(x)-r(x))\left(\frac{dy(x)}{dx}\right)^2 - (q(x)-s(x))(y(x))^2\right)dx \geq 0 \qquad (2.13)$$

$$y(c \pm 0) \neq 0 \qquad (2.14)$$

$$\alpha = 1, \qquad p(c+0) = \frac{1}{\beta}\ p(c-0) \quad (2.15)$$

şartları sağlanırsa, o halde (2.12) SLD'inin $u(x_1) = 0$ şartını sağlayan her aşikar olmayan u(x) çözümünün $(x_1, x_2) \cap \Omega$ kümesinde en az bir sıfırı mevcuttur.

İspat. Aksini kabul edelim, yani kabul edelim ki (2.12) SLD'inin $u(x_1) = 0$ ve $\forall x \in (x_1, x_2] \cap \Omega$ için $u(x) \neq 0$ olacak biçimde en az bir u(x) çözümü mevcuttur. Genelliği azaltmadan $\forall x \in (x_1, x_2) \cap \Omega$ için $y(x) > 0$ ve $u(x) > 0$ olduğunu kabul edebiliriz. Eğer $\forall x \in (x_1, x_2] \cap \Omega$ için $y(x) < 0$ ise o halde y(x) yerine -y(x) çözümünü göz önüne alabiliriz, çünkü y(x) ile -y(x) fonksiyonlarının sıfırları aynıdır. Benzer biçimde $u(x) < 0$ olursa, u(x) yerine -u(x) fonksiyonunu göz önüne alabiliriz. Bu durumda

$$y(x)(Ly)(x) - \frac{y(x)}{u(x)}(Mu)(x) = 0 \qquad (2.16)$$

özdeşliğinden ve iyi bilinen Picone formülünden (bak, (Swanson, 1968)) yararlanırsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$\int_{x_1+0}^{c-0}\left((p-r)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - (q-s)y^2 + r\left(\frac{W(y,u)}{u}\right)^2\right)dx$$

$$+\int_{c+0}^{x_2-0}\left((p-r)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-(q-s)y^2+r\left(\frac{W(y,u)}{u}\right)^2\right)dx$$

$$=\left(\frac{y}{u}(py'u-ryu')\right)\Big|_{x_1+0}^{x_2-0}-\left(\frac{y}{u}(py'u-ryu')\right)\Big|_{c-0}^{c+0} \qquad (2.17)$$

Burada W(y,u) ile y(x) ve u(x) fonksiyonlarının Wronskianı gösterilmiştir, yani

$$W(y,u;x)=\ y(x)u'(x)-y'(x)u(x) \qquad (2.18)$$

y(x) ve u(x) fonksiyonlarının lineer bağımlı olduğu durumda ispat açık olduğu için bu fonksiyonların lineer bağımsız olduğu durumu inceleyeceğiz. Bu fonksiyonların lineer bağımsız olduğunu ve $\forall\ x\ \in(x_1,x_2]\cap\Omega$ için $u(x)>0$ olduğunu kabul ettiğimiz için

$$\frac{d\left(\frac{y}{u}\right)}{dx}\Big|_{x=x_0}\neq 0 \qquad (2.19)$$

olacak biçimde en az bir $x_0\ \in(x_1,x_2]\cap\Omega$ noktası mevcuttur. $\frac{d\left(\frac{y}{u}\right)}{dx}\in C^{(0)}[a,c-0]\oplus C^{(0)}[c+0,b]$ olduğu için $\forall\ x\in\ (x_0-\delta,x_0+\delta)\cap(x_1,x_2]\cap\Omega$ için

$$\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{u}\right)\right)(x)\neq 0 \qquad (2.20)$$

olacak biçimde en az bir $\delta>0$ sayısı mevcuttur. Ayrıca $\forall\ x\in\ (x_0-\delta,x_0+\delta)\cap(x_1,x_2]\cap\Omega$ için

$$W(y,u;x)\neq 0 \qquad (2.21)$$

sağlanır. O halde teoremin şartlarını da dikkate alırsak (2.16)-nın sol tarafının sıfırdan büyük bir reel sayıya eşit olduğunu elde ederiz. Eğer $u(x_2)=0$ ise teoremin ispatı bitmiş olur. Bu nedenle sadece $u(x_2)\neq 0$ durumunu incelememiz yeterlidir. Bu durumda

$$\lim_{\substack{x\to x_2\\ x<x_2}}\left(\frac{y}{u}(py'u-ryu')\right)(x)=0 \qquad (2.22)$$

eşitliği elde edilir. 2A-SLD'inin çözümünün tanımı gereği $\lim_{\substack{x\to x_1\\ x>x_1}}(py'u-ryu')(x)$ limiti mevcuttur. Ayrıca teoremin şartlarından yararlanırsak

$$\lim_{\substack{x\to x_1\\ x>x_1}}(py'u-ryu')(x)=0 \qquad (2.23)$$

eşitliğini elde ederiz. Öte yandan $y(x_1)=u(x_1)=0$ olduğundan ve y(x), u(x) çözümleri aşikar olmayan çözümler olduğundan $y'(x_1+0)\neq 0$ ve $u'(x_1+0)\neq 0$ eşitsizlikleri elde edilir. D'Hospital kuralını uygularsak

$$\lim_{\substack{x\to x_1\\ x>x_1}}\frac{y(x)}{u(x)}=\frac{y'(x_1+0)}{u'(x_1+0)} \qquad (2.24)$$

eşitliği elde edilir. (2.22) ve (2.23)-den

$$\left(\frac{y}{u}(py'u - ryu')\right)(x_1 + 0) = \frac{y'(x_1 + 0)}{u'(x_1 + 0)}(py'u - ryu')(x_1 + 0) = 0$$

eşitliği bulunur. Teoremin şartlarından da yararlanarak

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(\frac{y}{u}(py'u - ryu')\right)(x) = \frac{y(c+0)}{u(c)}\big(p(c+0)y'(c+0)u(c) - r(c)y(c+0)u'(c)\big)$$

$$= \frac{y(c-0)}{u(c)}u(c)(\frac{1}{\beta}p(c - 0)\beta y'(c - 0)u(c) - r(c)y(c - 0)u'(c))$$

$$= \frac{y(c - 0)}{u(c)}\big(p(c - 0)y'(c - 0)u(c) - r(c)y(c - 0)u'(c)\big)$$

eşitliklerini elde ederiz. (2.21), (2.22) ve (2.25) eşitlikleri gereği (2.16) eşitliğinin sağ tarafı sıfıra eşittir. Böylece çelişki elde ettik. İspat bitti.

Teorem 3. Kabul edelim ki, bir önceki teoremin (2.13) şartı hariç tüm şartları sağlanır ve (2.13) şartında " $\geq$ "0 yerine " > 0" yazmak kaydı ile bu şart da sağlanır. O halde (2.12) SLD'nin $u(x_1) = 0$ şartını sağlayan her u(x) çözümünün $(x_1, x_2) \cap \Omega$ açık kümesinde en az bir sıfırı mevcuttur.

İspat. Kabul edelim ki (2.12) tek-aralıklı SLD'nin $\mathrm{u}(\mathrm{x}_1) = 0$ ve $\forall x \in (x_1, x_2) \cap \Omega$ için $u(x) \neq 0$ olacak biçimde en az bir u(x) çözümü mevcuttur. Yine de genelliği azaltmadan $\forall x \in (x_1, x_2) \cap \Omega$ için $y(x) > 0$ ve $u(x) > 0$ olduğunu kabul edebiliriz. y(x) ve u(x) fonksiyonlarının lineer bağımlı ve lineer bağımsız oldukları durumları ayrı ayrılıkta araştıracağız.

Durum 1. İlk önce y(x) ve u(x)-in lineer bağımlı olduğu durumu inceleyelim. Bu durumda $u(x_1) = u(x_2) = 0$ olacak. Ayrıca $\forall x \in (x_1, c) \cup (c, x_2)$ için

$$W(y, u; x) = 0$$

olacak. Bu durumda teoremin şartı gereği (2.16)-nın sol tarafı sıfırdan büyük olan bir reel sayıya eşit olacak. Ayrıca $\lim_{\substack{x \to x_1 \\ x > x_1}}(py'u - ryu')(x)$ limitinin mevcut olduğu ve

$$(py'u - ryu')(x_2 - 0) = 0$$

olduğu açıktır. Teorem-1'in ispatına tamamen benzer biçimde (2.16)-nın sağ tarafının sıfıra eşit olduğu ispat olunur. Böylece y(x) ve u(x)-in lineer bağımlı olduğu durum için çelişki elde ettik. Dolayısı ile bu durum için ispat tamamlanmış oldu.

Durum 2. y(x) ve u(x) fonksiyonlarının lineer bağımsız olduğunu kabul edelim. Bu durumda $u(x_2) = 0$ ve $u(x_2) \neq 0$ alt durumlarını ayrı-ayrılıkta incelememiz gerekir. $u(x_2) \neq 0$ durumu Teorem 1-in ispatına tamamen benzerdir. $u(x_2) = 0$ olduğu durumu inceleyelim. Bu durumda teoremin şartı gereği (2.16) eşitliğinin sol tarafı sıfırdan büyük, sağ tarafı ise sıfıra eşit olur. Çelişki elde edildi. İspat tamamlanmış oldu.

Sonuç 1. Kabul edelim ki, Teorem 2-nin (2.13) şartı dışında tüm şartları sağlanır. Eğer $\forall x \in (x_1, x_2) \cap \Omega$ için

$$p(x) \geq r(x)\,, \qquad q(x) \leq s(x)$$

şartları sağlanırsa o halde $u(x)$ çözümünün $(x_1, x_2] \cap \Omega$ -da en az bir sıfırı mevcuttur.

Sonuç 2. Kabul edelim ki, Teorem 2-in (2.13) hariç tüm şartları sağlanır ve en az bir $x_0 \in (x_1, x_2) \cap \Omega$ için

$$|p(x_0) - r(x_0)| + |q(x_0) - s(x_0)| > 0$$

eşitsizliği sağlanır. O halde (2.12) tek-aralıklı SLD-nin $u(x_1) = 0$ şartını sağlayan her aşikar olmayan u(x) çözümünün $(x_1, x_2) \cap \Omega$ kümesinde en az bir sıfırı mevcuttur.

3. Kaynaklar

Akbarfam, I., Jodayree, A., 2014. Resolvent Operator and Self-Adjointness of Sturm-Liouville Operators with a Finite Number of Transmission Conditions, Mediterranean Journal Of Mathematics, 11(2), 447-462.

Allahverdiev, B. P., Bairamov, E., Ugurlu, E., 2013. Eigenparameter dependent Sturm-Liouville problems in boundary conditions with transmission conditions, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 401, No. 1, 388-396 .

Allahverdiev, B. P., Tuna, H., 2018. Titchmarsh-Weyl Theory for Dirac Systems with Transmission Conditions, Mediterranean Journal of Mathematics 15.4 (2018): 1-12.

Allahverdiev, B. P., Tuna, H., 2019. Eigenfunction Expansion for Singular Sturm-Liouville Problems with Transmission Conditions, Electronic Journal of Differential Equations, 2019(03), 1-10.

Allegretto, W. 2001. Sturm theorems for degenerate elliptic equations. Proc. Am. Math. Soc. 129, 3031-3035.

Ao, J., Sun, J., 2014. Matrix representations of Sturm-Liouville problems with coupled eigenparameter-dependent boundary conditions, Applied Mathematics and Computation 244 (2014) 142-148

Aydemir, K., Mukhtarov, O. Sh., 2016. Qualitative analysis of eigenvalues and eigenfunctions of one boundary value-transmission problem, Boundary Value Problems, 1-16.

Aydemir, K., Mukhtarov, O. Sh., 2017. Generalized fourier series as Green's function expansion for multi-interval Sturm-Liouville systems, Mediterr. J. Math. (2017) 14:100.

Aydemir, K., Olğar, H., Mukhtarov, O. Sh., Muhtarov, F., 2018. Differential Operator Equations with Interface Conditions in Modified Direct Sum Spaces, Filomat 32(3), 921-931.

Bairamov, E., Ugurlu, E., 2012. On the characteristic values of the real component of a dissipative boundary value transmission problem, Appl. Math. and Comp. 218(2012), 9657-9663.

Binding, P.A., Langer, H., Möller, M., 2004. Oscillation results for Sturm–Liouville problems with an indefinite weight function. Journal of computational and applied mathematics, 171(1):93–101.

Binding, P.A., Rynne, P. B., 2004. Half-eigenvalues of periodic Sturm-Liouville problems, Journal of Differential Equations 206.2 (2004): 280-305.

Cannon, J. R., Meyer, G.H., 1971. On a Diffusion in a Fractured Medium, SIAM J. Appl. Math., 3 (1971), pp. 434-448.

Dzurina, J., 2018. Oscillation of the second order advanced differential equations, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 2018, No. 20, 1-9.

Grace, S. R., El-Morshedy, H. A., 2000. Oscillation criteria of comparison type for second order difference equations. Journal of Applied Analysis, 6(1):87–102, DOI: 10.1515/JAA.2000.87.

Graef, J. R., Jadlovsk, I., Tun, E., 2022. Oscillation of odd-order differential equations with a nonpositive sublinear neutral term and distributed deviating arguments, Applicable Analysis and Discrete Mathematics, 16(2), 350-364.

Kreith, K.,1973. Oscillation Theory. Lecture Notes in Mathematics, vol. 324. Springer, Berlin (1973).

Mukhtarov, O. Sh., Aydemir, K., 2021. Two-linked periodic Sturm-Liouville problems with transmission conditions, Mathematical Methods In The Applied Sciences 44 (18),14664-14676.

Mukhtarov, O. Sh., Aydemir, K., 2021. Oscillation Properties for Non-Classical Sturm-Liouville Problems with Additional Transmission Conditions, Mathematical Modelling and Analysis 26 (3), 432-443.

Mukhtarov, O. Sh., Olğar, H., Aydemir, K., Jabbarov I. S., 2018. Operator-pencil realization of one Sturm-Liouville problem with transmission conditions, Applied and Computational Mathematics 17.2 (2018): 284-294.

Mukhtarov, O. S., Yücel, M., 2020. A study of the eigenfunctions of the singular Sturm–Liouville problem using the analytical method and the decomposition technique. Mathematics, *8*(3), 415.

Mukhtarov, O. S., Yücel, M., Aydemir, K., 2020. Treatment a new approximation method and its justification for Sturm–Liouville problems. Complexity, *2020*, 1-8.

Picone, M., 1909. Sui valori eccezionali di un parametro da cui dipende un'equazione differenziale lineare ordinaria del second'ordine, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 11 (1909) 1-141.

Qiu, J., 2012. Positive solutions for a nonlinear periodic boundary-value problem with a parameter, Electronic Journal of Differential Equations 2012.133 (2012): 1- 10.

Simon, B., 2005. Sturm oscillation and comparison theorems, [in:] W.O. Amrein, A.M. Hintz, D.B. Hinton (eds), Sturm-Liouville Theory: Past and Present, Birkhuser Verlag, Basel, 2005; pp. 29-43.

Swanson, C. A., 1968. Comparison and oscillation theory of linear differential equations, Vol. 48, Academic Prees, New York and London.

Şen, E., 2021. Spectrum, Trace and Nodal Points of a Sturm-Liouville Type Delayed Differential Operator with Interface Conditions Rocky Mountain Journal of Mathematics (2021) 51 (1), 283-294.

Tiryaki, A., Sahiner, S., Mısırlı, E., 2016. Sturm comparison theorems for some elliptic type equations via Picone-tpye inequalities, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ., Proc. 10'th Coll. Qualitative Theory of Diff. Equ. 2016, No. 23, 1-20.

Ugurlu, E., 2020. On the characteristic values of the real component of a dissipative boundary value transmission problem,Quaestiones Mathematicae 43.4 (2020): 507-521.

Yoshida, N., 2008. Oscillation theory of partial differential equations, World Scientific.

Yücel, M., Muhtarov, F., 2023. Parameterized Differential Transform Method and Its Application to Boundary Value Transmission Problems. Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, *28*(2), 431- 442.

Yücel, M., Mukhtarov, O. S., Aydemir, K., 2023. Computation of eigenfunctions of nonlinear boundary-value- transmission problems by developing some approximate techniques. Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática, 41, 1-12.