



Sıkıştırılmaz bir sıvıyı varsayan Navier – Stokes denklemlerinin kesin çözümlerinin analizi

Analysis of exact solutions of Navier – Stokes equations assuming an incompressible fluid

Nesij Ünal^{1,*}, Yahya Öz², Tuğrul Oktay³

^{1,2} TUSAŞ – Türk Havacılık ve Uzay Sanayii, AR-GE ve Teknoloji Direktörlüğü, 06980, Ankara, Türkiye

³ Erciyes Üniversitesi, Uçak Mühendisliği Bölümü, 38039, Kayseri, Türkiye

Öz

Literatürde üç boyutta analitik olarak elde edilmiş olan sıkıştırılmaz ve ırsamasız, yani $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}(\vec{x}, t) = 0$ şeklindeki akışları varsayan Navier – Stokes sonuçları günden güne detaylandırılmakta ve genişletilmektedir. Bu amaç için nümerik incelemeler gerçekleştirilmiştir. Literatürde ilgili çalışmalarda, özellikle zamana bağlı viskoziteler $\mu(t)$ araştırılmaktadır. Bu sebepten kaynaklı olarak nümerik analizlerde $\mu(t) < \frac{1}{t}$ için Poincaré haritaları elde edilmiştir. Genel olarak, Navier-Stokes denklemleri, akışkanların hareketini matematiksel olarak tanımlayan temel kısmi diferansiyel denklemlerdir. Bu denklemler, bir akışkanın hızı, basıncı ve yoğunluğu arasındaki ilişkiyi açıklar. İlk denklem, momentum denklemi olarak bilinir ve akışkanın hızının zamanla nasıl değiştiğini belirler. İkinci denklem, kütle denklemi olarak adlandırılır ve akışkanın yoğunluğunun nasıl değiştiğini ifade eder. Üçüncü denklem, enerji denklemi olarak bilinir ve akışkanın enerji değişimini hesaplar. Son denklem ise, sıcaklık ve basınç gibi termodinamik özellikleri ilişkilendirir. Bu kuple denklemler, akışkan dinamiğini ve mühendislik uygulamalarını anlamak için önem arz etmektedir. Bu kapsamda, viskozite için farklı varsayımlar ele alınmaktadır. Üç farklı durum incelenmiştir. Bu varsayımlar; viskozitenin zamana bağlı üst limiti, zamana bağlı alt limiti ve sabit alt limiti kapsamaktadır. Ek olarak, literatür ile ilişkilendirilmiş olan Beltrami denkleminin çözümleri için, ki bu vektör alanları kendi rotasyonlarına paraleldir, belirli akışkanların düzensiz çıkış çizgilerine sahip olmadığına dair kanıtlar sunulmaktadır. Viskozitenin sabit olduğunda bu durum Trkalyan (yani zamana bağlı katlanarak zayıflayan) akışkanlarının dinamiği düzensiz olmadığını kanıtlamaktadır.

Anahtar kelimeler: Sıkıştırılmaz akış, Navier–Stokes, Trkalyan akışları, Beltrami denklemi

1 Giriş

Akışkanlar mekaniği, doğamızın önemli bir parçası olan sıvıların ve gazların hareketini inceleyen bir bilim dalıdır. Bu alandaki temel bilgiler, birçok endüstriyel ve bilimsel uygulamanın temelini oluşturur. Akışkanların hareketini

Abstract

Navier – Stokes results which assume incompressible fluids and divergence-free flows, i.e. $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}(\vec{x}, t) = 0$, obtained analytically for three dimensions in the literature, are expanded. For this purpose, numerical analyses were performed. In related studies, especially time-dependant viscosities $\mu(t)$ were investigated. Therefore, Poincaré maps were obtained for $\mu(t) < \frac{1}{t}$. The Navier-Stokes equations are fundamental partial differential equations that mathematically describe the motion of fluids. These equations establish the relationship between velocity, pressure and density of a fluid. The first equation, known as the momentum equation, determines how the velocity of a fluid changes over time. The second equation, called the mass equation, expresses how the density of the fluid changes. The third equation, the energy equation, calculates the energy changes within the fluid. The fourth equation relates thermodynamic properties such as temperature and pressure. These coupled equations are crucial for understanding fluid dynamics and engineering applications. In this context, different assumptions for the viscosity are considered. Three different cases were examined. These assumptions include a time-dependent upper limit, time-dependent lower limit and constant lower limit of viscosity. In addition, evidence is presented that certain streams of literature-related solutions of the Beltrami equation which are vector fields parallel to their own curl do not have chaotic streaklines. For constant viscosities, this proves that the dynamics of Trkalian (exponentially decreasing with the time) flows are not chaotic.

Keywords: Noncompressible flow, Navier–Stokes, Trkalyan flow, Beltrami equation

tanımlayan temel denklemlerden biri, Jean-Louis Marie Poiseuille ve Claude-Louis Navier tarafından 19. yüzyılın başlarında geliştirilen Navier-Stokes denklemleridir. Bu denklemler; bir akışkanın hızını, basıncı ve viskoziteye (akışkanın yapısının içsel sürtünmesi) bağlı olarak tanımlar ve akışkanların davranışını analiz etmek için kullanılır.

* Sorumlu yazar / Corresponding author, e-posta / e-mail: neunal@tai.com.tr (N. Ünal)

Geliş / Received: 03.10.2023 Kabul / Accepted: 15.01.2024 Yayınlanma / Published: 15.04.2024

doi: 10.28948/ngumuh.1370615

Navier-Stokes denklemleri, karmaşık akışkan hareketlerini modellemek ve anlamak için sıklıkla kullanılan bir araç haline gelmiştir. Birçok mühendislik, fizik, matematik ve bilgisayar bilimi uygulamasında kullanılan bu denklemler; özellikle sıvı dinamiği, havacılık, gemi inşaatı, hava tahmini, tıbbi görüntüleme ve endüstriyel süreçler gibi birçok alanda büyük önem taşır [1].

Navier-Stokes denklemleri, hız denklemleri (momentum denklemleri) ve devir (süreklilik) denklemi olmak üzere temelde iki ana bileşenden oluşur. Hız denklemleri, bir akışkanın hızını ve değişimini tanımlar ve bu değişimi etkileyen dış kuvvetleri, viskoz sürtünmeyi ve basınç farklarını hesaba katar. Devir denklemi ise madde ve momentumun korunumu ilkesine dayanır ve bir akışkanın kütle korunumunu ifade eder [1].

Akışlar, bilimsel ve mühendislik uygulamaları için büyük ilgi görmektedir. Önemli örnek kullanımlar arasında havacılık bilimleri, kan akışları, astrofizik, plazma manyeto-hidrodinamiği, hava için kirlilik analizleri, okyanus akıntıları ve hava tahminlerinin yanı sıra otomobiller, klimalar, fanlar ve borulardaki su akışları yer alır [2-7]. Özellikle havacılık endüstrisinde, kanat etrafındaki davranış platformun uçuş karakteristiği için belirleyici olduğu için akışlar önemli bir rol oynamaktadır. Bununla birlikte, temel denklemlerin matematiksel yapısı oldukça karmaşık olduğundan, nicel sonuçların elde edilmesi son derece zorlaşmaktadır. Sonuç olarak; akışkanlar mekaniği üzerine araştırma, yüksek performanslı bilgisayarlar için ana çalışma alanlarından biridir [8, 9].

Lineer-viskoz Newton akışkanlarının akışları; enerji, momentum ve kütle için korunum yasalarından elde edilen Navier – Stokes momentum denklemleri ile karakterize edilirken, Euler denklemleri viskoz olmayan akışları tarif eder [10, 11]. Temel olarak Navier-Stokes denklemleri, bir akışın içindeki iç gerilimin basınç ve difüz viskoz terimi ile ilişkili olduğu gözlemlerle birlikte, akış hareketi için Newton'un ikinci yasasını beyan eder. Euler denklemleri ise viskoz olmayan akışkanları tarif etmektedir [10]. Bu denklemler astrofizik kullanılarak dahi türetilmektedirler [12]. Türbülans teorisinin aynı zamanda Navier – Stokes momentum denklemleri [13] tarafından incelenen akışkanlar mekaniğinin önemli bir alanı olduğu ayrıca bilinmektedir. Ek olarak, manyetik hidrodinamik analizleri Maxwell denklemlerinin kullanımı ile gerçekleştirmek mümkündür.

Navier – Stokes momentum denklemlerini sayısal yöntemlerle incelemek için modern yaklaşım gelişmiş hesaplamalı akışkanlar dinamiğinin benimsenmesidir. Bununla birlikte, bazı fonksiyonel kullanımlarda, bu gelişmiş sayısal analizlere rağmen sonuçların elde edilmesi çok karmaşık hale gelebilir, öyle ki araştırmalar denklemlerin çözümlerini oluşturmak için istatistiksel yaklaşımlara bağlı olabilmektedir. Bununla birlikte, kuantum hesaplamaları ve doğrudan Monte Carlo yaklaşımları büyük önem taşımaktadır [14, 15].

Ayrı bir yöntem, \mathbb{R}^3 veya $\mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ üzerindeki Navier – Stokes çözümlerinin varlığı ve doğruluğu gibi temel özellikleri türetmek için ilişkili denklemlerin analitik olarak incelenmesidir. Buna göre, analitik çözümler oluşturmak oldukça önemlidir ve özel koşullar için çalışmalar

gerçekleştirilmiştir [16-20]. Ayrıca, analitik sonuçlara göre bir uçak tasarlamak gibi pratik uygulamalar için de önem taşımaktadır [21].

Bu çalışmada, literatürde analitik olarak elde edilmiş olan sonuçlar [22] genişletilmektedir ve nümerik olarak incelenmektedir. Bahsi geçen analitik çözümlerinin Poincaré haritaları elde edilmiş ve kesişim noktaları görselleştirilmiştir. Ek olarak, Beltrami denkleminin çözümleri için Trkalyan akışlarının düzensiz çıkış çizgilerine sahip olmadığına dair kanıtlar da sunulmaktadır. Uzun yıllardır literatürde bilinen Trkalyan akışları [23] için bu unsur elde edilmiştir. Bu sonuçları elde etmek için geleneksel metodolojiler kullanılmaktadır, zira nümerik metotlar farklı bağılıkları ortaya çıkartmakta zorlanmaktadır. Analitik çözümlerin, kararlılık analizleri ve sayısal çözümlerin kontrolleri amacıyla kullanılabilmesi ve aynı zamanda çeşitli fiziksel parametreler arasındaki ilişkileri ortaya çıkarabilmesi nedeniyle oldukça ilgi çekicidir. Bu sebeplerden kaynaklı olarak hem analitik hem nümerik stratejiler güdülererek farklı sonuçlar elde edilmiştir.

2 Materyal ve metot

Sapmadan bağımsız akışlar (yani $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}(\vec{x}, t) = 0$) için sıkıştırılmaz Navier–Stokes momentum denklemi; konum vektörü \vec{x} , zaman t , sabit yoğunluk ρ , basınç $p(\vec{x}, t)$, zamana bağlı dinamik viskozite $\mu(t)$, yer çekimsel potansiyel $\varphi(\vec{x})$ ve akış hızı $\vec{u}(\vec{x}, t)$ dikkate alınarak belirtilmiş şekilde geçerlidir.

$$\partial_t \vec{u}(\vec{x}, t) + (\vec{u}(\vec{x}, t) \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}(\vec{x}, t) = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p(\vec{x}, t) + \frac{\mu(t)}{\rho} \Delta \vec{u}(\vec{x}, t) + \vec{\nabla} \varphi(\vec{x})$$

Bu denklemin çözümü, literatürde belirli varsayımlar kullanılarak elde edilmiştir [22]. Bu kapsamda değişkenlerin ayrılması, yani;

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = f(t) \vec{U}(\vec{x}),$$

$f(t)$ 'nin zamana bağlı bir fonksiyon olması ve $\vec{U}(\vec{x})$ 'in Beltrami vektör alanı olması, yani kendi rotasyonuna paralel olması, varsayımlar sonucu;

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = c_4 e^{-\frac{\lambda^2}{\rho} \int_0^t d\tau \mu(\tau)} \vec{U}(\vec{x}),$$

$$p(\vec{x}, t) = c_3 + \rho \varphi(\vec{x}) - \frac{\rho}{2} \vec{u}^2(\vec{x}, t)$$

olarak elde edilmiştir. c_3 , c_4 ve λ matematiksel diferansiyel denklem çerçevesinden kaynaklanan sabitlerdir. Beltrami vektör alanı; $\vec{U}(\vec{x})$ yerine kaynak [22]'de türetilmiş olan;

$$\begin{aligned} \vec{F}_4(\vec{x}, \xi, \zeta) &= a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3, \\ a_1 &= \frac{1}{r^4} \left(\left(\frac{3-r^2}{r} \sin r - 3 \cos r \right) \right. \\ &\quad \cdot ((1-2\xi)x + yz + \zeta(y^2 - z^2)) \\ &\quad \left. + \frac{x}{r^2} \left(\frac{6r^2-15}{r} \sin r - (r^2-15) \cos r \right) \right. \\ &\quad \left. \cdot (z^2 - \xi(y^2 + z^2) + 2\zeta yz) \right), \\ a_2 &= \frac{1}{r^4} \left(\left(\frac{3-r^2}{r} \sin r - 3 \cos r \right) \right. \\ &\quad \cdot ((1+\xi)y - (1-\xi)xz - \zeta(3z + xy)) \\ &\quad \left. + \frac{1}{r^2} \left(\frac{6r^2-15}{r} \sin r - (r^2-15) \cos r \right) \right. \\ &\quad \left. \cdot ((\xi x^2 + z^2)y + \zeta z(y^2 - x^2 - z^2)) \right), \\ a_3 &= \frac{1}{r^4} \left(\left(\frac{3-r^2}{r} \sin r - 3 \cos r \right) \right. \\ &\quad \cdot ((\xi-2)z - \xi xy - \zeta(3y - xz)) \\ &\quad \left. + \frac{1}{r^2} \left(\frac{6r^2-15}{r} \sin r - (r^2-15) \cos r \right) \right. \\ &\quad \left. \cdot (((\xi-1)x^2 - y^2)z + \zeta y(z^2 - x^2 - y^2)) \right) \end{aligned}$$

vektör alanının kullanımı ile;

$$\begin{aligned} \dot{r}(t) &= \frac{c_4}{r^4(t)} e^{-\frac{\lambda^2}{\rho} \int_0^t d\tau \mu(\tau)} \\ &\quad \cdot \left(\frac{3-r^2(t)}{r(t)} \sin r(t) - 3 \cos r(t) \right) \\ &\quad \cdot ((\xi-2) \cos^2 \theta(t)) \\ &\quad - \frac{\xi-2+3\xi \cos(2\phi(t))}{2} \sin^2 \theta(t) \\ &\quad - 3\zeta \sin(2\theta(t)) \sin \phi(t) \end{aligned} \quad (1)$$

küresel koordinat sistemi kullanımı, yani $r(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}$, $\theta(t)$, $\phi(t)$ ve $\vec{x} = (x(t) \ y(t) \ z(t))^T$, ile elde edilmiştir. Bu denklemin nümerik analizi kartezyen koordinatlar kullanılarak 3. bölümde sunulmaktadır. Bu kapsamda;

$$\tan r_j = \frac{3r_j}{3-r_j^2}, \quad j = 1, 2, \dots$$

denklemini sağlayan r_j yarıçaplı tüm küreler, bahsi geçen Beltrami vektör alanı $\vec{F}_4(\vec{x}, \xi, \zeta)$ için değişmez alt manifoldlar olduğu da literatürde gösterilmiştir [22]. Zira bu durumda küresel birim vektörü \vec{e}_r dikkate alındığında

$$\vec{e}_r \cdot \vec{F}_4(\vec{x}, \xi, \zeta) \Big|_{r=r_j} = 0$$

denklemini geçerlidir. Bahsi geçen analiz için ilk iki kürenin nümerik yarıçapları $r_1 \approx 5.76346$ ve $r_1 \approx 9.09501$ olarak belirlenmiştir.

2.1 Sonsuz uzunlukta çıkış çizgileri

Kaynak [22]'de elde edilmiş sonuçları incelemek adına;

$$\mu(t) \leq \frac{1}{\lambda^2 t}, \quad t \geq t_1 > 0$$

koşulu varsayıldığında;

$$\begin{aligned} \int_0^t d\tau \mu(\tau) &\leq \int_0^{t_1} d\tau \mu(\tau) + \frac{1}{\lambda^2} \ln \frac{t}{t_1} \\ \Rightarrow e^{-\frac{\lambda^2}{\rho} \int_0^t d\tau \mu(\tau)} &\geq e^{-\frac{\lambda^2}{\rho} \int_0^{t_1} d\tau \mu(\tau)} \cdot \frac{1}{\rho} \ln \frac{t}{t_1} \end{aligned}$$

denklemleri elde edilmektedir. Bu durum ise sabit bir küme $S \subset \mathbb{R}^3$ için $|\vec{u}(\vec{x}, t)| \geq B > 0$ varsayıldığında;

$$\int_0^t d\tau |\vec{u}(\vec{x}, \tau)| \geq B \left(\ln \frac{t}{t_1} \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{\rho} \int_0^{t_1} d\tau \mu(\tau)} + \frac{\ln t_1}{\rho} \right)$$

denkleminin açığa çıkmasını sağlamaktadır. Yani $t \rightarrow \infty$ durumunda çıkış çizgilerinin uzunlukları $\int_0^t d\tau |\vec{u}(\vec{x}, \tau)|$ da sonsuza gitmektedir. Ek olarak, kaynak [22]'de tanımlanmış olan Reynolds sayısı bu varsayımlarla $Re = \infty$ sonucuna yol açmaktadır. $0 \leq r \leq r_1$ olarak tanımlanan kürede ve $r_1 \leq r \leq r_2$ olarak tanımlanan kabukta çıkış çizgileri bu sebeplerden kaynaklı olarak düzensiz davranış sergilemektedir.

2.2 Sonlu uzunlukta çıkış çizgileri

Kaynak [22]'de $\mu(t) \geq \tilde{\mu} > 0$ varsayımı, yani tüm sabit viskoziteler için;

$$\int_0^\infty dt |\vec{u}(\vec{x}(t), t)| \leq \frac{\rho}{|\lambda|} Re$$

denklemleri türetilmiştir. Yani çıkış çizgisinin üst limiti bulunmaktadır. Herhangi bir akışkan parçacığı tarafından t süresinden sonra geçen bir çıkış çizgisinin kalan uzunluğu $t \rightarrow \infty$ için azalmaktadır ve aşağıdaki denklem ortaya çıkmaktadır;

$$\int_t^\infty d\tau |\vec{u}(\vec{x}(\tau), \tau)| \leq \frac{\rho}{|\lambda|} e^{-\frac{\lambda^2 \tilde{\mu} t}{\rho}} Re \quad (2)$$

Bu sebepten dolayı, bahsi geçen viskoziteler için sunulmuş olan Trkalyan akışlarının düzensiz çıkış çizgilerine sahip olmadığı gözlemlenmektedir. Ayrıca

viskoz akışkanlar dinamiğinin **Denklem (2)**'den kaynaklı olarak bir belirli sürenin üstünde donduğu aşıkardır zira bu denklemde ilgili zaman noktasında başlayan entegralin üst limiti vardır. Bu üst limit ise büyüyen zaman t için üstel şekilde küçülmektedir.

2.3 Viskozite için üçüncü varsayım

Ayrı bir varsayım olan

$$\mu(t) \geq \frac{m}{t}, \quad m > \frac{\rho}{\lambda^2}, \quad t \geq t_2 > 0 \quad (3)$$

durumu için ise;

$$\begin{aligned} |\vec{u}(\vec{x}(t), t)| &\leq \tilde{\mu}|\lambda| \operatorname{Re} e^{-\frac{\lambda^2}{\rho} \int_0^t d\tau \mu(\tau)} \\ &= \tilde{\mu}|\lambda| \operatorname{Re} e^{-\frac{\lambda^2}{\rho} (m \ln \frac{t}{t_2} + \int_0^{t_2} d\tau \mu(\tau))} \\ &= \tilde{\mu}|\lambda| \operatorname{Re} \frac{e^{-\frac{\lambda^2}{\rho} (\int_0^{t_2} d\tau \mu(\tau) - m \ln t_2)}}{t^{\frac{\lambda^2 m}{\rho}}} \end{aligned}$$

ortaya çıkmaktadır. $m > \frac{\rho}{\lambda^2}$ kullanıldığında ise $\frac{\lambda^2 m}{\rho} > 1$ olduğu görülmektedir. Bu denklemler kullanılarak çıkış çizgilerinin uzunlukları incelendiğinde;

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dt |\vec{u}(\vec{x}, t)| &\leq \tilde{\mu}|\lambda| \operatorname{Re} \int_0^\infty dt e^{-\frac{\lambda^2}{\rho} \int_0^t d\tau \mu(\tau)} \\ &\leq \tilde{\mu}|\lambda| \operatorname{Re} \left(\int_0^{t_2} dt' e^{-\frac{\lambda^2}{\rho} \int_0^{t'} d\tau \mu(\tau)} \right. \\ &\quad \left. + e^{-\frac{\lambda^2}{\rho} (\int_0^{t_2} d\tau \mu(\tau) - m \ln t_2)} \cdot \int_{t_2}^\infty \frac{dt}{t^{\frac{\lambda^2 m}{\rho}}} \right) \\ &= \tilde{\mu}|\lambda| \operatorname{Re} \left(\int_0^{t_2} dt' e^{-\frac{\lambda^2}{\rho} \int_0^{t'} d\tau \mu(\tau)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^{-\frac{\lambda^2}{\rho} (\int_0^{t_2} d\tau \mu(\tau) - m \ln t_2)}}{\left(\frac{\lambda^2 m}{\rho} - 1\right) t_2^{\frac{\lambda^2 m}{\rho} - 1}} \right) \end{aligned}$$

denklemleri üst sınır olarak türetilmektedir. Sonuç olarak varsayım (3)'teki viskoziteler için düzensiz çıkış çizgilerinin olmadığı ortaya çıkmaktadır. Bu varsayım ise oldukça önemlidir çünkü bu durumda Reynolds sayısı sıfırdır ($\operatorname{Re} = 0$). Yani Reynolds sayısının sıfır olduğu bir durum için düzensiz çıkış çizgilerinin olmadığı ispatlanmıştır.

Özet olarak; sonuçlar incelendiğinde belirli varsayımlar için çıkış çizgilerinin analizi ile türbülanssız dinamikler elde

edilmiştir. Bu durum önem arz etmektedir çünkü literatürde türbülanslı akışlar çok yaygın iken [26] türbülanssız sonuçlar daha nadir görünmektedir.

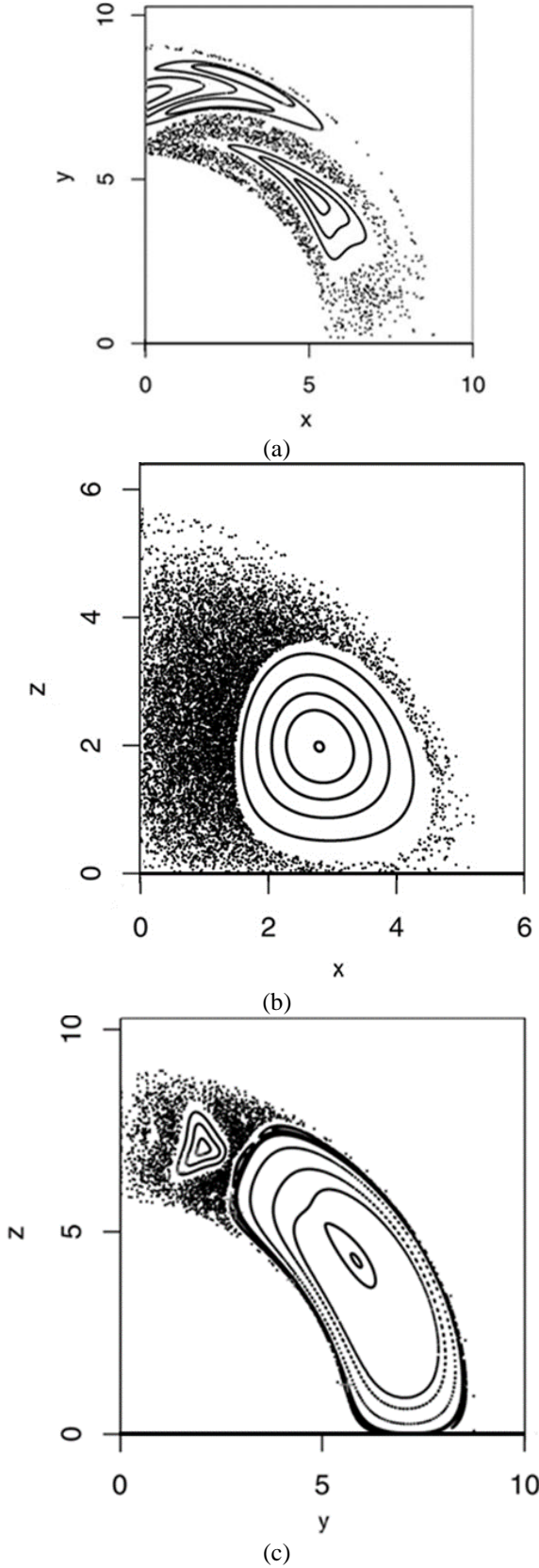
2.4 Nümerik metodoloji

Poincaré haritalarını elde etmek için bağımlı değişkenlerden biri bağımsız değişkene dönüştürülmektedir. Bu metod, yaklaşımın tek adımda gerçekleştirilmesine olanak tanıyan ve böylece klasik yöntemlerle [24] ilişkili hata birikimini önleyen bir denklem seti sağlar. Bu dönüşümü sadece son aşamada uygulamak yerine her zaman faz değişkenlerinden birinin bağımsız olması şeklinde uygulanmaktadır. Ardından Poincaré haritasını oluşturan örgü noktaları dizisini elde eden integral için Euler metodu kullanılmıştır. Bahsi geçen ilgili yaklaşım literatürde yaygın olarak kullanılmaktadır [25].

3 Nümerik bulgular ve tartışma

Denklem sistemi (1) tarafından açıklanan dinamik, esas olarak ξ ve ζ parametrelerinin değerlerine bağlıdır. $\xi = \frac{1}{8}$ ve $\zeta = \frac{1}{20}$ için sonuçlar **Şekil 1**'de gösterilmektedir. $\lambda = \rho = 1$ seçilerek her çıkış çizgisinin uzunluğu $t \rightarrow \infty$ ile beraber sonsuza gitmesi, $\mu(t) < \frac{1}{t}$ denkleminde kaynaklı olarak kesinleştirilmiştir. **Şekil 1(c)**, $r_1 \leq r \leq r_2$ kabuğunun içinde $x = 0$ düzlemi ile 7 farklı yörüngenin Poincaré harita kesişimlerini göstermektedir. Bu yörüngelerin dördü belirli alt alanlarda yoğunudur ve her biri seçilmiş zaman aralığında $x = 0$ düzlemine 2000 defadan fazla çarpmaktadır. **Şekil 1(b)**, bu yörüngelerin $r_1 \leq r \leq r_2$ küresel kabuğunun içindeki $z = 0$ düzlemi ile kesişim noktalarını göstermektedir. Geri kalan yörüngeler, **Şekil 1(a)** ve **(c)**'deki kapalı eğrilerde $x = z = 0$ düzlemlerini kesen değişmez toruslar (toriler) \mathbb{T}^2 'ye aittir. **Şekil 1(a)**, $0 \leq r \leq r_1$ içindeki $y = 0$ düzlemi ile onbir farklı yörüngenin kesişim noktasını göstermektedir. Bir yörünge, $y = 0$ düzlemine seçilmiş zaman aralığında 10.000 defadan fazla çarpmaktadır ve bağlı olan alt alanda yoğunudur. Diğer yörüngeler, **Şekil 1(a)**'daki kapalı eğrilerde, $y = 0$ düzlemiyle kesişen değişmez toruslar \mathbb{T}^2 'ye aittir. Bu sonuçlar, dinamiklerin bütünlük olmadığını ve **(1) denkleminde** ait akışta, doğrudan olmayan vektörler için düzensiz çıkış çizgilerinin varlığını ve ayrıca istikrarsızlığını gösterir. Bu çıkış çizgileri zamana bağlı viskoziteler için kabuk ve küre içinde belirlenmiştir. Bazı çıkış çizgileri iki boyutlu toruslar \mathbb{T}^2 üzerinde yoğunken, komşu çıkış çizgileri belirli üç boyutlu bölgelerde yoğunudur.

Yapılan analizler alt limitli viskoziteler için Trkalyan akışlarını [23] da kapsamaktadır. Buradaki çıkış çizgilerinin sonlu uzunluklara sahip olduğunu ve bu nedenle düzensiz bir davranış göstermediği anlaşılmaktadır. Yani Trkalyan akışları sabit alt limitli viskoziteler göz önünde bulundurulduğunda kaotik davranış veya türbülans sergileyememektedir. Bunun aksine literatürde farklı viskoziteler incelenmiş ve sonlu uzunluklar tespit edilmemiştir [27].



Şekil 1. (a) $z = 0$ için $0 \leq r \leq r_1$, (b) $y = 0$ için $r_1 \leq r \leq r_2$ ve (c) $x = 0$ için $r_1 \leq r \leq r_2$ aralığında Poincaré haritaları

4 Sonuçlar

Bu çalışmada, literatürde yakın zamanda elde edilmiş sıkıştırılmaz ve iraksamasız akışlar varsayan analitik Navier – Stokes sonuçları incelenmiştir. Üç farklı viskozite durumu incelenmiştir. Bu varsayımlar viskozitenin zamana bağlı üst limitini $\mu(t) \leq \frac{1}{\lambda^2 t}$, zamana bağlı alt limitini $\mu(t) \geq \frac{m}{t}$ ve sabit alt limitini $\mu(t) \geq \bar{\mu}$ kapsamaktadır. İlk durum haricinde çıkış çizgilerinin uzunluklarının sınırlı olduğu kanıtlanmıştır. Özellikle sabit alt limit, Trkalyan akışlarını da kapsamaktadır. Buradaki tüm çıkış çizgilerinin sonlu uzunluklara sahip olduğunu ve bu nedenle düzensiz bir davranış göstermediği kanıtlanmıştır. Yani Trkalyan akışları sabit alt limitli viskoziteler göz önünde bulundurulduğunda asla kaotik davranış veya türbülans sergileyememektedir. Son olarak, çizgilerin dinamiği nümerik olarak incelenmiştir. Bunun için, sıkıştırılmaz ve iraksamasız akışlar varsayan analitik Navier – Stokes sonuçlarının Poincaré haritaları elde edilmiştir. $r_1 \leq r \leq r_2$ kabuğunun içinde $x = 0$ düzlemi ile 7 farklı yörüngenin Poincaré harita keşişimleri elde edilmiştir. Her biri $x = 0$ düzlemine 2000 defadan fazla çarpmaktadır. Bir yörünge $y = 0$ düzlemine seçilmiş zaman aralığında 10.000 defadan fazla çarpmaktadır. Bu sonuçlar, dinamiklerin bütünlük olmadığını ve akışta kaotik çıkış çizgilerinin varlığını göstermektedir. Bu durum ise bahsi geçen viskozite varsayımları geçerli olmadığında davranışın doğal olarak düzensizleştiğini kanıtlamaktadır.

Çıkar çatışması

Yazarlar çıkar çatışması olmadığını beyan etmektedir.

Benzerlik oranı (iThenticate): % 11

Kaynaklar

- [1] D. J. Acheson, Elementary Fluid Dynamics. Oxford University Press, Oxford, 1990.
- [2] B. Bilalov, T. Gasymov and A. Guliyeva, On the solvability of the Riemann boundary value problem in Morrey–Hardy classes. Turkish Journal of Mathematics, 40, 5, 14, 1085 – 1101, 2016. <https://doi.org/10.3906/mat-1507-10>
- [3] C. X. Li and S. Liang Wu, Eigenvalue distribution of relaxed mixed constraint preconditioner for saddle point problems. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 45, 6, 1705 – 1718, 2016. <https://doi.org/10.15672/HJMS.20164515686>
- [4] A. Pınarbaşı and M. İmal, Nonisothermal channel flow of a non-newtonian fluid with viscous heating. International Communications in Heat and Mass Transfer, 29, 8, 1099 – 1107, 2002. [https://doi.org/10.1016/s0735-1933\(02\)00438-4](https://doi.org/10.1016/s0735-1933(02)00438-4)
- [5] F. Reetz, T. Kreilos and T. M. Schneider, Exact invariant solution reveals the origin of self-organized oblique turbulent-laminar stripes. Nature Communications, 10, 2277, 2019. <https://doi.org/10.1038/s41467-019-10208-x>
- [6] M. Scholle, P. H. Gaskell and F. Marner, Exact integration of the unsteady incompressible Navier-Stokes equations, gauge criteria, and applications.

- Journal of Mathematical Physics, 59, 4, 2018. <https://doi.org/10.1063/1.5031119>
- [7] N. Uygun, Effect of hall current on the MHD fluid flow and heat transfer due to a rotating disk with olauniform radial electric field. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 44 (6), 1445 – 1462, 2015. <https://doi.org/10.15672/HJMS.2015449675>
- [8] N. Ünal, Y. Öz and T. Oktay, Conceptual design modeling by the novel aircraft conceptual design and analysis system (ACDAS). Aircraft Engineering and Aerospace Technology, 95, 5, 799 – 813, 2023. <https://doi.org/10.1108/AEAT-02-2022-0056>
- [9] A. Urichuk, Y. Oez, A. Klümper and J. Sirker, The spin Drude weight of the XXZ chain and generalized hydrodynamics. SciPost Physics, 6, 1, 005, 2019. <https://doi.org/10.21468/SciPostPhys.6.1.005>
- [10] J. D. Gibbon, The three-dimensional Euler equations: Where do we stand?. Physica D: Nonlinear Phenomena, 237, 14–17, 1894 – 1904, 2008. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2007.10.014>
- [11] H. Gümral, Lagrangian description, symplectization, and Eulerian dynamics of incompressible fluids. Turkish Journal of Mathematics, 40, 5, 925 – 940, 2016. <https://doi.org/10.3906/mat-1410-38>
- [12] V. I. Arnold, S. F. Shandarin and Y. B. Zeldovich, The large scale structure of the universe I. General properties. Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics, 20, 1 – 2, 111 – 130, 1982. <https://doi.org/10.1080/03091928208209001>
- [13] A. M. Polyakov, Turbulence without pressure. Physical Review E, 52, 6, 6183 – 6188, 1995. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.52.6183>
- [14] F. Gaitan, Finding flows of a Navier–Stokes fluid through quantum computing. NPJ Quantum Information, 6, 61, 2020. <https://doi.org/10.1038/s41534-020-00291-0>
- [15] J. Ou and J. Chen, Hypersonic Aerodynamics of Blunt Plates in Near-Continuum Regime by Improved Navier–Stokes Model. AIAA Journal, 58, 9, 4037 – 4046, 2020. <https://doi.org/10.2514/1.J059333>
- [16] Liu, M., Li, X. and Zhao, Q. Exact solutions to Euler equation and Navier–Stokes equation. Z. Angew. Math. Phys, 70, 43, 1 – 13, 2019. <https://doi.org/10.1007/s00033-019-1088-0>
- [17] T. Pedergnana and et al., Explicit unsteady Navier–Stokes solutions and their analysis via local vortex criteria. Physics of Fluids, 32, 4, April 2020. <https://doi.org/10.1063/5.0003245>
- [18] Prosviryakov, E.Y. new class of exact solutions of Navier–Stokes equations with exponential dependence of velocity on two spatial coordinates. Theor Found Chem Eng, 53, 107 – 114, 2019. <https://doi.org/10.1134/S0040579518060088>
- [19] M.J. Zhang and W.D. Su, Exact solutions of the Navier–Stokes equations with spiral or elliptical oscillation between two infinite planes. Physics of Fluids, 25, 7, 2013. <https://doi.org/10.1063/1.4813629>
- [20] Y. Öz, Rigorous investigation of the Navier–Stokes momentum equations and correlation tensors. AIP Advances, 11, 5, 055009, 2021. <https://doi.org/10.1063/5.0050330>
- [21] E. Varley and B. R. Seymour, Applications of exact solutions to the Navier–Stokes equations: free shear layers. Journal of Fluid Mechanics, 274, 267 – 291, 2006. <https://doi.org/10.1017/S0022112094002120>
- [22] Y. Öz, Novel exact solutions to Navier–Stokes momentum equations describing an incompressible fluid. Turkish Journal of Mathematics, 46, 8, 3192 – 3200, 2022. <https://doi.org/10.55730/1300-0098.3327>
- [23] V. Trkal, A remark on the hydrodynamics of the viscous fluids. Journal for the Cultivation of Mathematics and Physics, 48, 3, 302 – 311, 1919. <https://doi.org/10.21136/CPMF.1919.109099>
- [24] M. Henon, On the numerical computation of Poincaré maps. Physica D: Nonlinear Phenomena, 5, 2 – 3, 412 – 414, 1982. [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(82\)90034-3](https://doi.org/10.1016/0167-2789(82)90034-3)
- [25] W. Tucker, Computing accurate Poincaré maps. Physica D: Nonlinear Phenomena, 171, 3, 127 – 137, 2002. [https://doi.org/10.1016/S0167-2789\(02\)00603-6](https://doi.org/10.1016/S0167-2789(02)00603-6)
- [26] P. D. Huck, N. Machicoane and R. Volk, Lagrangian acceleration timescales in anisotropic turbulence. Physical Review Fluids, 4, 6, 064606, 2019. <https://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.4.064606>
- [27] K. Whitehead and R. Gray, Generation and development of a viscous vortex ring. 10th Aerospace Sciences Meeting, San Diego, USA, 2012. <https://doi.org/10.2514/6.1972-151>

