Ortogonal Düzenler

Hülya BAYRAK[*] Aslıhan ALHAN[**]

ÖZET

Bu çalışmada, ortogonal düzenlerin kuruluş problemi üzerinde duruldu. Bu probleme cebirsel ve geometrik özellikler ile yaklaşıldı. Bu nedenle tüm kaynak taramaları tamamlandı ve konunun anlaşılabilmesi amacıyla örnekler verildi. Ayrıca, bazı önemli deneme düzenleri tanıtıldı. Bu düzenlerin kuruluşunda ortogonal düzenlerin özellikleri kullanıldı. Mevcut ortogonal düzenlerden diğer deneme düzenlerine geçiş yolları araştırıldı. Bunun sonucunda, ortogonal düzenlerin diğer deneme düzenlerine genişletilebileceği gösterildi.

Anahtar Kelimeler : *Ortogonal Düzenler, Projektif Geometri, Hadamard Matrisleri, Ortogonal Latin Kare Setleri.*

1. GİRİŞ

Matematikte bir matris türü olarak bilinen ortogonal düzenler istatistikte başvurulan deney düzenleme yöntemlerinden biridir. Ortogonal düzenler kendilerine uyan yapıdan başka bir yapıya geçişte kullanılır. Bu deneme düzenlerinde işlem çiftlerinin birlikte görülme sayısı her deneme düzeninde farklıdır. Ortogonal düzenler faktöriyel tasarımlarda yaygın olarak kullanılmaktadır.

2-düzeyli ortogonal düzenlerin kuruluşu için kullanılan teknikler, s-sembollü ortogonal düzenlerin kuruluşu için kullanılan tekniklerin özel durumudur.

Sylvester, 1867'ye kadar 2 kuvvetli (t=2), 2 düzeyli (s=2) ortogonal düzenleri düşünmüştür ayrıca, $N=2^t$ durumu için ortogonal düzenlerin kuruluşunu vermiştir. Paley (1933) t=2, s=2 ortogonal düzenleriyle ilgilenmiştir, çünkü polytopes teorisi t=2, s=2 ortogonal düzen uygulamalarıdır.Paley'in çalışması Hotelling (1944) tarafından önerilen ağırlık tasarımlarının problemini çözmüş ayrıca, kimyada faktöriyel tasarımların uygulandığı noktadan hareketle iki düzey ve iki kuvvetli ortogonal düzenleri düşünmüştür ve Mood (1946) tarafından çalışma devam ettirilmiştir. İstatistikte ortogonal düzen kavramı ilk defa Rao (1946) tarafından hiperküpler olarak tanıtılmıştır.

Plackett ve Burman (1943-1946) fizik ve endüstrideki araştırmalarda Paley'in çalışmalarını uygulamışlar ve çok faktörlü tasarımların terminolojisini çalışmışlardır.

[*]Gazi Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fak., İstatistik Bölümü, Ankara, Türkiye, e-mail: hbayrak@gazi.edu.tr

[**] Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstatistik Bölümü, Maltepe, Ankara, Türkiye, e-mail: aalhan@mynet.com

Onların araştırmaları Hotelling tarafından önerilen probleme tamamen çözüm sağlamıştır. Plackett ve Burman tarafından kurulan tasarımlarından bazılarının Kempthorne (1947) ve Brownlee ve Loraine (1948) tarafından analizi yapılmıştır.

Rao, Bose, Bush, Ray Chadhuri ikiden büyük kuvvetli ortogonal düzenlerin kuruluş ve özelliklerini çalışmışlardır. Bose (1961) bilgi teorisinde ortogonal düzenleri uygulamıştır, bilgi teorisi ve deneylerin tasarımı problemleri arasında benzerlikleri belirtmiştir (Seiden, 1954; Seiden ve Zemach, 1966).

Son zamanlarda Hedayat ve Stufken (1999), Lin ve Draper (1992), Box ve Tyssedal (1996), Rosenbaum'un (1996) çalışmaları genellikle ortogonal düzenlerin kuruluşu üzerinedir ve ortogonal düzenler ile bazı tasarımların ilişkilerini belirtmişlerdir, ayrıca ortogonal düzenlerin projeksiyonları ve projektif özelliklerini açıklamışlardır.

Ortogonal düzenler, OA(N,k,s,t) ile tanımlanır, N büyüklüğündeki ortogonal düzeninde, k kısıtı, s düzeyi ve t kuvveti gösterir. Böyle bir ortogonal düzen s sembollerinin $k \times N$ boyutlu X matrisidir, öyle ki X'in herhangi $t \times N$ alt matrisinin sütun vektörleri aynı sayıda tekrar eder. λ genellikle ortogonal düzenin indeksi olarak isimlendirildiğinde, $N=\lambda s^t$ biçiminde olduğu açıktır. Faktöriyel tasarımlara uygulamada, her bir satır faktöre uygundur, semboller, faktör düzeylerini ve her biri sütun, faktör düzeylerinin birleşimini gösterir. Böylece her OA(N,k,s,t), her bir s düzeye sahip k faktörü için N-tekrarlı faktöriyel tasarımı tanımlar (Cheng, 1995). $\lambda=1$ durumunda böyle düzenlere "birim indeksli ortogonal düzenler" denilir (Bush, 1952).

2. ORTOGONAL DÜZENLERDE KISITLARIN MAKSİMUM SAYISI

Ortogonal düzenlerde olası kısıtların maksimum sayısı f(N,k,s) (bazen sadece k alınır) ile gösterilsin. Böylece s asal sayı yada asal sayının kuvveti olduğunda f(N,s,2)=s+1 dir (Bush, 1952).

Teorem 1:

λ indeksli (N,k,s,t) ortogonal düzeninde ($N=\lambda s^t$);

$$N-1 \geq \binom{k}{1}(s-1)+\ldots+\binom{k}{u}(s-1)^u, \qquad t=2u \quad \text{ise} \qquad (1)$$

ve

$$N-1 \geq \binom{k}{1}(s-1)+\ldots+\binom{k}{u}(s-1)^u+\binom{k-1}{u}(s-1)^{u+1}, \; t=2u+1 \quad \text{ise} \qquad (2)$$

dir (Rao, 1947).

Teorem 2:

$s \geq 3$ ve birim indeksli OA(s^3, k, s, 3) ortogonal düzeni için kısıt sayısı aşağıda verildiği gibidir:

$$k \leq s+2 \qquad s \text{ çift ise} \tag{3}$$

ve

$$k \leq s+1 \qquad s \text{ tek ise} \tag{4}$$

dir (Raghavarao, 1971).

3. ORTOGONAL DÜZENLERİN KURULUŞ TEKNİKLERİ

3.1. Ortogonal Düzenlerin Kuruluşunda Sonlu Projektif Geometrinin Kullanımı

R.C. Bose (1947), deney tasarımının temel istatistiksel problemlerini sonlu geometri terimleri ile istatistiksel terimlerin ilişkilendirilebileceğini gösterdi. Simetrik faktöriyel denemelerde etkileşime ilişkin serbestlik derecelerini etki karışımı olmaksızın faktörlerin maksimum sayısını belirleme probleminde faydalı olacağını gösterdi.

Simetrik faktöriyel düzende her bir faktör (burada p pozitif asal sayı ve r pozitif tamsayıdır) $s=p^n$ düzeyli ve her bir blok $s^r \times 1$ boyutludur. Bose böyle bir düzende etkileşime ait serbestlik derecelerini PG(r-1,s) sonlu projektif uzayının noktalarının maksimum sayısı ile yorumlandı (Seiden, 1950).

Teorem 3.1.1:

$k \times r$ boyutlu bir C matrisi göz önüne alınsın.

$$C = \begin{bmatrix} c_{11}\, c_{12} \cdots c_{1r} \\ c_{21}\, c_{22} \cdots c_{2r} \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ c_{k1}\, c_{k2} \cdots c_{kr} \end{bmatrix}$$

Burada $c_{ij} \in GF(s)$ dir [GF(s), s elemanlı sonlu cimi gösterir]. Eğer t satırlı t ranklı alt matrisler bulunabiliyorsa, bu takdirde $OA(s^r, k, s, t)$ ortogonal düzeni kurulabilir. Burada $s=p^n$ dir (Bose ve Bush, 1952).

C matrisinin satırları PG(r-1, s) sonlu projektif uzayındaki noktanın koordinatları gibi yorumlanabilir öyle ki noktaların t tanesi birleştirilmemiştir. Böylece aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 3.1.2:

PG(r-1,s) projektif uzayında t tanesi birleştirilmemiş (t tanesi bir doğru üzerinde değil) k noktaları bulunabilirse, bu takdirde $\lambda=s^{r-t}$, $s=p^n$ olan $OA(s^r,k,s,t)$ ortogonal düzeni kurulabilir (Bose ve Bush, 1952).

Örnek 3.1.1: Burada s=2 durumu düşünülsün ve (r-2)-boyutlu alt düzleminde olmayan PG(r-1,2) nin tüm noktaların seti alınsın. Bu takdirde,

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_r = 0 \qquad (5)$$

dir. (3.1.1) özelliğini sağlayan 2^{r-1} tane nokta vardır. PG(r-1,2) deki her bir doğru üç noktadan geçmediğinden dolayı bu noktaların üçü aynı doğru üzerinde değildir ve dolayısıyla setin dışındaki doğrulardan biri (3.1.1) düzleminde değildir. Teorem 3.1.1 deki C matrisinin satırları için bu noktaların koordinatları alınır, 3 kuvvetli OA(2^r,2^{r-1},2,3) ortogonal düzeni kurulabilir ve 2^{r-1} tane kısıt vardır.

GF(2) üzerinde kurulan projektif geometri PG(2,2) dir ve r=3 bulunur. PG(2,2) bir Fano düzlemidir. Bu düzlemin (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,1) dört noktası $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ doğrusu üzerinde değildir. Bundan dolayı uygun C matrisi

$$C = \begin{bmatrix} 100 \\ 010 \\ 001 \\ 111 \end{bmatrix}$$

Sekiz tane olası ξ sütun vektörü aşağıdaki gibidir:

01000111

00101011

00011101

Böylece, OA(8,4,2,3) düzeninde gerekli sütunlar aşağıda verilen $C\xi$ formuyla bulunur.

OA(8,4,2,3) ortogonal düzeni

01000111

00101011

00011101

01110001

3.2. Ortogonal Düzenlerin Kuruluşunda Hadamard Matrislerinin Kullanımı

n mertebeli Hadamard matrisi 1 yada –1 hücreleri ile n×n boyutlu H_n matrisidir öyle ki n×n boyutlu birim matrisi I_n ile gösterildiğinde,

$$H_n H_n^{'} = nI_n \tag{6}$$

dir. Hadamard matrislerinin varlığı için gerekli koşul n≡2 yada n≡0 (mod 4) olmasıdır.

η=4λ alınırsa (λ pozitif tamsayı), $A_{n-1,n}$ çekirdek matrisinin OA(4λ,4λ-1,2,2) olduğu kolayca gösterilebilir, bu yapı temelde 1 ve –1 öğelerinden oluşur. Teorem 2.1'e göre f(4λ,2,2)= 4λ-1 olur. Böylece, aşağıdaki Teorem verilebilir.

Teorem 3.2.1:

f(4λ,2,2)= 4λ-1 olması için gerekli ve yeterli koşul 4λ mertebeli Hadamard matrisinin mevcut olmasıdır.

Yukarıdaki gibi OA(4λ,4λ-1,2,2) düzeni, OA(8λ,4λ,2,3) düzeninin kuruluşunda kullanılabilir. Verilen A düzeni için, 0'lar ve 1'lerin yer değiştirilmesiyle A'dan bulunan düzeni $\bar{A}$ ile gösterilecektir.

Teorem 3.2.2:

t çift olduğunda ve OA($\lambda 2^t$,k,2,t) mevcut ise, bu takdirde B düzeni

$$B = \begin{bmatrix} A & \bar{A} \\ 0...0 & 1...1 \end{bmatrix}$$

biçiminde olan bir OA($\lambda 2^{t+1}$,k+1,2,t+1) ortogonal düzeni bulunabilir.

Örnek 3.2.1: t=2 için 8.inci mertebeden bir Hadamard matrisini göz önüne alarak Teorem 3.2.2'ye göre OA(16,8,2,3) ortogonal düzeni aşağıdaki gibi elde edilebilir.

OA(16,8,2,3) ortogonal düzeni

1110100000101110

1011010010010110

1001101011001010

1000110111100100

1100011001110010

1010001110111000

1101000101011100

0000000011111111

(Bayrak ve Alhan, 2002).

3.3. Ortogonal Düzenlerin Kuruluşunda Ortogonal Latin Kare Tam Setlerinin Kullanılışı

Ortogonal düzenlerin kuruluşunda kullanılan diğer bir yöntem ortogonal Latin kare tam setleridir.

Teorem 3.3.1: s asal sayı iken s mertebeli ikişerli ortogonal Latin kare tam setinin varlığı $OA(s^2,s+1,s,2)$ ortogonal düzeninin varlığını ifade eder.

Bundan dolayı tüm s için ikişerli ortogonal Latin karenin en az bir çifti $OA(s^2,s+1,s,2)$ ortogonal düzeninin varlığını vurgular (s=6 hariç) (Chakravarti, 1963).

3. mertebeden ortogonal Latin kare tam seti göz önüne alınarak OA(9,4,3,2) ortogonal düzeni aşağıdaki gibi kurulabilir.

OA(9,4,3,2) ortogonal düzeni

0	0	0	1	1	1	2	2	2
0	1	2	0	1	2	0	1	2
0	1	2	1	2	0	2	0	1
0	1	2	2	0	1	1	2	0

Böyle bir ortogonal düzenin birim indeksli ve iki kuvvetli olduğu görülür. Bundan dolayı 3 mertebeli 2 ikişerli ortogonal Latin kare tam setinin varlığı OA(9,4,3,2) ortogonal düzeninin varlığını ifade eder (Bayarak ve Alhan, 2002a).

3.4. Birim İndeksli Ortogonal Düzenin Kuruluşu ve Polinomlar

s asal sayı yada asal sayının kuvveti ve t<s iken $OA(s^t,s+1,s,t)$ ortogonal düzeni kurulabilir (Bush, 1952). t=3 ve s tek iken, kısıtların maksimum sayısı Teorem 2.2'de verildiği gibi bulunur. Bununla birlikte, s çift ise, s+1 satırlardan diğer ortogonal satırlar kurularak kısıtların maksimum sayısı bulunur.

$\alpha_0=0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{s-1}$ GF(s) nin elemanları olsun ve s^t polinomları düşünülsün.

$$y_j(x) = a_{t-1}x^{t-1} + a_{t-2}x^{t-2} + \ldots + a_1 x + a_0 \,;\; a_i \in GF(s), i = 0,1,\ldots,t-1 \tag{7}$$

Böyle s^t tane polinom olduğu açıktır, t katsayılarının her birinden dolayı cisimde s faklı değerin olduğu varsayılır ve $0,1,\ldots,s^t-1$ değerleri üzerinde j alt indis sıralaması yapılabilir. 0'dan s-1'e satırların sayısı ve 0'dan s^t-1'e sütunların sayısı iken $s \times s^t$ düzeni oluşturulur. Özellikle i.inci satır ve j.inci sütunda bulunan eleman

$$y_j(e_i) = e_u \tag{8}$$

olur (u tamsayı). Düzenin sonunda birim indeksli ve t kuvvetli ortogonal düzen elde edilebildiğini söylemek mümkündür.

Tersine özdeş iki t-özdeş alt sütun vektörü (tuple) nedeniyle t satırların seçilebildiği farz edilsin ve polinomlar birleştirilsin. Bu takdirde;

$$
\begin{aligned}
a_{t-1}x^{t-1} + a_{t-2}x^{t-2} + \ldots + a_1 x + a_0 &= y_j(x) \\
a'_{t-1}x^{t-1} + a'_{t-2}x^{t-2} + \ldots + a'_1 x + a'_0 &= y'_j(x)
\end{aligned}
\qquad (9)
$$

olur. Satırlar e_{i_1}, e_{i_2},..., e_{i_t} sonlu cisminin elemanlarıdır. Yukarıdaki eşitlikler taraf tarafa çıkarıldığında,

$$A_{t-1}e_{i_t}^{t-1} + A_{t-2}e_{i_t}^{t-2} + \ldots + A_1 e_{i_t} + A_0 = 0 \qquad (10)$$

elde edilir. 1'den t'ye kadar r sıralamada gösterildiği gibi, $A_{t-1}, A_{t-2}, \ldots, A_1, A_0$ t tane türdeş lineer denklem elde edilir. Polinomların özdeş olmasından dolayı, A'ların hepsi sıfır olamaz. Dolayısıyla çözümün varlığı için Vandermonde tipindeki matrisin determinantı kullanılır (Bush, 1952).

t=3 iken kısıtların maksimum sayısına sahip olan s+1 satırlar nedeniyle OA(s^t,s+1,s,t) ortogonal düzeninin kurulabileceği görülür (Raghavarao, 1971).

Örnek 3.4.1: t=3 ve s=3 olsun. OA(27,4,3,3) ortogonal düzenini kuralım. GF(3) ün elemanları 0, 1, 2 ve (7) eşitliği ile bulunan 27 polinom aşağıdaki gibidir:

y_1= 0 , y_2= 1 , y_3= 2 , y_4= x , y_5= x+1 , y_6= x+2 , y_7= 2x , y_8= 2x+1 , y_9= 2x+2 , y_{10}= x^2 , y_{11}= x^2+1 , y_{12}= x^2+2 , y_{13}= x^2+x , y_{14}= x^2+x+1 , y_{15}= x^2+x+2 , y_{16}= x^2+2x , y_{17}= x^2+2x+1 , y_{18}= x^2+2x+2 , y_{19}= $2x^2$, y_{20}= $2x^2$+1 , y_{21}= $2x^2$+2 , y_{22}= $2x^2$+x , y_{23}= $2x^2$+x+1 , y_{24}= $2x^2$+x+2 , y_{25}= $2x^2$+2x , y_{26}= $2x^2$+2x+1 , y_{27}= $2x^2$+2x+2 .

Bu takdirde ortogonal düzenin dört satırı aşağıda gösterildiği gibi oluşturulur:

OA(27, 4, 3, 3) için ortogonal düzen

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
0	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
1	0	1	2	1	2	0	2	0	1	1	2	0	2	0	1	0	1	2	2	0	1	0	1	2	1	2	0
2	0	1	2	2	0	1	1	2	0	1	2	0	0	1	2	2	0	1	2	0	1	1	2	0	0	1	2
A	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Maksimum kısıtların sayısı ile, s≤t olduğunda, OA(s^t,t+1,s,t) ortogonal düzeni kurulabilir (Raghavarao, 1971).

4. SONUÇ

Ortogonal düzenler deney düzenleme problemlerinde sıkça başvurulan ve kullanılma alanı geniş olan deneme düzenleridir. Bu deneme düzenlerinin kuruluşu oldukça zordur. Bu çalışmada, ortogonal düzenlerin kuruluş teknikleri için bazı yaklaşımlar verildi.

KAYNAKLAR

BAYRAK, H. ve ALHAN, A. (2002), *On Construction of 2-Symbol Orthogonal Arrays*, Hacettepe Bulletin Natural Science and Engineering, Basımda.

BAYRAK, H. ve ALHAN, A. (2002a), *TheUse of Orthogonal Latin Squares in the Construction of Orthogonal Arrays of Index Unity*, Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak. Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, C.15, No.1, 345-349.

BOSE, R.C. (1947), *Mathematical Theory of Symmetrical Factorial Desings*, Sankhyā, 8, 107-166.

BOSE, R. C. ve BUSH, K.A. (1952), *Orthogonal Arrays of Strength Two And Three*, Ann. Math. Stat., 23, 508-524.

BOSE, R.C. (1961), *On Some Connections Between The Design of Experiments and Information Theory*, Bull. Inter. Stat. Inst. (32 session, Tokyo, 1960), 38, 257-271.

BOX, G. ve TYSSEDAL, J. (1996), *Projective Properties of Certain Orthogonal Arrays*, Biometrika. 83, 4, pp. 950-955.

BROWNLEE, K.A. ve LORAINE, P.K. (1948), *The Relationship Between Finite Groups and Completely Orthogonal Squares, Cubes and Hypercubes*, Biometrika, 35, 277-282.

BUSH, K.A. (1952), *Orthogonal Arrays of İndex Unity*, Ann. Math. Stat., 23, 426-434.

CHAKRAVARTI, I.M. (1963), *Orthogonal and Partially Balanced Arrays and Their Applications in Design of Experiments*, Metrika, 7,231-243.

CHENG, C.S. (1995), *Some Projection Properties of Orthogonal Arrays*, The Annals of Statistics, Vol. 23, No. 4, 1223-1233.

HEDAYAT, A.S. ve STUFKEN, J. (1999), *Compound Orthogonal Arrays*, Technometrics, Vol. 41, No. 1, 57-61.

HOTELLING, H. (1944), *Some Improvements in Weighing and Other Experimental Techniqes*, Ann. Math. Stat., 15, 297-306.

KEMPTHORNE, O. (1947), *A Simple Approach To Confounding and Fractional Replication in Fractional Experiments*, Biometrika, 34, 255-272.

LIN, D.K.J. ve DRAPER, N.R. (1992), *Projection Properties of Plackett and Burman Designs*, Technometrics, Vol. 34, No. 4, 423-428.

MOOD, A.M. (1946), *On Hotelling's Weighing Problem*, Ann. Math. Stat., 17, 432-446.

PALEY, R.E.A.C. (1933), *On Orthogonal Matrices*, J. Math. Phys., 12, 311-320.

PLACKETT, R.L. ve BURMAN, J.P. (1943–1946), *The Design of Optimum Multifactorial Experiments,* Biometrika, 33, 305-325.

RAGHAVARAO, D. (1971), *Constructions and Combinatorial Problems in Design of Experiments,* Originally Published, New York: Wiley.

RAO, C.R. (1946), *Hypercubes of Strength "d" Leading To Confounded Designs in Factorial Experiments,* Bull. Cacutta Math. Soc., 38, 67-78.

RAO, C.R. (1947), *Mathematical Theory of Factorial Design,* Sankhyā, Vol. 8, 107-166.

ROSENBAUM, R.P. (1996), *Some Useful Compound Dispersion Experiments in Quality Design,* Technometrics, 38, 354-364.

SEIDEN, E. (1950), *A Theorem in Finite Projective Geometry And An Application To Statistics,* Proc. Amer. Math. Soc., 1, 282-286.

SEIDEN, E. (1954), *On the Problem of Construction of Orthogonal Arrays,* Ann. Math. Stat., 25, 151-156.

SEIDEN, E. ve ZEMACH, R. (1966), *On Orthogonal Arrays,* Ann. Math. Stat., 37, 1355-1370.

SYLVESTER, J.J. (1867), *Thoughts on Inverse Orthogonal Matrices Simutaneous Sign Successions, And Tesselated Pavements in Two or More Colours, With Applications To Newton's Rule, Ornamental Tile-Work And The Theory of Numbers,* Phil. Mag., 34, 461-475.

The Orthogonal Arrays

ABSTRACT

Examples are given for understandable this of subject. Moreover, some important experimental designs are given. It used properties of orthogonal arrays for these arrays of construction. Finally, it is researched other experimental designs transition from existence of orthogonal arrays. Therefore, orthogonal arrays could have expanded to others experimental designs.

Key Words : *Orthogonal Arrays, Projective Geometry, Hadamard Martices, Sets of Orthogonal Latin Squares.*