Osmanlı Bilimi Araştırmaları
Studies in Ottoman Science

İSTANBUL UNIVERSITY PRESS

Osmanlı Bilimi Araştırmaları 25, 2 (2024): 401-419
DOI: 10.26650/oba.1374610

Araştırma Makalesi / *Research Article*

Bernoulli Teoremi ve Türkiye'ye Girişi

Bernoulli's Theorem and Its Reception in Türkiye

Zekeriya Duru[1]

[1]Doktora Öğrencisi, İstanbul Üniversitesi, Edebiyat Fakültesi Bilim Tarihi Bölümü İstanbul, Türkiye

ORCID: Z.D. 0000-0002-8934-2183

Sorumlu yazar/Corresponding author: Zekeriya Duru,
Doktora Öğrencisi, İstanbul Üniversitesi, Edebiyat Fakültesi Bilim Tarihi Bölümü İstanbul, Türkiye
E-posta/E-mail: zekzek53@hotmail.com

Başvuru/Submitted: 12.10 2023
Revizyon Talebi/Revision Requested: 19.12.2023
Son Revizyon/Last Revision Received: 15.01.2024
Kabul/Accepted: 27.02.2024

Atıf/Citation: Zekeriya. "Bernoulli's Theorem and Its Reception in Türkiye". *Osmanlı Bilimi Araştırmaları* 25, 2 (2024): 401-419. https://doi.org/10.26650/oba.1374610

ÖZ

Bernoulli Teoremi, olasılıkta çok özel bir konuma sahiptir ve olasılık tarihinin ilk önemli teorik başarısıdır. Büyük sayılar yasası, merkezi limit teoremi gibi matematik ve istatistiğin vazgeçilmez konularının temelini oluşturan Bernoulli Teoremi, elimizdeki verilere göre Salih Zeki tarafından yayınlanan ilk olasılık eseri *Hulâsa-i Hesâb-ı İhtimâlî*'sinde (1898) Türkiye'ye tanıtılmıştır. Osmanlı dönemi matematik eserleri ile ilgili geniş bir araştırma literatürü oluşmasına rağmen bu eserlerin matematiksel içeriğinin değerlendirmesi açısından daha alınacak uzun bir yol vardır. Bu duruma bir katkı olması için Bernoulli Teoremi ve bu teoremin *Hulâsa-i Hesâb-ı İhtimâlî*'de nasıl ele alındığı üzerinde durulmuştur. Eski harfli Türkçe ile yazılmış eserin tamamı okunmuş, ilgili kısımları günümüz Türkçesi ile yazılmış ve eserde yer alan Bernoulli Teoremi dönemin yabancı kaynakları ile karşılaştırılmış ve analiz edilmiştir. Araştırmamız, Salih Zeki'nin bir olasılık eserini ilk kez Türk bilimine kazandırması yönüyle bir öncü olduğunu teyit etmektedir. Ancak kitabında Bernoulli Teoremi olarak adlandırdığı teoremin farklı bir kavramı, günümüzdeki adıyla Littlewood Yasasını karşıladığı belirlenmiştir.

Anahtar sözcükler: Salih Zeki, *Hulâsa-i Hesâb-ı İhtimâlî*, Olasılık Tarihi, Bernoulli Teoremi

ABSTRACT

Bernoulli's Theorem has a very special position in probability and is the first crucial theoretical achievement in the history of probability. Bernoulli's Theorem, which forms the basis of indispensable topics in mathematics and statistics, such as the law of large numbers and the central limit theorem, was introduced to Turkey by Salih Zeki in the first probability work published in Turkey, *Hulâsa-i Hesâb-ı İhtimâlî* (1898). Although there is a large amount of research literature on Ottoman-period mathematical works, there is still a long way to go in terms of evaluating the mathematical content of these works. In order to contribute to this situation, Bernoulli's theorem and how this theorem is discussed in *Hulâsa-i Hesâb-ı İhtimâlî* are emphasized. The entire work, written in the old Turkish script, was read, the relevant parts were written in modern Turkish, and Bernoulli's theorem in the work was

compared and analyzed with foreign sources of the period. Our research confirms that Salih Zeki is a pioneer in that he introduced a work on probability to Turkish science for the first time. However, it was determined that the theorem he called Bernoulli's Theorem in his book corresponded to a different concept, Littlewood's Law, as it is known today.
Keywords: Salih Zeki, *Hulâsa-i Hesâb-ı İhtimâlî*, History of Probability, Bernoulli's Theorem

Extended Summary

Salih Zeki (1864-1921) returned to Istanbul after attending L'École Supérieure de Télégraphie in Paris between 1883 and 1887. He started to teach mathematical physics (hikmet-i riyaziyye) at the Mühendishâne-i Berrî-i Hümâyun, the Ottoman military engineering school. There are indications that he had covered probability topics as part of this course. In 1898 he published *Hulâsa-i Hesâb-ı İhtimâlî*, a booklet on probability which has the distinction of being the first in its field in Turkey. The small treatise has two chapters totaling fifty-eight pages. The first 40-page chapter of the book presents the theoretical concepts of probability. The second 18-page chapter includes examples on empirical probability.

Bernoulli's theorem was first presented with its proof by Jacques Bernoulli (1655-1705) in *Ars Conjectandi* (1713), his posthumous work in Latin. The theorem can be simply stated as follows;

With the probability approaching 1 or certainty as near as we please, we may expect that the relative frequency of an event E in a series of independent trials with constant probability p will differ from that probability by less than any given number $\varepsilon > 0$, provided the number of trials is taken sufficiently large. (J. V. Uspensky, Introduction to Mathematical Probability, 1937, 96.)

Unlike this statement, Salih Zeki wrote the theorem as follows and solved its examples in this context: "If the number of experiments for an event is increased to equal the simple probability of the event, the probability of that event will eventually be brought closer to the level of mathematical certainty." We will now briefly represent Salih Zeki's three examples.

Example 1: The probability of getting a 6 when a dice is rolled is $\frac{1}{6}$. If the dice were rolled twice, the probability of at least one of them getting a 6 would be $\frac{11}{36}$. Similarly, if a dice is rolled three times, the probability of getting a 6 for at least one of them is $\frac{91}{216}$. The probability of getting a 6 at least once when rolled four times is $\frac{671}{1296}$ and other situations can be calculated by continuing in this way. The resulting probabilities are getting larger and closer to 1 for each case where the number of experiments is increased.

Example 2: Let the probability of an event occurring be very small. If the number of experiments for the same event is gradually increased, the probability of the event approaches the level of certainty. For example, while the probability of drawing a white ball from a box containing 40 black and one white ball is $\frac{1}{41}$, this probability can be approached to the degree of mathematical certainty in 100 consecutive draws. Indeed, when drawn 100 times, the probability of being white is 0,91526.

Example 3: Consider the following sixteen situations that occur when balls a, b are drawn in quaternary:

$$aaaa\ aaab\ aaba\ abaa\ baaa\ aabb\ abab\ baab\ baba\ abba\ bbaa\ bbab\ abbb\ babb\ bbba\ bbbb$$

If two classes are accepted according to whether the quaternary order of a, b balls is mixed or uniform, the probabilities of these two classes of events will be $\frac{14}{16}$, $\frac{2}{16}$ respectively. Accordingly, the ratio of mixed-type events to all events is $\frac{14}{16}$. When the number of experiments is increased, this ratio also increases. Indeed, when the number of experiments is five, $\frac{30}{32}$ ratio is obtained, and when six experiments are performed, $\frac{62}{64}$ ratio is obtained. Thus, it is possible to bring the probability of mixed-type events closer to the level of mathematical certainty by increasing the number of experiments as much as possible.

Bernoulli's theorem has a privileged place in calculus of probability. Salih Zeki allocated a subchapter to this theorem in a small and concise textbook, *Hulâsa-i Hesâb-ı İhtimâlî* (1898), thus emphasizing its importance in a sense. The text of the theorem in the work and three related examples were examined. Here, it is stated that in experiments conducted for an event whose probability is not zero, if the number of experiments is increased as much as possible, this event will occur at the level of mathematical certainty. However, in the Bernoulli theorem texts that we see in the 18^{th} and 19^{th}-century probability works that Salih Zeki was aware of, it is emphasized that as the number of experiments increases, the ratio of the results obtained approaches a probability value p. Since Salih Zeki did not take into account approaching a certain probability value in his examples, the definition he gave does not belong to Bernoulli's theorem but to another rule called Littlewood's law today.

Giriş

Osmanlı modernleşmesinin başlangıcından itibaren, farklı alanlarda birçok matematik eseri Batı dillerinden tercüme yoluyla Türkçeye kazandırılmış ve dönemin modern okulları olan Mühendishane, Harbiye, Darülfünun gibi üst eğitim kurumlarında eğitimin bir parçası olmuşlardır. Ülkemizde yapılan matematik tarihi araştırmalarında özellikle dönemin logaritma[1], geometri[2], analitik geometri[3], analiz[4], sayılar teorisi[5] ve olasılık eserlerini konu edinen çalışmalar mevcuttur. Bu araştırmaların sonucunda ilgili konularda Osmanlı matematiğine, yalnızca tercüme eserler değil telif eserlerin de kazandırıldığı görülmektedir.

Çalışmamızda ele alınan olasılık bilimi ise yukarıdaki diğer dallara nispeten daha geç bir dönemde Osmanlı bilim sahasına girmiştir. Araştırmalarımız sonucunda bu konuda Salih Zeki dışında çalışma yapan başka bir isme rastlanmamıştır. Onun bu konuda yazdığı iki ders kitabı, *Hulasa-i Hesâb-ı İhtimâlî* (1898)[6] ve *Hesâb-ı İhtimâlât* (1912)[7] sırasıyla Mühendishâne-i Berrî-i Humâyûn ve Darülfünun'da kullanılmak üzere yazılmıştır. Eserler hakkında matematik tarihi kapsamında tek bir inceleme mevcuttur.[8] Adını andığımız eserlerin her ikisini de tanıtan bu inceleme, bir tez çalışması olup tezde, "*Hulasa-i Hesâb-ı İhtimâlî'*ye Genel Bakış" ve "*Hulasa-i Hesâb-ı İhtimâlî* Çevirisi" başlıkları altında eseri iki kez günümüz Türkçesi ile görmek mümkündür. Salih Zeki'nin konuyla ilgili üç eserinin karşılaştırıldığı bu tezin başka bir bölümünde eserlerin "içindekiler" kısımları sunulmuş ve aynı bölümün sonunda "Genel Değerlendirme" adı altında *Hulasa-i Hesâb-ı İhtimâlî* ile ilgili kısa bilgi verilmiştir:

> "…olasılık konusunu, açıklayıcı bir giriş ile Osmanlı matematik dünyasına tanıtmıştır. Olasılık düşüncesinin en temelinden işe başlayarak, matematiksel esaslarını da kavratmaya

---

1 Hasan Umut, "İsmail Gelenbevi at The Engineering School: The Ottoman Experience of European Science Through Logarithms" (MA thesis, Istanbul Bilgi University, 2011)

2 İnanç Akdenizci Demirtaş, "Salih Zeki'nin Lobaçevski Geometrisini Tanıtan İki Konferansı", *Osmanlı Bilimi Araştırmaları* 7, sayı 1 (2005): 67–78.; Ali Rıza Tosun, "Hüseyin Rıfkı Tamani'nin Çalışmaları Işığında Öklid Geometrisi'nin Türkiye'ye Girişi" (Ankara Üniversitesi, 2007); Dilek Kadıoğlu, "Salih Zeki's Darülfünun Konferansları and His Treatment of The Discovery of Non-Euclidean Geometries" (Middle East Technical University, 2013).

3 Semiha Betül Takıcak, "Osmanlılar'da Analitik Geometri: Hendese-i Halliye ve Hendese-i Tahlîliyye" (Ankara Üniversitesi, 2017); Semiha Betül Takıcak, "Osmanlılar'da Analitik Geometri", *Kebikeç*, sayı 47 (2019): 165–88; Semiha Betül Bayam Takıcak, "Başhoca İshak Efendi'nin Mecmûa-i Ulûm-ı Riyâziye Adlı Eserinin Analitik Geometri Açısından Değerlendirilmesi", *Dört Öge*, sayı 21 (2022): 89–114.

4 Ayşe Kökcü, "Osmanlılar'da Diferensiyel İntegral Hesap ve Eğitimdeki Yeri" (Ankara Üniversitesi, 2014); Hacer Köten, "Salih Zeki'de Modern Matematik Kavramları" (Gazi Üniversitesi, 2009); Cem Tezer, "Başhoca İshak Efendi ve Mecmu'a-yı 'Ulûm-ı Riyâziye", *Dört Öge*, sayı 2 (2012); Ayşe Kökcü, "Bir Osmanlı Muallimi ve Mühendisi Mustafa Salim Bey ve Hesâb-ı Asgar-ı Nâmütenâhiyat (Kısm-ı Evvel) Hesâb-ı Tefâzülî Adlı Eseri", *Ankara Üniversitesi Dil ve Tarih-Coğrafya Fakültesi Dergisi* 54, sayı 2 (2014): 407–18.

5 Safiye Yılmaz Erten, "Osmanlılarda Sayılar Teorisi ve Mehmed Nadir" (Ankara Üniversitesi, 2017).

6 Salih Zeki, *Hulâsa-i Hesâb-ı İhtimâlî* (İstanbul: Mühendishâne-i Berrî-i Humâyûn Matbaʿası, 1314).

7 Salih Zeki, *Hesâb-ı İhtimâlât* (İstanbul: Matbaʿa-i Âmire, 1328).

8 Ali Değirmenci, "Salih Zeki Bey'in Hülâsa-i Hesâb-ı İhtimâlî Adlı Eseri ve Olasılığın Türkiye'ye Girişi" (Ankara Üniversitesi, 2010)

> çabalamıştır … bugün pek alışık olmadığımız tarzda yazılmış bir matematik kitabıdır. Salih Zeki Bey, daha çok olasılığın dayandığı felsefeyi, bu konuda belki de hiçbir şey bilmeyen bir çevreye açıklamak amacını gütmüştür. Gerçekten de kitabın ortasına kadar matematiksel sembol yok gibidir. Kitabın sonlarına doğru olasılığın dayandığı matematik esasları anlatmıştır. Arada kalan kısımlarda örnekler vermiştir. Konu ve terim sınıflandırması, Batı'da kullanılan karşılıkları ve hatta bugün kullanılan terimler ile uygunluk içindedir."[9]

Verilen bu bilgiler dışında, tezin diğer bölümlerinde eserde yer alan olasılık kavramlarının matematiksel bir şekilde tetkik edilmediği görülmektedir. Bilhassa, deneysel olasılık ve Bernoulli Teoremi gibi önemli/öncelikli kavram ve kuramlar hâlâ matematiksel olarak analiz edilmeye muhtaçtır.[10] Çalışmamızda bu eksikleri gidermek üzere *Hulasa-i Hesâb-ı İhtimâlî*'de bulunan Bernoulli Teoremi ele alınmıştır. Bunun için önce teoremin tanıtımı yapılmış daha sonra Osmanlılarda olasılık biliminin sahneye ilk çıkışı üzerinde durulmuş ve son olarak Salih Zeki'nin Bernoulli Teoremi hakkındaki örnekleri incelenerek, elde edilen sonuçlar tartışılmıştır.

Bernoulli Teoreminin Arka Planı

Çalışmamızın ilerleyen bölümlerinin daha iyi anlaşılması için Bernoulli Teoremi[11] kısaca şöyle tanıtılabilir. Bernoulli Teoremi, ilk defa Jacques Bernoulli'nin[12] ölümünden sonra yayınlanan, *Ars Conjectandi* (1713) adlı Latince eserin dördüncü bölümünde kanıtı ile birlikte sunulmuştur.[13] Bu teorem daha sonra olasılık ve istatistik bilimlerinin en önemli konularından olan Büyük Sayılar Yasası ve Merkezi Limit Teoreminin temelini oluşturmuştur. Çalışmamızda, Bernoulli Teoremi, kuramsal olarak değil, temel matematik bilgisine sahip okuyucuların takip edebileceği bir seviyede ele alınmıştır. Bu nedenle, teorem ve kanıtların orijinal metinleri yerine kısa ve anlaşılır ifadeler tercih edilmiştir. Şöyle ki:

Bir olasılık deneyinde bir A olayının olasılığı p olsun. Aynı deney n kez bağımsız olarak yapıldığında, A olayının k kez olması ve n-k kez olmaması olasılığı, günümüzde binom olasılıkları olarak da bilinen aşağıdaki Bernoulli formülü ile hesaplanır:

$$P_n(k) = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Uygulamada bir olayın en büyük olasılığını, yani $P_n(k)$ olasılığının k'nın hangi değeri için en büyük olacağını bilmek faydalı olmaktadır. k_0 değeri ile $P_n(k_0)$ olasılığı en büyük değerini almış olsun. Bu durumda aşağıdaki iki eşitsizlik yazılabilir:

---

9 Değirmenci, 23.

10 Değirmenci, 26-49.

11 Araştırmamızın içeriğini teşkil eden olasılık alanındaki Bernoulli Teoremi, akışkanlar mekaniğinin önemli bir kuralı olan Bernoulli İlkesi ile karıştırılmaktadır. Bu ilke matematikçi, fizikçi ve hekim Daniel Bernoulli (1700-1782) tarafından keşfedilmiş, enerjinin korunumu yasasını temel alan bir kuraldır.

12 Bernoulli'nin ön adı yazıldığı dile göre değişiyor; Jacobi, Jacques, James veya Jacob.

13 James Bernoulli, *The Art of Conjecturing, together with Letter to a Friend on Sets in Court Tennis*, çev. Edith Dudley Sylla (Baltimore: The Johns Hopkins University Press, 2006), 326–39.

$$P_n(k_0+1) \leq P_n(k_0) \text{ ve } P_n(k_0-1) \leq P_n(k_0)$$

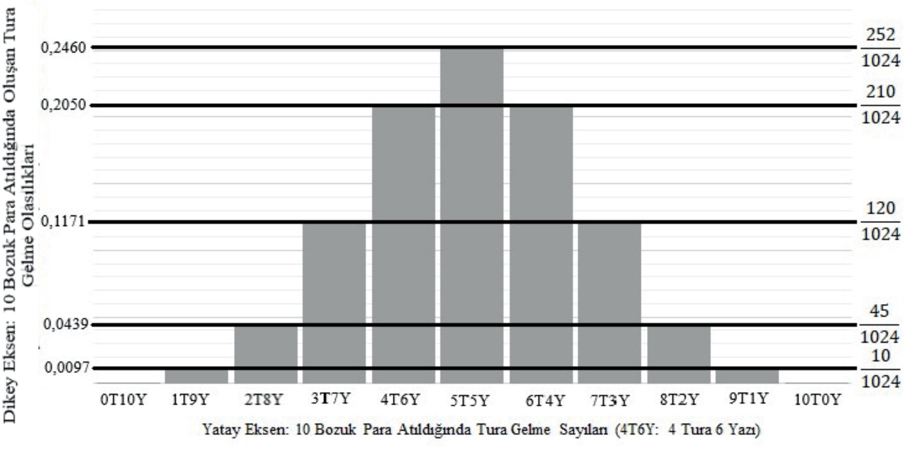
Bernoulli formülü ile bu iki eşitsizlik düzenlendiğinde

$$k_0 \geq np-(1-p) \text{ ve } k_0 - 1 \leq np-(1-p)$$

eşitsizlikleri meydana gelir. Bu son eşitsizlikler tek eşitsizlikte birleştirilirse aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:[14]

$$\mathrm{np}-(1-\mathrm{p}) \leq \mathrm{k}_0 \leq \mathrm{np}+\mathrm{p}$$

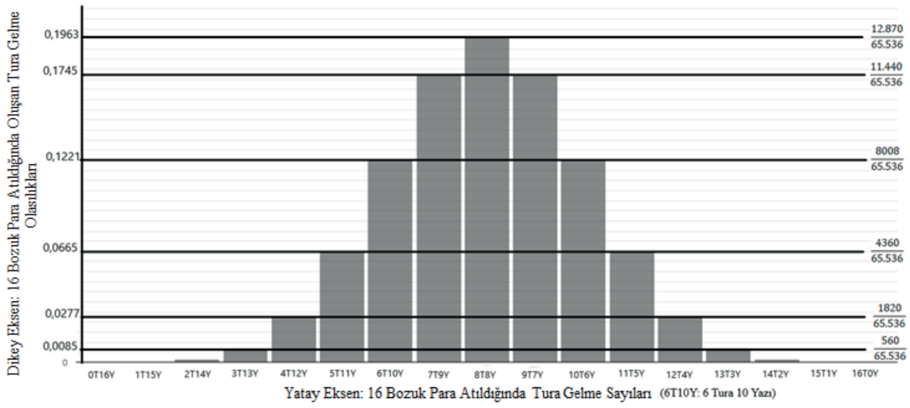
En olası değer ile ilgili anlatılanları şekil ile destekleyerek farklı bir yönden tekrar inceleyelim: Bernoulli formülüne uygun olarak bozuk para atışlarını ele alalım. 10 bozuk para atıldığında 1024 farklı durum ortaya çıkar. Aşağıdaki grafikte 1024 durumun dağılımı görülmektedir.



Şekil 1. On Bozuk Para Atıldığında Tura Gelme Sayıları ve Tura Gelme Oranları

Şekil 1'den anlaşılacağı gibi on bozuk para atıldığında 2T8Y gelme olasılığı $\frac{45}{1024}$'tür. Benzer şekilde 5T5Y gelme durumlarının olasılığı $\frac{252}{1024} \cong$ %25'tir. On bozuk para atıldığında en olası durum 5T5Y olacaktır. Eğer on altı bozuk para atılmış olsaydı en olası durum 8T8Y olurdu. Bu durumların olasılığı ise yaklaşık %20 olurdu. (Şekil 2)

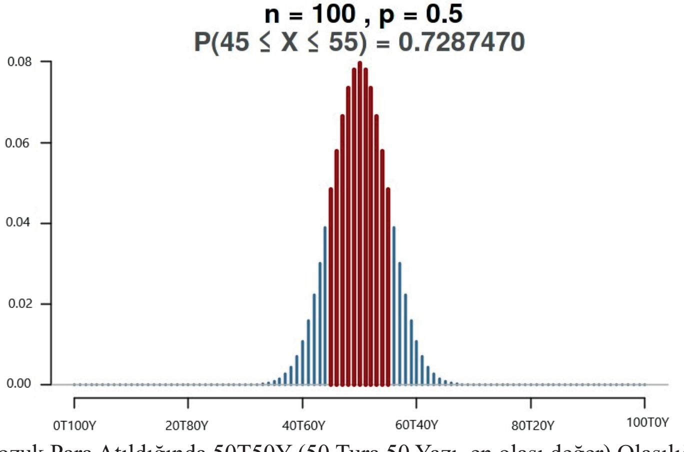
14 Burada k_0'ın 1 birimlik bir aralıkta bulunduğuna dikkat ediniz. Bu eşitsizlikteki bütün taraflar deney sayısı n ile bölünürse, eşitsizliğin orta kısmında oluşan değer en olası oran olacaktır. $p - \frac{(1-p)}{n} \leq \frac{k_0}{n} \leq p + \frac{p}{n}$
Bu eşitsizlikte $n \to \infty$ olursa $\frac{k_0}{n} \to p$ ve $np \to k_0$ olacağı açıktır.



Şekil 2. On Altı Bozuk Para Atıldığında Tura Gelme Sayıları ve Tura Gelme Oranları

Yukarıdaki iki grafik arasındaki geçişte deney sayısı 10'dan 16'ya artırılmıştır. Bu artış sonucunda 0T, 1T, 2T gelme olasılıkları ihmal edilebilir seviyelere gerilemiştir. Bunun yanında en olası durumun olasılığı da %25'ten %20'ye düşmüştür.

Bu azalmayı daha iyi görmek için 100 ve 500 bozuk para atılması deneylerini sırası ile ele alalım. Eğer 100 adet bozuk para atılmış olsaydı, 50T 50Y olasılığı $\frac{100!}{50!\cdot 50!} \div 2^{100} \cong 0{,}0796$ ile yaklaşık %8 olurdu. Aynı şekilde 500 bozuk para için bir hesaplama yapıldığında, 250T 250Y olasılığının $\frac{500!}{250!\cdot 250!} \div 2^{500} \cong 0{,}0357$ ile yaklaşık %3,6 değerine düştüğü görülürdü. En olası değerin azalışına rağmen, bu değerin yakın komşuluğunu temsil eden küçük bir aralık ele alındığında, deney sayısı arttıkça bu aralıklardaki toplam olasılığın sürekli arttığı fark edilir.

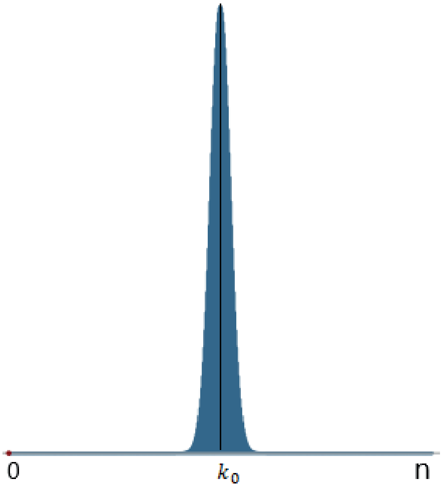


Şekil 3. 100 Bozuk Para Atıldığında 50T50Y (50 Tura 50 Yazı, en olası değer) Olasılığının Sağında ve Solunda Belirlenen 5'er Birimlik Aralıklar İçin Oluşan Olasılıklar Toplamı[15]

15 Grafiğin çizimi çevrimiçi olarak şu web sitesinde yapılmıştır: https://shiny.rit.albany.edu/stat/binomial/ (erişim tarihi: 05.08.2023)

Örneğin 100 bozuk paranın atıldığı bir deneyde en olası değerin sağından ve solundan %5 lik sapma ile belirlenen bir aralığın toplam olasılığı yaklaşık olarak %73 olurken (Bkz. Şekil 3), 500 bozuk para için %5 lik sapma ile belirlenen aralığın toplam olasılığı yaklaşık olarak %98 hesaplanır. Buradan da görüleceği üzere en olası değer etrafında belirlenen küçük bir aralığın toplam olasılığı, deney sayısı arttıkça 1'e doğru yaklaşır.

Deney sayısı arttığında, en olası durumun olasılığı giderek azalsa da diğer olasılıklar daha hızlı azaldığından, çok fazla deney sonucunda elde edilen herhangi bir grafik aşağıdaki gibi gözükecektir. Grafikten de görüleceği gibi, deneylerden elde edilen en büyük olasılık değerleri en olası değer etrafında yoğunlaşmaktadır.



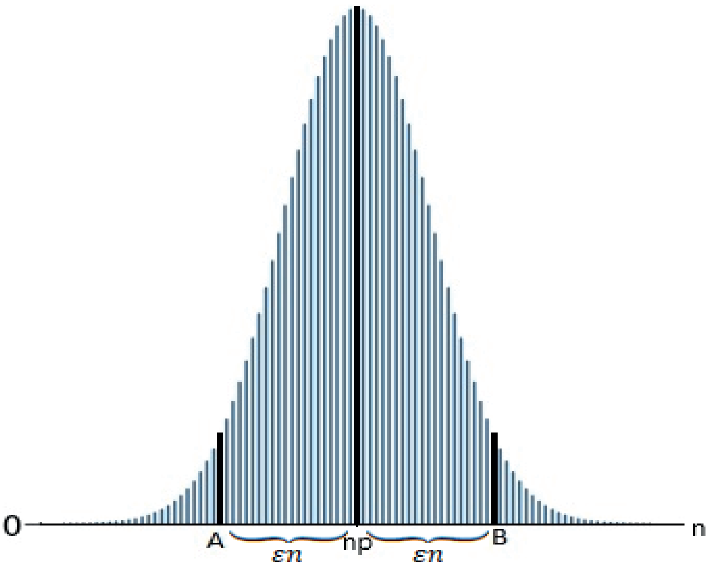
Şekil 4. Deney Sayısı Çok Fazla Olduğunda En Olası Değer ve Diğer Olasılıklar

Bernoulli Teoremi: *n* büyük bir sayı olmak üzere, *n* kez yapılan deneylerde bir A olayının meydana gelme sayısının (*k*'nın), en olası değerine çok yakın olacağını ve arada oluşan farkın deney toplam sayısı *n*'nin çok küçük bir oranında kalacağını kesine yakın bir olasılıkla önceden söyleyebiliriz.[16]

Bir A olayının olma olasılığı *p* olmak üzere ve n büyük bir sayı iken, *n* sayıda deneyde A'nın en olası değeri $\frac{k_0}{n}$ nin *p* değerine çok yakın olacağını sezgisel yol ile göstermiştik. Şekil 2'yi tekrar incelersek, yatay eksende seçilen eşit uzunlukta iki aralık, 5T11Y-7T9Y ve 8T8T-10T6Y aralıkları olsun. Bu aralıklara ait düşey doğru parçalarının toplam uzunluğu

16 B. W. Gnedenko ve A. J. Chintschin, *İhtimaller Hesabına Giriş*, çev. Lütfi Biran (İstanbul: Türk Matematik Derneği Yayınları, 1963), 65–66. Teorem şu şekilde de sunulabilir: Deney sayısının yeterince büyük olduğu, sabit olasılığı *p* olan bir dizi deney düşünelim. Bu deneylerde bir A olayının görülme oranı *p*'den farklı olacaktır. Bu farkın herhangi bir $\varepsilon>0$ sayısından daha küçük olması 1'e yakın bir olasılık kesinliğine sahiptir. James Victor Uspensky, *Introduction to Mathematical Probability* (New York and London: McGraw-Hill Book Company, 1937), 96.

hesaplandığında sırası ile $\frac{14.196}{65.536}$ ve $\frac{35.750}{65.536}$ değerleri bulunur. Bu iki sayı karşılaştırılırsa, içinde en olası değer ($k_0 = 8T8Y$) bulunan aralığın eş büyüklükteki diğer aralığa göre daha büyük değer aldığı görülür. Eşit büyüklükteki aralıklardan k_0'ı merkezine alan aralıklar, deney sayısı daha fazla artırıldığında, her seferinde diğerlerine oranla çok daha büyük kalacaktır. Seçilen aralık deney sayısı n'ye göre çok dar olmasına rağmen, bu küçük doğru parçasına çıkılan dikmelerin toplamı hayli büyüktür. Aşağıdaki grafikte Şekil 3'e benzer olarak merkezdeki en olası değerin (np'nin) sağında ve solunda *εn* uzunluğunda ve *n* ile karşılaştırıldığında çok küçük bir doğru parçası, [AB] seçilmiştir.



Şekil 5. En Olası Değerden *εn* Kadar Sapmayı Gösteren Grafik

AB doğru parçasının dışında kalan sağ ve sol taraflardaki aralıklardan çizilen düşey doğru parçaları ile elde edilen olasılıkların toplamı aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$P[|k - np| > \varepsilon n]$$

Şekil 5'teki düşey doğruların tamamının uzunlukları toplamı 1'dir. AB doğru parçasına ait olan kısımdaki düşey doğru parçalarının toplamının ise hemen hemen 1'e eşit olduğu yukarıdaki şekillerden sezgi yolu ile anlaşılabilir. Buna göre diğer kısımların toplamı çok küçük bir değer alacaktır. Bu değer matematiksel olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$P[|k - np| > \varepsilon n] = \sum_{|k-np|>\varepsilon n} P_n(k)$$

Sayılar teorisi, mekanik ve olasılık teorisinde öncü çalışmaları bulunan Pafnuty L. Chebyshev (1821-1894), bu eşitliği düzenleyerek aşağıdaki eşitsizliğin doğru olduğunu kanıtlamıştır.[17]

17 Gnedenko ve Chintschin, *İhtimaller Hesabına Giriş*, 67–71.

$$P[|k-np|>\varepsilon n]<\frac{np(1-p)}{\varepsilon^2 n^2}=\frac{p(1-p)}{\varepsilon^2 n}$$

Bu eşitsizlikte ε belirlendikten sonra paydada yer alan n giderek artırıldığında $\frac{p(1-p)}{\varepsilon^2 n}$ kesri de giderek küçülecektir.[18] Eşitsizliğe göre $\frac{p(1-p)}{\varepsilon^2 n}$ kesri çok küçük değer aldığında, $P[|k-np|>\varepsilon n]$ ifadesi daha küçük değerler alır ve giderek 0'a yaklaşır. Buradan Bernoulli'nin belirttiği, deney sonuçlarının hemen hepsinin en olası değer etrafında ve çok küçük bir aralıkta kümeleneceği sonucu elde edilmiş olur.[19]

Türkiye'de Olasılık Biliminin İlk Adımları

Salih Zeki, École Supérieure de Télégraphie'de (Paris) aldığı elektrik-telgraf mühendisliği eğitiminden sonra 1887'de Türkiye'ye dönmüştür. Okuduğu okulun programında olasılık dersi olduğuna dair bir veri yoktur.[20] Arkadaşı Ahmed Fahri'nin belirttiğine göre o zamanlar bilime ilgisi yüksektir. Çalıştığı konulara uygun önemli eserleri takip etmektedir. Paris'te eğitimi devam ederken, College de France'da ve bir mühendislik okulu olan École des Ponts et Chaussées'de bazı derslere dinleyici olarak katılmıştır. Olasılık ile bu okulların programlarında karşılaşmış olması muhtemeldir.[21]

Günümüz üniversitelerinin matematik bölümlerinin ve mühendislik fakültelerinin ana derslerinden biri olan olasılık hesabının Türkiye'deki ilk işaretleri, askeri mühendislik okulu olan Mühendishâne-i Berrî-i Humâyûn'un resmi ders programında görülmüş ve okulun seçkin öğrencilerinin[22] yer aldığı sınıflarda olasılık konuları işlenmiştir.[23] Müstakil bir ders olmadığını düşündüğümüz olasılığın, 1888 yılı ders programında, mekanik dersi adı altında işlendiği görülmektedir. Ders içeriklerinin verildiği listede, mekanik dersine ait yalnızca olasılık konularının işleneceği anlaşılmaktadır. Tek başlık "Matematiğin önemli konuları"

18 $n\to\infty$ olduğunda $P[|k-np|>\varepsilon n]=0$ olacaktır. Yani sonsuz deney sonucunda elde edilen k olasılığı en olası değere eşit olur. Aynı zamanda buradan $P[|k-np|<\varepsilon n]=1$ olduğu da söylenebilir.

19 Bernoulli'nin orijinal eserinin İngilizce çevirisinde yer alan teoremin metni şu şekildedir: Olması istenen olaylardan birinin ortaya çıktığı deneyleri başarılı olarak (r), olması istenmeyen olaylardan birinin meydana geldiği deneyleri başarısız olarak (s) adlandıralım. Başarılı olayların başarısız olaylara oranı $\frac{r}{s}$ oranına sahip olsun. Başarılı olayların tüm olayların sayısına oranı $\frac{r}{r+s}$ veya $\frac{r}{t}$ ise bu oran $\frac{r+1}{t}$ ve $\frac{r-1}{t}$ limitleri ile sınırlıdır ($r+s=t$). Çok fazla deney sonucunda (mesela c kez), başarılı olayların gözlenme sayısının bu sınırlar arasında kalması, bunların dışında kalmasından daha olası hale gelir. Yani başarılı deneylerin sayısının tüm deneylerin sayısına oranı ne $\frac{r+1}{t}$ den büyük ne de $\frac{r-1}{t}$ den küçük olmayacaktır. $\frac{r-1}{t}\leq\frac{r}{t}\leq\frac{r+1}{t}$
Bernoulli, *The Art of Conjecturing, together with Letter to a Friend on Sets in Court Tennis*, 337.

20 Andrew J. Butrica, "The Ecole supérieure de Télégraphie and the Beginnings of French Electrical Engineering Education", *IEEE (Institute of Electrical and Electronics Engineers) Transaction On Education* 30, sayı 3 (1987): 121–29.

21 Ahmed Fahri, "Salih Zeki Bey", *Muallimler Mecmuası*, sayı 21 (1924): 589–93.

22 1888 yılında Mühendishane'de ilk defa seçkin öğrencilere yönelik sınıflar açılır. Dört senelik eğitimin sonunda üstün başarı gösterenler bu aşamada beşinci sınıfa devam ederler. Ağırlıklı olarak uygulamalı dersler görürler. Beşinci sınıfı bitirenler yüzbaşı olarak mezun olurlar. Sadık Erdem, *Mir'ât-ı Mühendis-hâne-i Berrî-i Humâyûn* (İstanbul, 1986), 107–8.

23 Salih Zeki, "Mebâhis-i Fenniyye 1: Takdîr-i İhtimâlât", *Sabah* 9, sayı 2807 (1313): 4.

ibaresinin yanında “Hisâb-ı İhtimâlînin Başlıca Davâları” olarak verilmiştir.[24] Aynı yıla ait bir arşiv belgesinde olasılık bahsi bu defa yüksek matematik dersinin dört konusundan biridir. Bu son belgede ilgili sınıfa ait mekanik dersinin adı geçmemektedir.[25] Bahsi geçen belgelerde ders adı ile birlikte hocaların adları yer almadığından, olasılık dersini okutan kişinin kim olduğu anlaşılmamaktadır. Ancak o tarihlerde Salih Zeki Fransa’dan dönmüş olduğundan, ilgili dersler muhtemelen onun tarafından verilmiştir. Salih Zeki’nin Mühendishâne-i Berrî-i Humâyûn’da görevli olduğunu gösteren, doğrudan adının geçtiği 1892 yılına ait bir belgeye göre, ilgili okulda hikmet-i riyâziyye (matematiksel fizik) dersini verdiği görülmektedir.[26] Yukarıda bahsedildiği gibi mekanik veya yüksek matematik dersinin içinde yer alması öngörülen olasılık konuları daha sonra hikmet-i riyâziyye dersinin bir parçasına dönüşmüş olabilir.

Olasılığın 1888 yılı ders programında yer almasından yaklaşık 10 yıl sonra olasılık konusunda müstakil bir ders kitapçığı ortaya çıkmıştır. Türkiye’de alanında ilk olma özelliğine sahip olan *Hulâsa-i Hesâb-ı İhtimâlî* adlı kitap iki bölüm, elli sekiz sayfalık hacmi ile adından anlaşılacağı gibi özet olarak yazılmış küçük bir risale olarak değerlendirilebilir. Kırk sayfalık ilk bölümün tamamında herkesçe bilinen; yazı-tura, tavla zarları, torbadan top çekme gibi oyunlar ile ilgili örnekler verilerek temel olasılık kavramları sunulur. On sekiz sayfalık ikinci bölüm Deneysel Olasılık (İhtimal-i Tecrübî) başlığına sahiptir.

Salih Zeki uzun yıllar boyunca olasılık dersleri verdikten sonra bir başka eserini, *Hesâb-ı İhtimâlât*’ı 1912 yılında yayınlamıştır.[27] 322 sayfalık bu eserde yer alan konular farklı kaynaklardan derlenmiş, incelenmiş ve çözülen problemler çeşitli yönlerden ele alınmıştır. Eserin önsözünden anlaşıldığı kadarıyla, bu eser Avrupa’da iyi matematikçiler tarafından yayınlanmış olasılık kitaplarını okuyup anlamak isteyen Darülfünun öğrencilerine yönelik yazılmıştır.[28]

Salih Zeki’nin Bernoulli Teoremine Dair Örnekleri

Hulâsa-i Hesâb-ı İhtimâlî’nin ilk bölümü genel olarak şu şekilde özetlenebilir: Girişte, insan bilgisinin kaynağı sorgulanırken olasılığa dayalı bilgi, tam bilgisizlik ile kesin bilgi arasında bir yerde görülür. Burada teorik-deneysel olasılık kavramları tartışılırken evrende

24 Erdem, *Mir’ât-ı Mühendis-hâne-i Berrî-i Humâyûn*, 117–18.

25 Diğer üç konu şu şekildedir: türev ve integral, diferansiyel denklemler ve en küçük kareler yöntemi, yüksek makine. Başbakanlık Osmanlı Arşivi (BOA), Askeri Maruzat (Y..PRK. ASK.) 48/37, 21 Temmuz 1304 (2 Ağustos 1888).

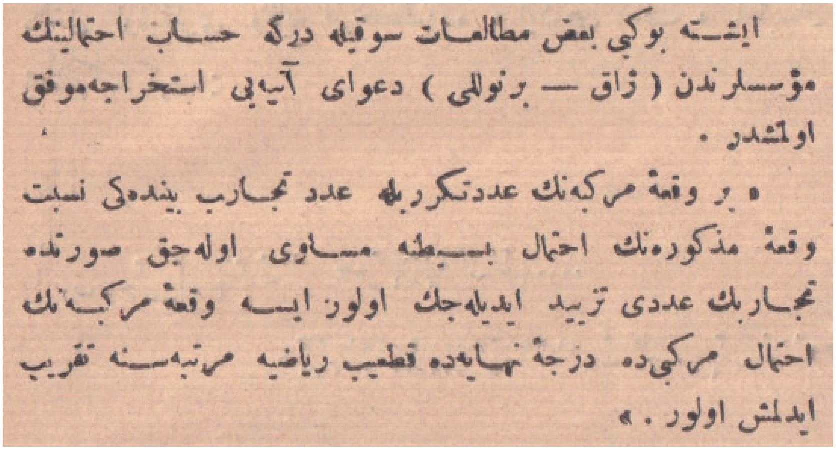
26 Başbakanlık Osmanlı Arşivi (BOA), İrade Taltifat (İ..TAL) 4/37, 6 Temmuz 1308 (18 Temmuz 1892).

27 Bu iki kitabının yanında birkaç makalesi de mevcuttur. İlgili literatüre şu makaleden ulaşılabilir: Alper Atasoy, “Salih Zeki’nin Makaleleri: Bir Bibliyografya Denemesi”, *Osmanlı Bilimi Araştırmaları / Studies in Ottoman Science* 23, sayı 2 (05 Temmuz 2022): 335–94, https://doi.org/10.26650/oba.1002567.

28 Salih Zeki, *Hesâb-ı İhtimâlât*, 3.

tesadüfe yer olmadığı öne sürülür.[29] Daha sonra, matematiksel kesinliğin sayısal ifadesinin 1 olduğu belirtilir devamında olasılığın klasik tanımı verilir: Olasılık, bir olayın istenen durumlarının sayısı ile mümkün durumlarının tamamının sayısı arasındaki orandır.[30] Ardından eser boyunca kullanılan bileşik olasılık kavramı, bir veya birkaç basit olasılığın çarpımı şeklinde açıklanır. Son olarak bir olayın olma ve olmama olasılıkları toplamının 1 olduğu ifade edilir. Bu temel kavramların daha iyi anlaşılabilmesi için ara yerlerde örnek problemlere de yer verilmiştir.[31] İlk bölüm boyunca yirmi civarında örnek üzerinde durulmuş, bunların birçoğu verilen bir konu veya kavramın içinde başlıksız yer almıştır.

İncelediğimiz bölümde 'deney sayısının artırılması' ibaresi bir gölge gibi okuyucuyu izlemektedir. Salih Zeki birinci bölümün son sayfası olan 40. sayfada, deney sayısının artırılması vurgusunu Jacques Bernoulli adına bağlamış ve Bernoulli Teoreminin metnine sözel olarak şöyle yer vermiştir:


ایشته بوکبی بعض مطالعات سوقیله درکه حساب احتمالیتك
مؤسسلرندن (ژاق — برنوللی) دعوای آتیه‌یی استخراجه موفق
اولمشدر .
« بر وقعهٔ مرکبه‌نك عدد تکرریله عدد تجارب بیننده‌کی نسبت
وقعهٔ مذکوره‌نك احتمال بسیطنه مساوی اوله‌جق صورتده
تجاربك عددی تزیید ایدیله‌جك اولور ایسه وقعهٔ مرکبه‌نك
احتمال مرکبی‌ده درجهٔ نهایه‌ده قطعیت ریاضیه مرتبه‌سنه تقریب
ایدلمش اولور . »

Şekil 6. Salih Zeki'ye göre Bernoulli Teoremi[32]

> "İşte bu gibi bazı mütâla'at sevkiyledir ki hesâb-ı ihtimâliyyenin mü'essislerinden Jacques Bernoulli da'vâ-yı âtîyeyi istihrâca mûvaffak olmuştur.
> Bir vak'a-i mürekkebenin 'aded-i tekrârıyla 'aded-i tecârib beynindeki nisbet vak'a-i mezkûrenin ihtimâl-i basîtine müsâvî olacak sûrette tecâribin 'adedi tezyîd edilecek olur ise vak'a-i mürekkebenin ihtimâl-i mürekkebi de derece-i nihâyede kat'iyet-i riyâziye mertebesine takrîb edilmiş olur."[33]

29 Salih Zeki, *Hulâsa-i Hesâb-ı İhtimâlî*, 2–6.
30 Salih Zeki, 7–9.
31 Salih Zeki, 11–20.
32 Salih Zeki, 40.
33 Vak'a-i mürekkebe = bir anda ya da birbiri ardınca meydana gelen olaylar topluluğu, bileşik olay; Vak'a-i basite = bir bileşik olayı meydana getiren her bir tekil olay, Aded-i tekrâr = bir deneyde istenen sonucun tekrar sayısı; Aded-i tecârib = deneyler sayısı, İhtimâl-i basit = bir olayın tek başına olması olasılığı, bir olayın teorik olasılığı, İhtimâl-i mürekkeb = birkaç olayın aynı anda veya birbiri ardınca meydana gelme olasılığı, bileşik olasılık.

Metin günümüz kelime ve terimleri ile şu şekilde yazılabilir: Bir olaya ait deney sayısı olayın basit olasılığına eşit olacak kadar artırılırsa, bu olayın olasılık değeri en nihayetinde matematiksel kesinlik seviyesine yaklaştırılmış olur.

Öncelikle Salih Zeki'nin anlatımı gerek Bernoulli'nin orijinal ifadesinden gerekse yararlandığı veya haberdar olduğu on dokuzuncu yüzyıl olasılık kitaplarında yer alan ifadelerden daha az ayrıntılıdır. Bu metinlerde olay, olasılık, deney sayısı cebirsel olarak ifade edilmiş ve bunlar arasındaki oranlar ve oranlar arası ilişkiler formüllerle belirtilmiş ise de Salih Zeki'nin tanımında bu sistematik yaklaşım görülmez.[34]

Diğer taraftan, Salih Zeki, "bir olaya ait deney sayısı olayın basit olasılığına eşit olacak kadar artırılırsa" ifadesini "deney sayısı biteviye artırılırsa" anlamına gelecek şekilde kullanırken, deney sonuçlarından başarılı olanların oranının bir p değerine yaklaşması gerektiğini vurgulamaz.

Bu aşamada Salih Zeki'nin verdiği teorem metni ve birazdan sunulacak olan yine onun verdiği çözümlü örnekler arasında bir uyum olduğunu belirtelim.

Hulâsa-i Hesâb-ı İhtimâlî'nin on beşinci sayfasından itibaren çözülen problemler incelendiğinde, beş problemin doğrudan bölümün sonunda yer alan Bernoulli Teoremine atıfta bulunduğu görülmektedir. 'Deney sayısının artırılması' ibaresi Bernoulli Teoreminin iki temel kavramından biridir ve ilgili problemlerde yer almaktadır.[35] Örneğin; 'deney sayısı arttıkça kazanma olasılığı da sürekli artar' cümlesi,[36] yine birkaç paragraf sonra 'deney sayısını artırarak bu olasılık istenilen seviyeye yükseltilebilir' ve takip eden sayfada 'bununla

34 On dokuzuncu yüzyıl matematik kitaplarında yer alan Bernoulli Teoreminin ifadelerine örnek olarak bkz. Joseph Bertrand, *Calcul des Probabilités* (Paris: Gauthier-Villars, 1889), 84; Jean Baptiste Joseph Liagre, *Calcul des Probabilités et Théorie des Erreurs* (Bruxelles, 1879), 85; Sylvestre François Lacroix, *Traite Élémentaire du Calcul de Probabilité* (Paris: Mallet-Bachelier, Imprimeur-Libraire, 1864), 49. Salih Zeki'nin bu üç eserden başka, olasılık konusunda önemli eserler olarak ismini andığı kitaplar şunlardır: Pierre Rémond de Montmort, *Essay d'analyse sur les jeux de hazard* (Paris: Chez J. Quillau, 1708), Jacobi Bernoulli, *Ars Conjectandi* (Basileae: Impensis Thurnisiorum, Fratrum, 1713), Abraham de Moivre, *The Doctrine of Chances* (London: Printed by W. Pearson, for the author, 1718), Antoine Deparcieux, *Essai sur les probabilités de la durée de la vie humaine* (Paris: Editions d'histoire sociale, 1746), Marie Jean Antoine Nicolas Caritat de Condorcet, *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix* (Paris: De l'Imprimerie royale, 1785), Emmanuel Etienne Du villard De Durand, *Recherches sur les rentes, les emprunts et les remboursements* (Paris: L'auteur, 1787), Pierre Simon Laplace, *Théorie analytique des probabilités* (Paris: M. V. Courcier, 1812), Pierre Simon Laplace, *Essai philosophique sur les probabilités* (Paris: M. V. Courcier, 1814), Adolphe Quetelet, *Lettres sur la théorie des probabilités, appliquée aux sciences morales et politiques* (Bruxelles: Hayez, 1846), Isaac Todhunter, *History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Laplace* (Cambridge and London: Macmillan and Company, 1865). Salih Zeki, *Kāmûs-ı Riyâziyyât*, c. 1 (İstanbul: Karabet Matbaʿası, 1315), 203.

35 Salih Zeki'ye göre "deney sayısını artırma yasası" ibaresi aynı zamanda büyük sayılar yasasını temsil etmektedir. Teksîr-i Tecârib Kānunu = Deney Sayısını Artırma Yasası = La loi de grands nombres = Büyük Sayılar Yasası (Salih Zeki, *Kāmûs-ı Riyâziyyât*, 1:195.)

36 Burada deneyden kasıt, örneğin bir zarın art arda atılması, kutudan bir sayı veya topun çekilmesidir.

beraber deney sayısını fazlalaştırarak beyaz top çekme olasılığı istenildiği seviye olan 1'e yani matematiksel kesinliğe yaklaştırılmış olur' cümleleri aynı amaca hizmet etmektedir.[37] Burada Salih Zeki'nin incelediği problemlerden özellikle bu ibareleri içeren üçünü ele alacağız. Bu örneklerden ilki bir zar problemidir:

Örnek 1 Bir tavla zarı atıldığında 6 gelme olasılığı $\frac{1}{6}$ dır. Tavla zarı iki kez atıldığında en az birinin 6 gelme olasılığının hesabı için; bir zarın 6 gelmeme olasılığı $\frac{5}{6}$ dikkate alınır. Eğer problem tersinden düşünülerek iki atışta da 6 gelmeme olasılığı araştırılsaydı istenen olasılığın $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$ olması gerekirdi. Bunun tersi durumdaki olasılık yani iki atışta en az birinin 6 gelme olasılığı da $1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$ olurdu. Benzer şekilde bir zar üç kez atılırsa en az birinin 6 gelme olasılığı $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{91}{216}$, dört kez atıldığında en az bir kez 6 gelme olasılığı $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{671}{1296}$, beş atış için en az bir kez 6 gelme olasılığı $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{4651}{7776}$ olacaktır ve bu şekilde devam edilerek diğer durumlar da hesaplanabilir. Ortaya çıkan olasılıklar deney sayısının artırıldığı her durum için giderek büyümektedir ve 1 sayısına yaklaşmaktadır. Buradan, deney sayısı uygun bir şekilde artırılırsa, en az bir kez 6 gelme olasılığının matematiksel kesinliğe yaklaştığı anlaşılır.[38]

Salih Zeki'nin elde ettiği bu sonuca göre, bir zarın 6 gelmesini garanti eden bir yöntemi elde etmek asıl hedef olarak görülmektedir. Olasılığı sıfır olmayan bir olay çok fazla tekrar edilirse, bu olayın olma olasılığı matematiksel kesinliğe yaklaşır. Ancak Bernoulli Teoreminde yer alan, p olasılığı ve en olası değer terimleri, Salih Zeki tarafından kullanılmamıştır. Burada 'p değeri' ve 'deney sayısının artırılması' ibarelerinin birlikte yer aldığı cümle şu şekilde olabilirdi; "Bir zarın atıldığı bir deneyde, zarın atılma sayısı yani deney sayısı artırıldıkça, 6 gelen zarların sayısının tüm deneyler sayısına oranı matematiksel kesinlik derecesinde $\frac{1}{6}$ kesrine yaklaşır."

Örnek 2 Bir olayın olma olasılığı ne kadar az olur ise olsun deney sayısı artırılarak bu olasılık istenildiği kadar büyütülebilir. Örneğin 40 tane siyah ve bir tane beyaz top bulunan kutudan beyaz top çekme olasılığı $\frac{1}{41}$ iken 100 kez çekilen top geri koyulmak şartı ile art arda çekiliş yapıldığında bu olasılık matematiksel kesinlik derecesine yaklaştırılabilir.

Gerçekten de bir defada beyaz çekme olasılığı $\frac{1}{41}$ ve çekmeme olasılığı $\frac{40}{41}$ olduğundan 100 kez çekiliş yapıldığında beyaz olmama olasılığı $\left(\frac{40}{41}\right)^{100}$ olacağından, beyaz olma olasılığı da $1 - \left(\frac{40}{41}\right)^{100} = 0{,}91526$ olur.[39]

Ancak Bernoulli Teoremine göre, deney sayısı artırıldıkça çekilen beyaz top sayısının tüm durumlara oranının $\frac{1}{41}$ kesrine yaklaşması ifade edilmesi gerekirken, önceki örnekte olduğuna benzer şekilde burada da beyaz top çekme olasılığının garanti edildiği görülmektedir.

37 Salih Zeki, *Hulâsa-i Hesâb-ı İhtimâlî*, 16,18,19.
38 Salih Zeki, 15–18. Bu durum matematiksel olarak şu şekilde ifade edilebilir: $\lim_{x\to\infty}\left[1 - \left(\frac{5}{6}\right)^x\right] = 1$
39 Salih Zeki, 18–19.

Salih Zeki, daha önce ele aldığımız en olası değer kavramını da uzunca incelemiştir. Deney sayısının artması ile oluşacak sonucu daha iyi açıklamak için Binom formülü ile ilgili örnekler vermiş, ayrıntılara geniş yer ayırmıştır.[40] En olası değerin hesabını yaparken ilgili binom açılımını kullanmıştır.[41] Örneğin, aşağıdaki açılımdan yararlanarak bir bozuk paranın dört kez atılması sonucunda meydana gelecek olaylar arasında en olası olanı bulmuştur:

$$(a+b)^4 = b^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

En olası olay, $6a^2b^2$ terimi ile belirlenir. Terimin katsayısı ile açılımın katsayıları toplamı arasındaki oran istenen olasılığı vermektedir. Dört bozuk para için en olası değerin olasılığı $\frac{6}{16}$ iken 6 bozuk para için $\frac{20}{64}$, sekiz bozuk para için $\frac{70}{256}$ olmaktadır. Bu oranlar karşılaştırıldığında deney sayısı arttıkça oranların küçüldüğü görülmektedir. En olası değerin deney sayısı arttıkça küçülmesine yönelik örneklere yukarıda değinilmişti. Salih Zeki, bu ifadeleri daha sonra başka bir konuya bağlamamış ve aşağıdaki örneğe geçmiştir.

Örnek 3 a ve b toplarının dörderli çekilişlerinde oluşan aşağıdaki on altı durumu ele alalım:

$$aaaa\ aaab\ aaba\ abaa\ baaa\ aabb\ abab\ baab\ baba\ abba\ bbaa\ bbab\ abbb\ babb\ bbba\ bbbb$$

a ve b toplarının dörderli sıralamaları, karma veya tek tip olmasına göre iki sınıf kabul edilecek olursa bu iki sınıf olayın olasılıkları sırasıyla $\frac{14}{16}$, $\frac{2}{16}$ olacaktır. Bu şekilde birinci sınıf olayın ikincisine göre oranı $\frac{14}{16} : \frac{2}{16} = \frac{14}{2} = 7$ olacağından bu iki sınıf olaydan birincisinin olması diğerine oranla yedi defa fazla olasıdır. Buna göre, karma tipteki olayların tüm olaylara oranı $\frac{14}{16}$ olur. Deney sayısı artırıldığında bu oran da artar. Gerçekten deney sayısı beş olduğu zaman $\frac{30}{32}$ oranı, altı deney yapıldığında $\frac{62}{64}$ oranı elde edilir. Özetle birinci sınıf olayların olasılığı ikinci sınıf olayların olasılığına göre sürekli artacağından, deney sayısını mümkün olduğu kadar artırarak birinci sınıf olayların olasılığını matematiksel kesinlik seviyesine yaklaştırmak mümkün olur.[42] Bu örnek genel olarak binom açılımının katsayılarına göre açıklanabilir. Binom açılımında birinci ve sonuncu terimlerin katsayıları toplamı ikinci sınıf olayların meydana gelme sayısını gösterirken, diğer terimlerin katsayıları toplamı da birinci sınıf olayların meydana gelme sayısını gösterir.[43]

$$\begin{aligned}(a+b)^m = a^m + \frac{m}{1}a^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^{m-2}b^2 + \cdots \\ + \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}a^{m-n}b^n + \cdots + \frac{m}{1}ab^{m-1} + b^m\end{aligned}$$

40 Salih Zeki, Binom açılımında bulunan katsayıların olasılık hesabında kullanımına yaklaşık on iki sayfa ayırmıştır. Bu kısmın girişinde ‘deney sayısının artırılması sonucunda beklentinin artması’ ibaresini iyice açıklamayı hedeflediğini belirtmiştir. Salih Zeki, 22–33.

41 Salih Zeki, 29–32. Bu sonuç şu şekilde de gösterilebilir: $\lim_{x\to\infty}\left[1-\left(\frac{40}{41}\right)^x\right] = 1$

42 Salih Zeki, 35–38.

43 Açılımdaki a^m terimi $m$defa $a$olayının birbiri ardı sıra olmasını ve $ma^{m-1}b$ ikinci terimi $m$defada (m-1) kere a ve bir kere b olayının olma sayısını gösterir. Burada a^m ve b^m terimleri ikinci sınıf olayları temsil etmektedir.

Bu durumda deney sayısı ne kadar artırılır ise artırılsın, diğer bir deyişle $(a+b)^m$ nin üssü ne derece büyük olursa olsun, açılımdaki ikinci sınıf olaylara ait katsayılar aynı kalır. Dolayısıyla deney sayısını artırarak birinci sınıf olayların olasılığı istenildiği şekilde matematiksel kesinlik derecesine yaklaştırılabilir.[44]

Önceki örneklerde olduğu gibi burada da deney sayısı artırıldıkça karma sınıftan olayların olasılığı kesinlik seviyesinde garanti edilmiştir. m değeri artıkça karma tipte olayların da sayısı giderek büyümekte ve sonsuza doğru artmaktadır. Burada sonsuz iki çokluğun oranı ve limit hesabı ile istenen olasılığın bulunduğu söylenebilir. Bu son örnekte, deney sayısının artırılması ibaresi dışında Bernoulli Teoremi ile doğrudan bir ilgi kurulmadığı görülmektedir.

İncelediğimiz üç örneğin hedeflediği sonuç ile Salih Zeki'nin yazdığı Bernoulli Teoremi ifadesi arasında bir uyum olduğu söylenebilir. Ancak dönemin farklı yabancı kaynaklarından derlediğimiz ve araştırmamızda sunduğumuz Bernoulli Teoremi ile burada kullanılan teorem arasında bir uyuşmazlık olduğu aşikardır. Burada, Salih Zeki Bernoulli Teoremini olması gerekenden daha dar anlamda kullandığından ötürü, günümüzde kavram yanılgılarının bir türü olarak bilinen[45] kısıtlı algılama söz konusudur. Ancak bu şekildeki meydana gelen algılamanın sonucu da bilinen bir kurala denk gelmiş olup bu kuralın günümüzdeki karşılığı Littlewood yasasıdır. Yasa şu şekildedir:

Littlewood Yasası: Bir olasılık deneyinde çok küçük bir olasılık değerine sahip bir olayın olma olasılığı, deney sayısı çok büyük olduğunda hemen hemen kesindir. Olayın başarılı olma olasılığı p ve başarısız olma olasılığı $1-p$ olsun. Bu durumda n deney sonucunda tüm sonuçların başarısız olma olasılığı

$$(1-p)\cdot(1-p)\cdot\ldots\cdot(1-p)=(1-p)^n$$

olur. Buradan n deneyde en az bir kez başarılı sonuç oluşma olasılığı tümleme özelliği ile hesaplanırsa

$$1-(1-p)^n$$

sonucu elde edilir. Yasada p çok küçük, n ise çok büyük değerler aldığında ilgili olayın istenen olasılığının hemen hemen kesinlik seviyesinde yani 1'e çok yakın olduğu söylenebilir.[46] Görüldüğü gibi Salih Zeki'nin seçtiği örnekler ve yaptığı uygulamalarla ulaştığı sonuç

44 Birinci sınıf olayların meydana gelme durumlarını gösteren katsayıların toplamı ise 2^m-2 yazılabilir ve $\lim_{m\to\infty}\frac{2^m-2}{2^m}=1$ olur.

45 Kavram yanılgısı, bir konunun uzmanlarının üzerinde mutabık kaldıkları görüşlerden farklı algı veya kavrayış olarak tanımlanmaktadır. Bir kavramın olması gerekenden daha zayıf olarak anlamak kısıtlı algılamayı doğurur. İsmail Özgür Zembat, "Kavram Yanılgısı Nedir?", içinde *Matematiksel Kavram Yanılgıları ve Çözüm Önerileri*, ed. Mehmet Fatih Özmantar, Erhan Bingölbali, ve Hatice Akkoç, 4. baskı (Ankara: Pegem Akademi, 2015), 2.

46 Ümit Işlak, "Koşullu Olasılık, Bağımsızlık ve Bayes Teoremi", *Matematik Dünyası*, sayı 118 (2023): 36.

Bernoulli Teoremi ile değil Littlewood Yasası ile uyumludur. *Hulâsa-i Hesâb-ı İhtimâlî'*de yaşanan bu sorun on dört yıl sonra yayınlanan *Hesâb-ı İhtimâlat* adlı eserde tekrar edilmemiş, Bernoulli Teoremine ilişkin kavramlar olması gerektiği gibi güncellenmiş ve esas fikirleri ile sunulmuştur.[47]

Sonuç

Salih Zeki, olasılık hesabında ayrıcalıklı bir yeri olan Bernoulli Teoremine, özet maksadıyla yazdığı küçük bir ders kitabı olan *Hulâsa-i Hesâb-ı İhtimâlî*'de (1898) yer ayırarak bir anlamda önemini vurgulamıştır. Eserde bulunan teoremin metninde ve incelediğimiz üç örnekte, olasılığı sıfır olmayan bir olay için yapılan deneylerde, deney sayısı mümkün olduğu kadar artırıldığında, bu olayın matematiksel kesinlik seviyesinde gerçekleşeceği ifade edilmektedir. Ancak Salih Zeki'nin haberdar olduğu 18. ve 19. yüzyıl olasılık hesabı eserlerinde görülen Bernoulli Teoremi metinleri, deney sayısı arttıkça elde edilen sonuçların oranının bir *p* olasılık değerine yaklaştığına vurgu yapmıştır. Salih Zeki, örneklerinde belirli bir olasılık değerine yaklaşmayı dikkate almadığından kendisinin verdiği tanım Bernoulli Teoremine değil günümüzde Littlewood Yasası adı verilen başka bir kurala aittir. Dolayısıyla matematikte ele aldığı konuları yetkinlikle başardığını gördüğümüz Salih Zeki, *Hulâsa-i Hesâb-ı İhtimâlî* adlı ilk eserinde, yaptığımız değerlendirme bağlamında, ele aldığı Bernoulli Teoreminin ana fikrini doğru anlamamış dolayısıyla tam olarak açıklamamış ve kullanmamıştır.

Hakem Değerlendirmesi: Dış bağımsız.
Çıkar Çatışması: Yazar çıkar çatışması bildirmemiştir.
Finansal Destek: Yazar bu çalışma için finansal destek almadığını beyan etmiştir.
Teşekkür: Bu çalışmaya devam ederken zamanlarını ve fikirlerini cömert bir şekilde sunan Yılmaz Dağ'a (Büyükçekmece Atatürk Anadolu Lisesi), Tamer Ali Azad'a (Elektrik Mühendisi), Prof. Dr. Feza Günergun'a (İstanbul Üniversitesi) ve Doç. Dr. Ümit Işlak'a (Boğaziçi Üniversitesi) çok teşekkür ederim.

Peer-review: Externally peer-reviewed.
Conflict of Interest: The author has no conflict of interest to declare.
Grant Support: The author declared that this study has received no financial support.
Acknowledgments: I would like to thank Yılmaz Dağ (Büyükçekmece Atatürk Anatolian High School), Tamer Ali Azad (Electrical Engineer), Prof. Dr. Feza Günergun (Istanbul University) and Assoc. Prof. Dr. Ümit Işlak (Boğaziçi University) who generously offered his time and ideas while continuing this study.

KAYNAKÇA / BIBLIOGRAPHY

Arşiv Kaynakları / Archival Sources

Başbakanlık Osmanlı Arşivi (BOA), Askeri Maruzat (Y..PRK. ASK.) 48/37, 21 Temmuz 1304 (2 Ağustos 1888).

47 Salih Zeki, *Hesâb-ı İhtimâlât*, 82–84.

Başbakanlık Osmanlı Arşivi (BOA), İrade Taltifat (İ..TAL) 4/37, 6 Temmuz 1308 (18 Temmuz 1892).

Basılı Kaynaklar / Printed Sources

Ahmed Fahri. "Salih Zeki Bey". *Muallimler Mecmuası*, sayı 21 (1924): 589–93.

Atasoy, Alper. "Salih Zeki'nin Makaleleri: Bir Bibliyografya Denemesi". *Osmanlı Bilimi Araştırmaları / Studies in Ottoman Science* 23, sayı 2 (05 Temmuz 2022): 335–94. https://doi.org/10.26650/oba.1002567.

Bernoulli, James. *The Art of Conjecturing, together with Letter to a Friend on Sets in Court Tennis*. Çeviren Edith Dudley Sylla. Baltimore: The Johns Hopkins University Press, 2006.

Bertrand, Joseph. *Calcul des Probabilités*. Paris: Gauthier-Villars, 1889.

Butrica, Andrew J."The Ecole supérieure de Télégraphie and the Beginnings of French Electrical Engineering Education". *IEEE (Institute of Electrical and Electronics Engineers) Transaction On Education* 30, sayı 3 (1987): 121–29.

Demirtaş, İnanç Akdenizci. "Salih Zeki'nin Lobaçevski Geometrisini Tanıtan İki Konferansı". *Osmanlı Bilimi Araştırmaları* 7, sayı 1 (2005): 67–78.

Erdem, Sadık. *Mir'ât-ı Mühendis-hâne-i Berrî-i Humâyûn*. İstanbul, 1986.

Gnedenko, B. W., ve A. J. Chintschin. *İhtimaller Hesabına Giriş*. Çeviren Lütfi Biran. İstanbul: Türk Matematik Derneği Yayınları, 1963.

Işlak, Ümit. "Koşullu Olasılık, Bağımsızlık ve Bayes Teoremi". *Matematik Dünyası*, sayı 118 (2023): 28–37.

Kökcü, Ayşe. "Bir Osmanlı Muallimi ve Mühendisi Mustafa Salim Bey ve Hesâb-ı Asgar-ı Nâmütenâhiyat (Kısm-ı Evvel) Hesâb-ı Tefâzülî Adlı Eseri". *Ankara Üniversitesi Dil ve Tarih-Coğrafya Fakültesi Dergisi* 54, sayı 2 (2014): 407–18.

Lacroix, Sylvestre François. *Traite Élémentaire du Calcul de Probabilité*. Paris: Mallet-Bachelier, Imprimeur-Libraire, 1864.

Liagre, Jean Baptiste Joseph. *Calcul des Probabilités et Théorie des Erreurs*. Bruxelles, 1879.

Salih Zeki. *Hesâb-ı İhtimâlât*. İstanbul: Matbaʿa-i Âmire, 1328.

———. *Hulâsa-i Hesâb-ı İhtimâlî*. İstanbul: Mühendishâne-i Berrî-i Humâyûn Matbaʿası, 1314.

———. *Kāmûs-ı Riyâziyyât*. C. 1. İstanbul: Karabet Matbaʿası, 1315.

———. "Mebâhis-i Fenniyye 1: Takdîr-i İhtimâlât". *Sabah* 9, sayı 2807 (1313): 4.

Takıcak, Semiha Betül. "Osmanlılar'da Analitik Geometri". *Kebikeç*, sayı 47 (2019): 165–88.

Takıcak, Semiha Betül Bayam. "Başhoca İshak Efendi'nin Mecmûa-i Ulûm-ı Riyâziye Adlı Eserinin Analitik Geometri Açısından Değerlendirilmesi". *Dört Öge*, sayı 21 (2022): 89–114.

Tezer, Cem. "Başhoca İshak Efendi ve Mecmu'a-yı 'Ulûm-ı Riyâziye". *Dört Öge*, sayı 2 (2012).

Uspensky, James Victor. *Introduction to Mathematical Probability*. New York and London: McGraw-Hill Book Company, 1937.

Zembat, İsmail Özgür. "Kavram Yanılgısı Nedir?" Içinde *Matematiksel Kavram Yanılgıları ve Çözüm Önerileri*, editör Mehmet Fatih Özmantar, Erhan Bingölbali, ve Hatice Akkoç, 4. baskı, 1–8. Ankara: Pegem Akademi, 2015.

Tezler / Dissertations

Değirmenci, Ali. "Salih Zeki Bey'in Hülâsa-i Hesâb-ı İhtimâlî Adlı Eseri ve Olasılığın Türkiye'ye Girişi". Ankara Üniversitesi, 2010.

Erten, Safiye Yılmaz. “Osmanlılarda Sayılar Teorisi ve Mehmed Nadir”. Ankara Üniversitesi, 2017.

Kadıoğlu, Dilek. “Salih Zeki’s Darülfünun Konferansları and His Treatment of The Discovery of Non-Euclidean Geometries”. Middle East Technical University, 2013.

Kökcü, Ayşe. “Osmanlılar’da Diferensiyel İntegral Hesap ve Eğitimdeki Yeri”. Ankara Üniversitesi, 2014.

Köten, Hacer. “Salih Zeki’de Modern Matematik Kavramları”. Gazi Üniversitesi, 2009.

Takıcak, Semiha Betül. “Osmanlılar’da Analitik Geometri: Hendese-i Halliye ve Hendese-i Tahlîliyye”. Ankara Üniversitesi, 2017.

Tosun, Ali Rıza. “Hüseyin Rıfkı Tamani’nin Çalışmaları Işığında Öklid Geometrisi’nin Türkiye’ye Girişi”. Ankara Üniversitesi, 2007.

Umut, Hasan. “İsmail Gelenbevi at The Engineering School: The Ottoman Experience of European Science Through Logarithms”. MA thesis, Istanbul Bilgi University, 2011.

Elektronik Kaynaklar / Electronic Sources

https://shiny.rit.albany.edu/stat/binomial/