GEFAD / GUJGEF44(1): 273-309(2024)

Ortaokul Matematik Öğretmen Adaylarının Oran Kavramına Yönelik Öğrenci Düşünme Modelleri Oluşturma Süreçleri * **

Prospective Middle School Mathematics Teachers' Process of Constructing Student Thinking Models on Ratios

Sultan YILDIRIM[1], İ. Elif YETKİN ÖZDEMİR[2]

[1]*Ankara/ Çankaya İlçe Milli Eğitim Müdürlüğü. e-posta: igrek.sultan@gmail.com*
[2]*Hacettepe Üniversitesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Matematik Eğitimi Ana Bilim Dalı. e-posta: ozdemiry@hacettepe.edu.tr*

Makale Türü/Article Types: *Araştırma Makalesi/ Research Article*
Makalenin Geliş Tarihi: 16.10.2023 ***Yayına Kabul Tarihi: 04.03.2024***

ÖZ

Bu çalışmanın amacı, araştırma temelli bir hizmet öncesi eğitim programına katılan öğretmen adaylarının oran kavramıyla ilgili öğrenci düşünme modelleri geliştirme sürecini araştırmaktır. Nitel araştırma yöntemlerinin kullanıldığı çalışmada katılımcılar bir devlet üniversitesinde son sınıfta okuyan dört ortaokul matematik öğretmeni adayıdır. Eğitim programının tasarımı, Bilişsel Yönlendirmeli Öğretim (CGI) ilkelerine dayanmakta olup, öğretmen adaylarının öğrencilerin oran kavramı gelişimine dair araştırma temelli bilgiyle etkili bir şekilde etkileşimde bulunmalarını sağlayan görevleri içermektedir. Çalışmanın verileri, beş oturumdan elde edilen görüşmelerin kayıtlarından ve öğretmen adaylarının görevlere verdiği yazılı cevaplardan oluşmaktadır. Verilerin analizinde öğrenci düşünme modellerini dört süreç (tanımlama, karşılaştırma, çıkarım ve yeniden yapılandırma) ile tanımlayan bir çerçeve kullanılmıştır. Öğrenci düşünmesini açıklarken, öğretmen adayları öğrenci ifadelerini tekrarlamış, öğrenci çözümlerindeki önemli noktalara vurgu yapmış, öğrenci çözüm yöntemlerini ayrıntılı bir şekilde açıklamış veya genel çözüm özelliklerine odaklanmıştır. Karşılaştırma sürecinde öğretmen adayları, öğrenci çözümlerini kendi çözümleriyle açık veya üstü kapalı olarak karşılaştırmış, genellikle kendi veya diğer öğretmen adaylarının

---

***Alıntılama:** Yıldırım, S. ve Yetkin Özdemir, İ. E. (2024). Ortaokul matematik öğretmen adaylarının oran kavramına yönelik öğrenci düşünme modelleri oluşturma süreçleri. *Gazi Üniversitesi Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi, 44(*1), 273-309.

** Bu araştırma Doç. Dr. İ. Elif YETKİN ÖZDEMİR danışmanlığında Sultan YILDIRIM tarafından hazırlanan doktora tezinden üretilmiştir.

düşüncelerine odaklanmışlardır. Çıkarım süreci, öğrenci çalışmalarından gelen kanıtları yorumlamayı içermiştir, bazen gerekçe sunmadan çıkarımda bulunmuşlardır. Öğretmen adayları, öğrenci düşünmesini tahmin ederek ve öğrenci düşüncesini dikkate alan problemler oluşturarak yeniden yapılandırma sürecinde bulunmuşlardır. Oluşturdukları modellerle öğrenci düşünmesini tahmin edebilmişlerdir.
Anahtar Sözcükler: *Matematik eğitimi, Öğretmen adayları, Bilişsel yönlendirmeli öğretim, Öğrenci düşünme modelleri, Oran kavramı*

ABSTRACT

This study explores the process of prospective teachers developing student thinking models regarding the ratio concept within a research-based pre-service education program. It employs qualitative research methods and involves four final-year prospective middle school mathematics teachers at a state university. The program design incorporates principles of Cognitively Guided Instruction (CGI), featuring tasks that enable prospective teachers to engage with research-based knowledge on ratio concept development in students and its application in instruction. Data for the study comprises recorded interview sessions spanning five meetings and written responses from prospective teachers to the tasks. Analysis employs a framework defining four processes for constructing student thinking models: description, comparison, inference, and restructuring. When describing student thinking, prospective teachers reiterated student statements, emphasized crucial points in student solutions, provided detailed explanations of student solution methods, or focused on general solution characteristics. In the comparison process, prospective teachers explicitly or implicitly compared student solutions with their own, often based on personal thoughts or those of fellow prospective teachers. The inference process involves interpreting evidence from student work, sometimes without providing a rationale. Prospective teachers showed restructuring through anticipating student thinking and posing problems that consider student thought. They anticipated student thinking through the models they created.
Keywords: *Mathematics education, Prospective teachers, Cognitively guided instruction, Student thinking models, Ratio concept*

GİRİŞ

Pedagojik Alan Bilgisi (PAB) bir öğretmenin alan bilgisini öğrencilere etkili bir şekilde aktarabilme yeteneği olarak tanımlanabilir (Shulman, 1986). PAB'ın önemli bir boyutu olan öğrenci bilgisi, öğretmenlerin öğrenci düşüncesine odaklanmasını ve bu düşünceleri öğretimi tasarlamada kullanmasını sağlar (Ball, Thames ve Phelps, 2008). Ancak araştırmalar, öğretmenlerin öğrenci bilgilerindeki yetersizliklerin onları öğrenci düşüncesinin önemli noktalarını anlamaktan ve bu bilgilere göre karar almaktan alıkoyduğunu göstermiştir (Hill, Ball ve Schilling, 2008). Öte yandan, öğrencilerin matematiksel düşünme biçimleri hakkında bilgi sahibi olan öğretmenlerin, öğretimlerini öğrencilerin gereksinimlerine uygun olarak düzenleyebildikleri gözlenmiştir (Carpenter ve Levi, 2000; Clements, Sarama, Spitler, Lange ve Wolfe, 2011). Bu sonuçlar, hizmet içi ve hizmet öncesi öğretmen eğitimi programlarında araştırma tabanlı öğrenci bilgisinin kullanımını teşvik etmektedir (Ivars, Fernández, Llinares ve Choy, 2018). Bu bağlamda bu çalışmada öğretmen adaylarının öğrenci bilgilerinin nasıl değiştiğini ve geliştiğini açıklayan süreçlere odaklanılmış ve ortaokul matematik öğretmen adaylarının oran kavramına yönelik öğrenci düşünme modelleri oluşturma süreçlerini incelemek amaçlanmıştır. Bu doğrultuda bu bölümde öncelikle araştırma tabanlı öğrenci düşüncesinin öğretmen eğitiminde kullanımı ele alınacak, sonra öğrenci düşünce modeli oluşturma süreçleri açıklanacak, ardından oran kavramının gelişimine yönelik alan yazında tanımlanan temel anlayışlar üzerinde durulacaktır.

Öğretmen Eğitiminde Araştırma Tabanlı Öğrenci Düşüncesi

Araştırma tabanlı öğrenci düşüncesinin öğretmen eğitimi ve mesleki gelişim programlarında kullanılmasının iyi bilinen örneklerinden biri Bilişsel Yönlendirmeli Öğretim (BYÖ)'dir. BYÖ'nün temel ilkelerinden biri, öğretmenlerin öğrenci düşüncesini araştırmaya dayalı bir yaklaşımla anladıklarında, bu düşünceleri temel alarak etkili bir öğretim planlayabilecekleridir (Carpenter, Fennema ve Franke, 1996). BYÖ atölyeleri, öğretmenlerin öğrenci düşüncesini anlayarak kendi öğrenci düşünme modellerini oluşturmalarını teşvik eder (Carpenter ve diğerleri, 1996). Bu atölyelere katılan öğretmenlerin, öğrencilerinin kendi çözümlerini üretebileceğine ve öğretimin öğrencilerin düşüncelerine dayanarak tasarlanabileceğine inanmaya başladıkları gözlenmiştir. Bu inançları benimseyen öğretmenler daha yüksek öğrenci başarısı elde etmiştir (Carpenter, Fennema, Peterson, Chiang ve Loef, 1989). BYÖ temelli diğer araştırmalar, bu bulguları destekleyen sonuçlar ortaya koymuştur. BYÖ deneyimi kazanan öğretmen ve öğretmen adaylarının derslerini planlarken ve uygularken ders kitabına daha az bağımlı hale geldikleri, öğrencilerin düşünme biçimleriyle daha fazla ilgilenmeye başladıkları, sorgulayıcı sorular sorarak onların düşüncelerini açığa çıkarabildikleri, öğrencilerin kendi çözüm stratejilerini keşfetmelerine ve sunmalarına olanak tanıdıkları ve biçimlendirici değerlendirmeyi daha fazla kullanmaya başladıkları gözlenmiştir (de la Cruz, 2016; Richardson, Miller ve Reinhardt, 2019).

Araştırma tabanlı öğrenci bilgisini kullanan hizmet içi/öncesi öğretmen eğitimi programlarının bir kısmı ise Öğrenme Yol Haritası (ÖYH) merkezli yaklaşımlara dayanmaktadır. Simon (1995), ÖYH kavramını "Öğrenme hedefleri, öğrenme etkinlikleri ve öğrencilerin dahil olabileceği düşünme ve öğrenme" olarak tanımlamıştır (s. 133). Clement ve Sarama (2004)'ya göre ise ÖYH, bir öğrenme hedefi ve bu hedefe yönelik olarak çocukların ilgili alandaki gelişimsel ilerlemeleri ile bu ilerleme seviyelerine uygun etkinlikleri içermektedir. ÖYH tabanlı mesleki gelişim programları üzerine yapılan araştırmalar, ÖYH'lerin öğretmenlerin öğrenci düşüncelerine odaklanmalarını desteklediğini ve bu sayede öğrenci düşüncesini öğretim kararlarının merkezine koymalarına yardımcı olduğunu göstermiştir. ÖYH'lerin öğretmen eğitiminde kullanımını inceleyen araştırmalar, öğretmenlerin eş parçalama, onluk tabanda sayma, basamak değeri, geometrik şekiller, cebir gibi konularda araştırmacılar tarafından geliştirilen ÖYH'leri öğrencilerin düşünme seviyelerini belirleme, ders planlarını ve öğretimlerini buna göre düzenleme ve geliştirme amacıyla kullanabildiğini göstermiştir (Sarama, Clements, Wolfe ve Spitler, 2016; Sztajn, Wilson, Edgington ve Confrey, 2011). Bu unsurlardaki artışın öğrenci başarıları üzerinde olumlu etkiler yarattığı saptanmıştır.

Öğrenci Düşünme Modelleri Oluşturma Süreçleri

Öğretmenler, öğrencilerin anlayışlarını kavramak amacıyla kendi matematiksel anlayışlarından yararlandıklarında, öğrencilerin matematiksel kavrayışlarını anlamak ve ilişkilendirmek için bir teorik model oluştururlar (Wilson, Mojica ve Confrey, 2013). Bu modeller aynı zamanda öğretmenlerin verdiği öğretim kararlarını şekillendirebilir (Wilson, Lee ve Hollebrands, 2011). Wilson ve diğerleri (2011), öğretmen adayları ile yaptıkları bir çalışmada öğrenci düşünme modelleri oluşturma sürecini dört boyutla tanımlamıştır: Tanımlama, Karşılaştırma, Çıkarım Yapma ve Yeniden Yapılandırma. Tanımlama sürecinde öğretmen adayları öğrencilerin eylemlerine, yazılı veya sözlü ifadelerine, kullandıkları matematiksel terimlere ve sembollere dikkat ederek onları karakterize eder. Öğrenci çalışmalarında önemli buldukları noktaları rapor eder, öğrencilerin kullandıkları kelimeleri tekrarlayabilir veya çözümlerinin açıklamasını yaparlar. Öğrencilerin gözlemlenebilir eylemlerinin ve ifadelerinin fark edilmesi, öğretmenin öğrenci düşünme modellerini oluşturmak için atması gereken bir adımdır. Karşılaştırma süreci, öğretmen adaylarının, öğrencilerin eylemlerini kendi eylemleriyle açık veya örtük olarak karşılaştırdıkları bir süreçtir. Bu karşılaştırmalar kendi deneyimlerine ve diğer öğretmen adaylarının deneyimlerine dayanabilir. Bu süreç, öğretmen adaylarının kendi eylemleri ile öğrencilerin çalışmalarında fark ettikleri eylemler arasındaki benzerlikleri ve farklılıkları nasıl tespit ettiklerini içerir. Çıkarım Yapma, öğretmen adaylarının pedagojik ve/veya matematiksel bilgilerini kullanarak öğrencilerin çalışmalarını yorumlamalarını ve öğrencilerin ne düşündükleri hakkında çıkarımlar yapmalarını içerir. Yeniden Yapılandırma süreci ise, öğretmen adaylarının kendi öğretim yaklaşımlarında oluşturdukları öğrenci düşünme modellerini kullanmalarıyla tanımlanır. Bu süreç, bir öğretmenin öğrenci düşünme modeline dayanarak öğrencilerin eylemlerini öngörmesini ve bu modelin geçerliliğine dair destekleyici veya doğrulayıcı kanıtlar sağlayan görevler sunmasını veya sorular sormasını içerebilir (Wilson ve diğerleri, 2011).

Oran Kavramı Hakkında Araştırma Tabanlı Öğrenci Bilgisi

Lobato, Ellis ve Zbiek (2010), öğrencilerin orantısal akıl yürütme süreçleri ile ilgili on temel anlayış tanımlamıştır. Bunların beş tanesi oran kavramı ile ilgilidir. *Birinci temel anlayış*, oranı oluşturan iki niceliğe odaklanılması ve iki niceliğin eş zamanlı olarak koordine edilmesi gerektiğini ifade etmektedir. Öğrenciler, tipik olarak bir nicelikle akıl yürütmeye (tek değişkenli akıl yürütme) aşina oldukları için bu alışkanlıklarını devam ettirme eğilimindedirler. Tek değişkenli ve çok değişkenli akıl yürütme arasındaki bu değişim, öğrenciler için bilişsel bir sıçramayı içerir (Lamon, 2012). *İkinci temel anlayışa* göre oran oluşturmak için, iki niceliğin çarpımsal olarak karşılaştırılması veya iki niceliğin birleşik bir birimde birleştirilmesi gerekir. Yani, oran oluşturulurken bir niceliğin diğerine kıyasla kaç katı büyüklüğünde olduğu karşılaştırılabilir veya nicelikler arasındaki değişmez ilişki korunurken tekrar edilebilen ve parçalara ayrılabilen iki nicelik birleşik bir birimde birleştirilebilir. Örneğin, birleşik bir birim, 10 cm: 4 sn'lik bir birim oluşturmak için 10 cm ve 4 saniyenin bir birim olarak düşünülmesidir. Öğrenciler, 20 cm: 8 sn, 50 cm: 20 sn, 100 cm: 40 sn gibi diğer birçok oranı oluşturmak için 10 cm: 4 sn birimini tekrarlayabilir (iki kez, beş kez, on kez vb.) veya 5 cm: 2 sn, 2,5 cm: 1 sn ve 1 cm: 0,4 sn gibi oranlar oluşturmak için 10 cm: 4 sn birimini parçalara ayırabilirler. Çarpımsal karşılaştırmaları kullanmak, birleşik birimlere göre daha güçlü bir stratejidir. Örneğin, öğrenciler, orijinal oran olan 10 cm: 4 sn'yi, yolun (cm) her zaman zamanın (sn) 2,5 katı olduğu çarpımsal bir karşılaştırma olarak düşünebilirler. Böylece 5 saniyede 5 × 2,5 cm veya 12,5 cm yol alınabilir sonucuna doğrudan ulaşabilirler. *Üçüncü temel anlayış* olan "ölçü olarak oran" fikrini oluşturmak için iki süreç tanımlanmıştır: (1) ölçülen özellikleri/nitelikleri diğerlerinden ayırt etmek ve (2) bir niceliği değiştirmenin oranla ölçülecek özellik/nitelik üzerindeki etkisini anlamak. *Dördüncü temel anlayış,* çoğunlukla kesir gösteriminde kullanılan oranların kesirlerle aynı anlama sahip olmadığı ancak oranların kesir olarak yorumlanabileceği fikrini içerir. Öğrenciler oran ile kesir arasındaki farkı anladıkça, çarpımsal karşılaştırmalar (4/10 oranında 4, 10'un 2/5'i kadardır) ve birleşik birimler (4/10'u iki eş parçaya bölerek 2/5 oranını elde etmek) aracılığıyla kesir ile oran arasındaki ilişkiyi kurabilirler. Bu sayede birçok oranı kesir olarak yorumlama yeteneğine sahip olabilirler. *Beşinci temel anlayış* ise kesirlerde olduğu gibi oranların da bölüm olarak yorumlanabileceği düşüncesini içerir. Örneğin her 5 dakikada 2 damla su damlatan bir musluk için 2:5 şeklinde ifade edilen bir oran 2÷5 şeklinde yeniden yorumlanabilir. Bu durum her damla sayısının (2 damla) dakika sayısı (5 dakika) arasında eşit paylaşılması şeklinde düşünülebilir. Böylece 2÷5 bölümü, musluğun dakikada bir damla suyun 2/5'ini (ondalık olarak 0,4'ünü) damlattığı anlamına gelir (Lobato ve diğerleri, 2010).

Problem Durumu ve Çalışmanın Amacı

Öğretmen adayları ile yapılan araştırmalar, oran kavramına ilişkin kavram yanılgıları taşıdıklarını veya bu konuda bilgi eksiklikleri olduğunu göstermektedir (Johnson, 2017; Pişkin Tunç, 2016; Simon ve Blume, 1994). Ayrıca, öğrencilerin oran kavramını nasıl anladıkları konusunda yetersiz oldukları ve zorlandıklarına dair bulgular da mevcuttur (Hines ve McMahon, 2005). Bu çalışma, araştırma tabanlı öğrenci bilgisine dayalı olarak tasarlanmış bir hizmet öncesi eğitim programına katılan öğretmen adaylarının oran kavramına yönelik öğrenci düşüncesi hakkındaki bilgilerini nasıl ve hangi yollarla geliştirdiklerini incelemeyi amaçlamaktadır. Bu alanda yapılan araştırmaların büyük bir kısmı, öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının gelişim süreçlerinden ziyade kullanılan modelin etkileri ve sonuçları üzerinde durmuştur. Bu nedenle, öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının matematiksel ve mesleki öğrenmeleriyle birlikte öğrenci düşünme bilgilerini nasıl ve hangi yollarla geliştirdiklerini açığa çıkaran araştırmalara ihtiyaç vardır (Liang, 2021). Bu bağlamda, bu çalışmanın amacı oran kavramı ile ilgili araştırma tabanlı öğrenci düşünmesini merkeze alan bir hizmet öncesi eğitim programına katılan öğretmen adaylarının öğrenci düşünme modelleri oluşturma süreçlerini incelemektir. Bu amaç doğrultusunda ele alınan araştırma problemi ve alt problemler aşağıdaki gibidir:

Ortaokul matematik öğretmen adaylarının oran kavramına yönelik öğrenci düşünme modelleri oluşturma süreçleri nasıldır?

a) Öğretmen adayları oran kavramına yönelik öğrenci düşüncelerini nasıl tanımlar?

b) Öğretmen adayları oran kavramına yönelik öğrenci düşüncelerini nasıl karşılaştırır?

c) Öğretmen adayları oran kavramına yönelik öğrenci düşünceleri hakkında nasıl çıkarım yapar?

d) Öğretmen adayları oran kavramına yönelik öğrenci düşüncelerini nasıl yeniden yapılandırır?

Bu çalışmanın öğretmen adaylarının öğrencilerin matematiksel fikirleri hakkında akıl yürütme yollarına ilişkin model oluşturma süreçlerini anlamaya yönelik sınırlı sayıdaki araştırmaya (Wilson ve diğerleri, 2011; Wilson ve diğerleri, 2013) katkı sağlayacağı düşünülmektedir. Alan yazında öğretmen veya öğretmen adaylarının oran, orantı ve orantısal akıl yürütüme becerilerini geliştirmeye yönelik çalışmaların büyük bir kısmının orantı ve orantısal akıl yürütme becerilerine odaklandıkları görülmüştür (örneğin, de la Cruz, 2016; Hines ve McMahon, 2005). Öğretmenlerin orantı ve orantısal akıl yürütmenin yapı taşı olan oran kavramının öğrencilerdeki gelişimini anlamaları da oldukça önemlidir (Lobato ve diğerleri, 2010). Bu çalışmada oran kavramına odaklanılarak alan yazındaki bu eksikliğin giderilmesine katkı sağlamak hedeflenmiştir.

YÖNTEM

Araştırma Deseni

Bu çalışma nitel araştırma yöntemlerinin kullanıldığı bir durum çalışmasıdır. Bu çalışmada incelenen durum ortaokul matematik öğretmen adaylarının öğrenci düşünme modelleri oluşturmaya ilişkin bireysel deneyimleri olarak tanımlanmıştır.

Çalışma Grubu

Bu çalışma 2021–2022 öğretim yılının bahar döneminde Ankara'daki büyük ölçekli bir devlet üniversitesinin ilköğretim matematik öğretmenliği lisans programının son sınıfında okumakta olan öğretmen adayları ile gerçekleştirilmiştir. Katılımcıların belirlenmesinde amaçlı örnekleme çeşitlerinden ölçüt örnekleme kullanılmıştır (Yıldırım ve Şimşek, 2013). Katılımcıların seçiminde öncelikle araştırmaya katılmaya gönüllü ve istekli olmaları temel alınmıştır. Ayrıca, katılımcıların fikirlerini rahatça paylaşabilen öğretmen adayları olmasına dikkat edilmiştir. Öğretmen adaylarının öğrenci düşünme modelleri oluşturma süreçlerinin ayrıntılı ve derinlemesine incelenebilmesi ve çalışma sonucunda elde edilen verilerin derin ve zengin olabilmesi için katılımcı sayısı dört öğretmen adayı ile sınırlı tutulmuştur. Çalışmada öğretmen adaylarının gerçek isimleri yerine takma isimler kullanılmıştır: Buket, Gizem, Şeyda ve Zehra. Buket, Gizem ve Şeyda lisans eğitimleri boyunca "Sayıların Öğretimi", "Matematik Öğretiminde Kavram Yanılgıları", "Cebir Öğretimi" gibi derslerde öğrenci düşüncesi üzerine çalıştıklarını ve öğretmenlik uygulaması dersi kapsamında ders planlarını olası öğrenci cevaplarını oluşturarak hazırladıklarını belirtmişlerdir. Öğretmen adaylarından sadece Buket'in özel ders tecrübesi bulunmamaktadır.

Araştırmanın Tasarımı ve Uygulanması

Bu araştırmada tasarlanan program, matematik öğretmen adaylarının PAB'ını özellikle öğrenci bilgisi boyutunda geliştirmeyi amaçlamaktadır. Bu bağlamda, hazırlanan eğitim programı, öğretmen adaylarının öğrencilerde oran kavramının gelişimine yönelik araştırma tabanlı bilgileri keşfetmelerini ve bu bilgiyi öğretim kararlarında etkili bir şekilde kullanabilmelerini amaçlamıştır. Çalışmanın teorik çerçevesini oluşturan BYÖ prensiplerinden ilham alınarak programın tasarımı yapılmıştır (Carpenter ve diğerleri, 1989). Öğretmen adaylarının araştırma tabanlı bilgilere doğrudan erişimini sağlamak yerine, görevler aracılığıyla deneyimler yaşayarak öğrenci düşünme yaklaşımlarını keşfetmelerini sağlayacak ortamlar oluşturulmuştur. Toplam beş oturumdan oluşan programda öğretmen adaylarına oran kavramına yönelik 10 matematiksel görev ve bunlara yönelik öğrenci cevapları sunulmuştur. Bu görevler ve öğrenci çözümleri öğrencilerde oran kavramının anlaşılmasına yönelik temel fikirlerin (Lobato ve diğerleri, 2010) incelenmesine fırsat sunacak şekilde alan yazından yararlanılarak oluşturulmuştur (Harel, Behr, Lesh ve Post, 1994; I, Martinez ve Dougherty, 2018; Lamon, 2012; Lobato, 2008; Lobato ve diğerleri, 2010; Lobato ve Thanheiser, 2002; Riehl ve Steinthorsdottir, 2014) (Tablo 1). Görevler ve öğrenci çözümleri matematik eğitimi ve orantısal akıl yürütme konularında çalışan dört uzman tarafından değerlendirilmiş ve önerileri dikkate alınarak yeniden düzenlenmiştir. Çalışmanın pilot aşaması üç öğretmen adayıyla gerçekleştirilmiştir. Pilot çalışma sonucunda, görevlerin anlaşılmayan kısımları düzeltilmiş, ardından bu alanda deneyimli bir ortaokul matematik öğretmeni tarafından yeniden gözden geçirilerek asıl uygulama için hazır hale getirilmiştir (Ek1'de belirtilmiştir).

Tablo 1. Oturumlarda Kullanılan Görevler ve Öğrenci Çözümleri

Oturumlar	İlgili Anlayış	Görev	Öğrenci Çözümleri
1. Oturum	Oran, iki niceliğe odaklanmayı ve eş zamanlı koordine etmeyi gerektirir.	1. Portakal/Su Karışım Problemi (Harel ve diğerleri (1994)'den uyarlanmıştır.)	Portakal/Su Karışım Problemi görevine yönelik, iki niceliğe odaklanan ve odaklanmayan öğrenci çözümleri sunulmuştur.

		2. Hız Problemi-1 (Lobato ve Thanheiser (2002)'den uyarlanmıştır.)	Hız Problemi-1 görevine yönelik, iki niceliğe odaklanan fakat eş zamanlı koordine edebilen ve edemeyen öğrenci çözümleri sunulmuştur.
2. Oturum	Oran, iki niceliğin çarpımsal karşılaştırmasıdır veya iki niceliğin birleşik bir birimde birleştirilmesidir.	3. Bay Uzun/ Bay Kısa Problemi (Riehl ve Steinthorsdottir, 2014) 4. Hız Problemi-2 (Lobato ve Thanheiser (2002)'den uyarlanmıştır.)	Bay Uzun/ Bay Kısa Problemi görevine yönelik, toplamsal akıl yürüten ve çarpımsal akıl yürüten öğrenci çözümleri sunulmuştur. Hız Problemi-2 görevine yönelik oranı oluşturan iki niceliği çarpımsal olarak karşılaştırarak ve çarpımsal bir ilişkiyi sürdürecek şekilde iki niceliği birleştirerek çarpımsal akıl yürüten öğrenci cevapları sunulmuştur.
3. Oturum	Gerçek dünya durumunu belirlemek için bir oran oluşturmak, bu durumun diğer özelliklerden nasıl farklılaştığını ve her bir değişkenin ilgili durum üzerindeki etkisini anlamayı içerir.	5. Rampa Problemi-1 (Lobato, 2008) 6. Rampa Problemi-2 (Lobato, 2008)	Rampa Problemi-1 görevine yönelik, rampanın eğimini rampanın diğer özelliklerinden ayırt edebilen ve edemeyen öğrenci cevapları sunulmuştur. Rampa Problemi-2 görevine yönelik, dikliği koruyacak şekilde yükseklik ve yatay uzunluğu birbirine bağlı olarak değiştirebilen ve değiştiremeyen öğrenci cevapları sunulmuştur.
4. Oturum	Oran, kesir olarak yeniden yorumlanabilir.	7. Limonata Problemi (Martinez ve Dougherty	Limonata Problemi görevine yönelik parça parça oranını parça bütün oranı olarak

		(2018)'den uyarlanmıştır.)	yorumlayabilen ve yorumlayamayan öğrenci cevapları sunulmuştur.
		8. Kahve Problemi Lobato ve diğerleri (2010)'den uyarlanmıştır.	Kahve Problemi görevine yönelik, kesir bilgisinden yararlanarak birleşik birimleri kullanan ve kesir bilgisinden yararlanmadan birleşik birimleri kullanan öğrenci cevapları sunulmuştur.
5. Oturum	Oran, bölüm olarak yeniden yorumlanabilir.	9. Pizza Problemi-1 (Lamon, 2012)	Pizza Problemi-1 görevine yönelik oranı bölüm olarak yorumlayan (bölmenin eş paylaşım anlamı) ve oranı bölüm olarak yorumlamadan cevap veren öğrenci çözümleri sunulmuştur.
		10. Pizza Problemi-2 (Lamon, 2012)	Pizza Problemi-2 görevine yönelik eş paylaşım kullanarak denk oranlar elde eden öğrenci çözümü sunulmuştur.

Öğretmen adaylarına sunulan eğitim her oturumda sadece bir temel anlayışa odaklanacak şekilde tasarlanmıştır. Her oturumda iki görev üzerine çalışılmıştır. Görevlerle ilgili öğretmen adaylarından şu adımları takip etmeleri istenmiştir: (a) sunulan probleme kendi çözümlerini üretmeleri, (b) olası öğrenci yöntem ve stratejilerini tahmin etmeleri, (c) sunulan öğrenci çözümlerindeki eylemleri ve ifadeleri açıklamaları, (d) kendi çözümleri ile öğrenci çözümleri arasındaki benzerlik ve farklılıkları belirlemeleri, (e) öğrenci çözümlerindeki kanıtları kullanarak öğrencinin nasıl düşündüğüne dair yorumda bulunmaları. Her oturumun sonunda, öğretmen adaylarına öğrencilerin akıl yürütme süreçleriyle ilgili araştırma tabanlı bilgiler sunulmuştur.

Veri Toplama ve Analizi

Çalışmanın verileri beş oturumdan elde edilen görüşmelerin kayıtlarından ve öğretmen adaylarının görevlere verdiği yazılı cevaplardan oluşmaktadır. Covid-19 salgını sebebiyle çevrimiçi yürütülen eğitimin oturumlarının süresi 120-200 dakika arasında değişiklik göstermiştir. Her oturumun sonunda görüşme kayıtları çözümlenmiştir. Elde edilen veriler betimsel analiz kullanılarak analiz edilmiştir. Veriler, öğretmen adaylarının öğrenci düşünme yollarını analiz etme süreçlerine (Tanımlama, Karşılaştırma, Çıkarım Yapma ve Yeniden Yapılandırma) göre kodlanmıştır. Tanımlama süreci için, öğretmen adaylarının öğrenci stratejilerine ve strateji içinde kullanılan matematiksel olarak önemli ayrıntılara dikkat ettiğine dair kanıt aranmıştır. Karşılaştırma süreci için, öğretmen adaylarının kendi eylemleri ile öğrencilerin çalışmaları arasındaki benzerlik ve farklılıkları belirlediğine dair kanıt aranmıştır. Çıkarım Yapma süreci için, öğretmen adaylarının yorumlarının öğrencilerin stratejileri ile tutarlı olduğuna ve matematiksel olarak mantıklı olduğuna dair kanıt aranmıştır. Yeniden Yapılandırma süreci için ise, öğretmen adaylarının öğrenci cevaplarını tahmin ederken ve bir problem veya soru ortaya koyarken öğrencilerin matematiksel anlayışlarını kullandığına dair kanıt aranmıştır.

Çalışmada araştırma sonuçlarının inandırıcılığını artırmak için, katılımcılarla uzun süreli etkileşim ve çeşitleme stratejileri kullanılmıştır (Merriam, 2013). Araştırmanın başından sonuna kadar araştırmacı (birinci yazar) ile öğretmen adayları arasında uzun süreli etkileşim sağlanmış ve düzenli tekrarlayan görüşmeler öğretmen adaylarının öğrenci düşünme modeli oluşturma süreçlerini inceleme fırsatı sunmuştur. Öğretmen adaylarının öğrenci düşünme bilgisi, yazılı yanıtlar aracılığıyla toplandıktan sonra odak grup görüşmeleri ile daha ayrıntılı bilgi elde edilmiştir. Kayıt altına alınan görüşmeler kelime kelime yazıya dökülmüş ve yazılı dokümanlardaki verilerle tutarlılık incelenmiştir. Aynı zamanda verilerin yüzde 20'si oran konusunda uzman farklı bir araştırmacı tarafından kodlanmış ve kodlayıcılar arasında %80 uyum elde edilmiştir (Miles ve Huberman, 1994). Çalışmanın transfer edilebilirlik derecesini değerlendirmek amacıyla araştırmanın katılımcıları amaçlı örnekleme yöntemiyle seçilmiş ve katılımcı belirleme ölçütleri ayrıntılı bir şekilde açıklanmıştır. Araştırmanın yapıldığı ortam, kullanılan yöntem ve veri toplama süreci detaylı bir biçimde anlatılmıştır. Araştırma sonuçlarını ayrıntılı bir şekilde ifade edebilmek için diyaloglar uzun alıntılar yapılarak sunulmuştur. Çalışmanın tutarlılığı için verilerin nasıl toplandığı ve analiz edildiği ayrıntılı bir şekilde açıklanmıştır. Tüm transkriptler iki kez kontrol edilmiştir. Kodlama sürecinde anlam kaymalarını önlemek amacıyla verilerle kodlar iki kez karşılaştırılmıştır. Araştırmanın doğrulanabilirliği için sonuçlar ve varılan çıkarımlar açıkça gösterilen verilerle ilişkilendirilmiştir (Merriam, 2013; Miles ve Huberman, 1994). Örneğin, öğretmen adaylarının öğrenci bilgisine dair yorumları görüşme ve belgelerden elde edilen alıntılarla desteklenmiştir.

BULGULAR

Bulgular araştırmanın her bir alt problemini cevaplayacak şekilde Wilson ve diğerleri (2011) tarafından tanımlanan süreçler (Tanımlama, Karşılaştırma, Çıkarım Yapma ve Yeniden Yapılandırma) temel alınarak dört başlık altında sunulmuştur.

Öğrenci Düşüncesini Tanımlama

Araştırmanın birinci alt problemi kapsamında elde edilen bulgular öğretmen adaylarının öğrenci sözlerini tekrar ederek, öğrenci çözümlerindeki önemli noktaları ifade ederek, öğrencinin çözüm yöntemini ayrıntılı bir şekilde açıklayarak veya öğrenci çözümünün genel özelliklerine odaklanarak öğrenci düşüncesini tanımladıklarını göstermiştir. Aşağıdaki alıntılarda, öğretmen adaylarının öğrenci düşüncesine odaklanırken öğrencilerin sözlerini tekrar ettikleri görülmektedir.

Gizem: Çünkü bir de sonunda da şey ifadesi kullanmış ya bardağın içine ne kadar su ve ne kadar portakal özü döktüğümüze bağlı olarak değişecektir diye. (1. Oturum, Portakal Suyu/ Su Karışım Problemi)

Zehra: Öğrencinin başladığı nokta benim çok hoşuma gitti. Hani diyor ki on saniyede aynı noktaya gelecekler. Hani o başlangıç noktası öğrencinin zaten hani dört saniyede aynı anda on metre yürümeleri gerekir diyor ya. (1. Oturum, Hız Problemi 1)

Buket: Mesela bir bardaktan yedi bölü dört fincan kahve olur demiş. (4. Oturum, Kahve Problemi)

Öğretmen adayları, tanımlama sürecinde öğrenci çözümlerinde sıklıkla önemli gördükleri noktalara odaklanmışlardır. Öğrencilerin oran düşüncesine dair oluşturdukları modellerin ilk aşamasında, öğretmen adaylarının önemli diye nitelendirdikleri gösterimlerin ya da açıklamaların etkili olduğu aşağıdaki örnekte görülmektedir.

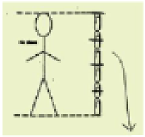
$$\frac{3 \quad +1}{2 \quad +1} = \frac{4}{3}$$

Şekil 1. Limonata Problemi Görevine Yönelik Parça Parça Oranını Parça Bütün Oranı Olarak Yorumlayamayan Öğrenci Cevabı

Zehra: Üç bölü ikiyi yazdığı için hani ben farkında (oran kavramının farkında) olduğunu söyleyebilirim ama Şeyda'nın da söylediği gibi sözel ifadelerde biraz eksik ya. Ama hani sadece üç bölü iki ben en azından farkında diyebilirim. (4. Oturum, Limonata Problemi)

Şekil 1'deki öğrenci, Limonata Problemi görevine verdiği cevapta orandaki 3 ve 2'ye 1 ekleyerek $\frac{4}{3}$ elde etmiştir. $\frac{4}{3}$, su ve limon suyu miktarlarının her bir maddeden birer bardak eklendikten sonra doğru oranı değildir. Öğrenci orandaki terimleri su ve limon suyunun gerçek miktarları gibi kullanmıştır. Ancak, öğrencinin $\frac{3}{2}$ oranını yazmasının, Zehra için önemli bir adımı (oranı a/b şeklinde gösterme) temsil ettiği ve öğrencinin düşüncesini tanımlama sürecinde etkili olduğu görülmektedir.

Öğretmen adaylarının tanımlama sürecinde nadiren de olsa öğrencinin probleme yaklaşımını öğrenci çalışmasındaki kanıtlarla ayrıntılı olarak açıkladığı görülmüştür. Aşağıda bir öğrencinin Bay Uzun/Bay Kısa Problemine verdiği cevap ve Buket'in bu öğrenci cevabına nasıl odaklandığı görülmektedir.



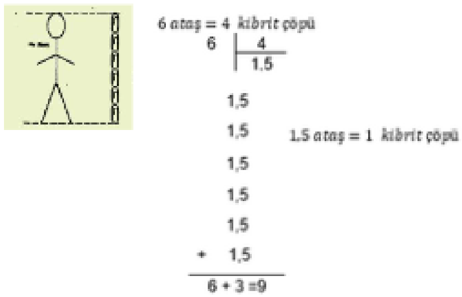
$$1\ kibrit\ \text{çöpü} = 1\,{}^{1}/_{2}\ ataş$$
$$2\ kibrit\ \text{çöpü} = 3\ ataş$$
$$6 + 3 = 9$$

Şekil 2. Bay Uzun/Bay Kısa Problemine Yönelik Birleşik Birimleri Kullanarak Oran Oluşturan Öğrenci Cevabı

Buket: İlk başta birim olarak bulmuş bir kibrit çöpü kaç ataşa denk gelir diye. Sonra iki kibrit çöpünün üç ataşa denk geldiğini bulmuş. Altı tane ataş zaten elinde vardı. İki kibrit çöpü uzunluğu daha uzun olduğu için Bay Uzun iki kibrit çöpü de üç ataşa denk geliyor. Altıyla üçü toplayıp dokuz bulmuş. (2. Oturum, Bay Uzun/Bay Kısa Problemi)

Şekil 2'deki gibi bir çözüm, toplam ataş sayısının, Bay Uzun'un fazladan 2 kibrit çöpünü hesaba katmak için ihtiyaç duyduğu ekstra ataş sayısını nasıl belirlediğini gösteren örneklerdendir. Öğrenci, şekil kullanarak birim oranı hesaplamış ve ardından, $\frac{6}{9}$ oranına ulaşmak için $\frac{2}{3}$ eşdeğer oranını orijinal oran olan $\frac{4}{6}$'ya eklemiştir. Yani, 6 kibrit çöpüne 9 ataştan oluşan yeni bir oran oluşturmak için eşdeğer oranları birleştirmiştir. Buket tanımlama sürecinde, kendi oran bilgisi dâhilinde öğrencinin çözüm aşamalarına ayrıntılı bir şekilde odaklanmıştır. Öğrencinin çalışmasından elde ettiği kanıtları (bir kibrit çöpüne karşılık gelen ataş sayısını bulması, ihtiyaç duyduğu iki kibrit çöpüne karşılık gelen ataş miktarını hesaplaması gibi) da kullanarak çözüm yöntemini açıklamıştır.

Öte yandan öğretmen adaylarının, çok az kanıta dayanarak veya belirgin bir kanıt olmadan öğrencinin probleme yaklaşımına yönelik tanımlamalar yaptığı durumlar da olmuştur. Aşağıdaki örnekte Zehra'nın, Bay Uzun/ Bay Kısa Problemine yönelik öğrenci çözümüne (Şekil 3) dair açıklamaları verilmiştir.



Şekil 3. Bay Uzun/Bay Kısa Problemi Görevine Yönelik Öğrenci Çözümü

Zehra: Çizdiği şekli hani işlemsel olarak ifade etmiş aslında. Hani bir buçuğa denk geliyor. Yanda da ataşları göstermiş. Zaten hani oranlamayı da yapmış… bir buçukları yazmış. Evet, biraz uzun olmuş. Hani pratikte sıkıntılı ama en azından görseli destekler nitelikte bir işlem yapmış. (2. Oturum, Bay Uzun/Bay Kısa Problemi)

Sunulan çözümünde öğrenci herhangi bir oran ifadesi veya gösterimi ($\frac{a}{b}$ veya a:b) kullanmamış olsa da 1,5 ataşa 1 kibrit çöpü birleşik birimini elde etmiş ve bu birimi tekrarlı toplayarak "6 kibrit çöpüne 9 ataş" doğru cevabına ulaşmıştır. Zehra açıklamasında kanıt olarak sadece öğrencinin 1,5 elde etmesini kullanmış ve diğer aşamalarla ilgili açıklama yapmadan çözüm yöntemini genel olarak değerlendirmiştir.

Öğrenci Düşüncesini Karşılaştırma

Araştırmanın ikinci alt problemi kapsamında elde edilen bulgular öğretmen adaylarının öğrencilerin çözümleri ile kendi çözümleri arasında açık veya örtük karşılaştırmalar yaptıklarını göstermiştir. Öğrenci çözümlerini aynı görevi çözen diğer öğrencilerin çözümleri ile karşılaştırdıkları da gözlenmiştir. Aşağıdaki alıntılarda öğretmen adaylarının öğrenci çözümü ile kendi veya diğer öğretmen adaylarının çözümleri arasında yaptıkları karşılaştırmalar görülmektedir.

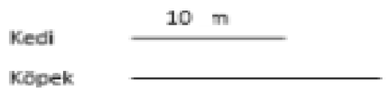
Gizem: Hiç on iki bardağı kullanmadan da bu soruyu çözen arkadaşlarımız vardı. O zaman hani yanlış bir yol muydu diye bir soru geliyor benim aklıma. O da değildi.

Sonuçta oran korunuyor… Hani illa on iki bardağı kullanması mı gerekiyor tadın değiştiğini yapmak için. Biz, öyle çözmeyen arkadaşlarım var. (4. Oturum, Limonata Problemi)

Buket: Bu öğrenci sadece işlemsel olarak odaklanmış gibi geldi bana. Üç bölü yani bizim normal yapmak istediğimizi aslında kendisi bölme olarak yapmış. Biz üç bölü sekiz şeklinde yapmıştık. (5. Oturum, Pizza Problemi 1)

Öğretmen adaylarının yaptığı açık karşılaştırmalarda çözüm yöntemlerinin bütün aşamalarını kapsayacak şekilde bir karşılaştırma örneğine rastlanmamıştır. Karşılaştırma süreci genellikle çözüm yöntemlerinin belirli veya önemli görülen aşamalarıyla sınırlı kalmış; öğretmen adayları öğrenci çözümleri ile kendi çözümleri arasındaki önemli benzerlikleri veya farklılıkları vurgulayarak karşılaştırmalarda bulunmuşlardır. Örneğin, Buket öğrencinin kendilerinden farklı olarak $\frac{3}{8}$ oranını 3:8 şeklinde göstermesine odaklanırken Gizem arkadaşlarının çözümü ile öğrenci çözümü arasındaki benzerliklere (parça-parça oranını kullanma, parça-bütün oranını kullanmama) işaret etmiştir. Bu karşılaştırmalarda öğretmen adaylarının kendi çözümleri ile öğrenci çözümleri arasındaki benzerlik ya da farklılıkları genel ifadeler kullanarak belirttikleri görülmektedir.

Öte yandan öğretmen adaylarının kendi çözümlerinden açıkça bahsetmeden öğrenci çözümü ile kendi çözümü arasında örtük bir karşılaştırma yaptıkları durumlar da gözlenmiştir. Aşağıdaki alıntıda Şekil 4'teki öğrenci çizimine yönelik araştırmacı (birinci yazar) ve Şeyda arasında geçen diyalog verilmiştir.



Şekil 4. Hız Problemi 1 Görevine Yönelik İki Niceliği Eş Zamanlı Koordine Edemeyen Öğrenci Çizimi

Araştırmacı: Görselle açıklayamaması neyin göstergesi olabilir? Ya da görselle açıklaması önemli mi?

Şeyda: ..hani şunu (öğrencinin yaptığı işlemler) yaptıktan sonra görsel olarak göstermesi gerekirdi aslında, gösterebilirdi ama gösterememiş ama sıkıntı değil. Çünkü bir işlemde paya ve paydaya aynı şeyi yapması gerektiğini görmüş en azından oranda. (1. Oturum, Hız Problemi 1)

Şekil 4'te Hız Problemi 1 görevine işlemsel olarak doğru cevap veren bir öğrencinin çözümünü desteklemek için çizdiği şekil görülmektedir. Öğrenci, "köpeğin yürüdüğü mesafenin 20 olmasını istiyorsak, 20 elde etmek için 10 ile 2'yi çarpmanız gerekir. 10 ile 2'yi çarptığınıza göre, 8 elde etmek için 4 ile 2'yi de çarpmanız gerekir'' şeklinde doğru bir açıklamada bulunmuştur. Ancak çiziminde zaman ve mesafenin neden iki katına çıkarılması gerektiğini veya iki ile çarpmanın nasıl temsil edilebileceğini gösterememiştir. Öğrencinin açıklamasını her iki niceliğe yönelik bir görselle destekleyememesi, hızın sabit kalması için yol ve zamanı birlikte değiştirmediğini göstermektedir. Ancak Şeyda, öğrencinin çözümünü görsel kullanarak açıklayamamasını görmezden gelerek öğrencinin oran bilgisine dair model oluşturma sürecinde kendisi gibi işlem yapmasını dikkate almıştır. Kendi çözümünde aynı hızı gösteren yol ve zaman değerleri üretmek için 10 metre ve 4 saniyenin katlarını almıştır. Ulaştığı değerlerden biri de 8 saniyede 20 metredir. Şeyda'nın öğrenci ile ilgili bu yorumu öğrencinin açıklamasından ziyade işlemlerine ve kendi çözümü ile olan benzerliklere odaklandığını göstermektedir. Şeyda kendi çözümünden açıkça bahsetmediği için bu karşılaştırma örtük olarak değerlendirilmiştir. Şeyda yaptığı bu örtük karşılaştırmada, öğrencinin hızın değişmemesi için yol ve zamanın birlikte değişmesi gerektiği anlayışına sahip olmadığını gözden kaçırmıştır.

Benzer şekilde, öğrencinin oran görevlerini çözerken $\frac{a}{b}$ şeklinde bir gösterim kullanmaması bazı öğretmen adaylarının model oluşturma sürecinde etkili olmuştur. Aşağıdaki alıntıda Gizem'in Bay Uzun/Bay Kısa Problemini birleşik birimleri kullanarak

(1 kibrit çöpüne 1,5 ataş karşılık geldiğini ifade edebilen) çözen fakat oranı kesir formunda yazmayan bir öğrenci çözümüne yönelik açıklaması verilmiştir.

Gizem: Ama burada kibrit çöpleriyle ataşları oranlamamış. Hani aynı cins birimleri kendi içlerinde aynı katı olduğunu söylemiş. Burada hani sistematik oransal bir şekilde yazmamış olsa bile çok işlemsel kalmış olsa bile… (2. Oturum, Bay Uzun/Bay Kısa Problemi)

Gizem'in bu öğrenci ile ilgili açıklamasında öğrencinin çözümünde oran bilgisinin kanıtı olarak (kibrit çöpü sayısı)/(ataş sayısı) şeklinde bir gösterim (sistematik oransal diye ifade ettiği) aradığını, bu da oran bilgisinin bölüm kullanarak karşılaştırma yapma ile sınırlı olduğunu göstermektedir. Gizem, bu düşüncesini "iki çokluğun bölünerek karşılaştırılması diyoruz ya mesela oran için. O karşılaştırmayı ben göremedim aslında" şeklinde yaptığı başka bir açıklamasında da ifade etmiştir (4. Oturum, Kahve Problemi). Gizem, görevlere yönelik cevaplarında problemdeki nicelikleri $\frac{a}{b}$ oranı şeklinde göstermiş ve öğrenci cevaplarını da bu gösterimin varlığı ya da yokluğuna göre değerlendirmiştir. Gizem kendi çözümünden açıkça bahsetmediği için bu karşılaştırması örtük olarak nitelendirilmiştir.

Bu karşılaştırma türlerine ek olarak öğretmen adaylarının, aynı probleme cevap veren öğrenci çözümlerini birbirleriyle karşılaştırarak öğrenci düşünme modelleri oluşturduğunu gösteren durumlar aşağıda verilmiştir.

Gizem: Diğer öğrenciler de iki niceliği karşılaştırmaya çalışmıştı. Evet hani bir oran da kurmaya çalışılmıştı. Ama bir bütünü oluşturan parçalar kendi içerisinde mi karşılaştırılmış yoksa o parçanın oluşturduğu bütünle mi kıyası oluşturulmuştu, oranları kurulmuştu. Onu çok anlayamamıştık. Bu öğrenci hem ikiye üç demiş ve bu iki bardak limonata için üç bardak su demesi parçanın parçayla karşılaştırılması ve ardından limon suyu iki bölü beş su, üç bölü beş. Bu da hani parça bütün karşılaştırması olarak hangi karşılaştırmaları yaptığını biliyoruz. (4. Oturum, Limonata Problemi)

Bu alıntıda Gizem'in sunulan öğrenci çözümlerindeki benzerlik veya farklılıkları kullanarak karşılaştırma yaptığı gözlenmiştir. Gizem Limonata Problemine yönelik parça-parça oranı ile parça-bütün oranını kullanan öğrenci çözümleri arasındaki farklara odaklanarak öğrencinin kesir bilgisinin parça-parça oranından parça-bütün oranına geçilebilmesini desteklediğini fark etmiştir.

Öğrenci Düşüncesi Hakkında Çıkarım Yapma

Araştırmanın üçüncü alt problemi kapsamında elde edilen bulgular öğretmen adaylarının öğrenci düşüncesine yönelik yaptıkları yorumları desteklemek için kanıtlar sağladıklarını veya herhangi bir kanıt kullanmadan çıkarımda bulunduklarını göstermiştir. Aşağıdaki diyalogda Şekil 5'teki öğrenci çözümüne yönelik Şeyda'nın yaptığı çıkarım ve öğrenci çalışmasındaki kanıtları kullanma şekli verilmiştir.

	K	E
	3:8	1:3
Çocukları eşitleriz;	3.(3:8)	8. (1:3)
	9:24	8:24

1 pizza daha fazla olur.

Bir kız 1/24 pizza daha fazla alır.

Şekil 5. Pizza Problemi 1 Görevine Yönelik Oran Kullanarak Cevap Veren Öğrenci Çözümü

Şeyda: Şeyi düşündüm. Üç bölü sekiz ya üç pizza, sekiz kişi var. O zaman bir kişiye ne kadar pizza düşer? Aynı şekilde bir bölü üç bir pizza üç kişi. Bir kişiye ne kadar pizza düşer? Burada oran kullandığını düşündüm. Üç bölü sekiz ve bir bölü üçte. (5. Oturum, Pizza Problemi 1)

Şekil 5'teki çözümde öğrenci, pizza sayısının kızların sayısına oranını ifade ederken $\frac{3}{8}$ gösterimi yerine 3:8 gösterimini kullanmıştır (benzer şekilde pizza sayısının erkek sayısına oranını $\frac{1}{3}$ yerine 1:3 olarak göstermiştir). Yukarıdaki alıntıda görüldüğü gibi Şeyda bu öğrencinin oran kullandığı yönünde bir çıkarımda bulunmuştur. Çıkarımını desteklemek için öğrencinin çözümündeki 3:8'in 3 pizzaya 8 kişinin karşılık geldiği anlamında kullanıldığı yorumunu yapmıştır (benzer şekilde 1:3, 1 pizzaya 3 kişinin karşılık geldiğini göstermektedir).

Bununla birlikte öğretmen adaylarının yaptıkları çıkarımlarda herhangi bir kanıt kullanmadığı durumlar da görülmüştür. Aşağıdaki alıntılarda Şeyda'nın öğrencilerin matematiksel olarak ne anladığına dair çıkarımları sunulmuştur.

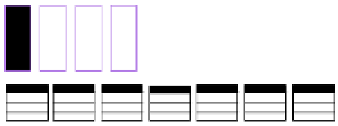
Şeyda: Birleşik oranlar şeklinde düşünmüş. Yani bir oransal düşünme var öğrencinin yaptığı çalışmada. Ama bu kat oranı değil de direkt birleşik oranlarla yapılmış ve başarılı olmuş.(3. Oturum, Rampa Problemi 2)

Şeyda: ...ama iyi bir kesir paylaştırma fikrinin farkında eş paylaştırma fikrinin. (5. Oturum, Pizza Problemi 2)

Yukarıdaki alıntılarda görüldüğü gibi Şeyda, Pizza Problemi 2'ye yönelik bir çözümde öğrencinin birleşik birimlerle akıl yürüttüğü, yani oran kavramını bildiği sonucuna varmıştır. Benzer şekilde Pizza Problemi 2'ye yönelik çözümde öğrencinin eş paylaştırma fikrine sahip olduğu çıkarımında bulunmuştur. Her iki yorumunda da yaptığı çıkarımlar doğrudur; fakat çıkarımlarını destekleyecek kanıt sağlamamıştır. Eş paylaştırma kullanan öğrenci birleşik birimleri kullanırken oranı kesir olarak yorumlamış ve denk oranlar elde etmiştir. Bu örnekte öğrencinin sadece eş paylaşım fikrine sahip olduğunu söylemek eksik bir çıkarım olmuş, öğrencinin oran bilgisi hakkında yorum yapma fırsatı sınırlanmıştır.

Bulgular öğretmen adaylarının bazı durumlarda öğrenci düşüncesini anlamakta zorlandıklarını veya yanlış çıkarımlarda bulunduklarını da göstermiştir. Aşağıdaki alıntılarda öğretmen adaylarının Şekil 6'daki öğrenci çözümüne yönelik çıkarımları verilmiştir.

4 su bardağından 7 fincan kahve yapılırsa, grubu 4 eşit parçaya böldüm. 4 bardağı dört eşit parçaya bölersek her parça 1 bardak olur. 7 fincanı dört eşit parçaya bölersek her parçayı dörde bölmemiz gerekir. Bu da 7 tane dörtte bir veya 7/4 demek. Yani 1 bardaktan 7/4 fincan kahve olur. 10 bardaktan 10. 7/4= 17 1/2 fincan kahve olur.



Şekil 6. Kahve Problemi Görevine Yönelik Kesir Bilgisini Kullanarak Birleşik Birimlerle Akıl Yürüten Öğrenci Cevabı

Gizem: Burada gene çok hani oran kurmuş mu? Bence çok göremiyoruz ya hani… Burada o birime ulaşmaya çalışmış… Biraz daha sanki kesir, orandan çok kesir kullanmış gibi hissediyorum ben. Hani mesela kesirlerle karıştırılmış olabilir. Sonuca doğru ulaşmış ama tam olarak böyle bir o iki niceliğin karşılaştırılması bölümlerin karşılaştırılması da tam olarak bir oran göremedim ben. (4. Oturum, Kahve Problemi)

Şeyda: Daha çok kesirlerde eş paylaştırma fikri var hani orandan ziyade o yüzden yoktur diyebiliriz oran. (4. Oturum, Kahve Problemi)

Zehra: Sayılar farklı gelseydi bu şekilde paylaştıramayabilirdi ve modellemeyi yapamadığından hani oran yapıp yapmadığını belki o zaman görebilirdik ama şu an net olarak oranı kullanmış diyemiyoruz. (4. Oturum, kahve Problemi)

Şekil 6'daki çözümde oranı birleşik birim olarak anlayan öğrenci, grubu ($\frac{7}{4}$ birleşik birimini) dört eşit parçaya bölerek (kesir bilgisini kullanarak) ve ardından grubun 10 katını alarak $17\frac{1}{2}$ fincan kahve doğru cevabına ulaşmıştır. Yani öğrenci birleşik birimler kullanarak oluşturduğu $\frac{7}{4}$ oranını, $\frac{7}{4}$ kesri olarak yorumlarken kesirlerin eş paylaşım anlamını dikkate almıştır. Alıntılardan anlaşılacağı üzere Gizem, Şeyda ve Zehra bu öğrenci hakkında oran bilgisine sahip olmadığı yanlış çıkarımına ulaşmıştır. Gizem ve Şeyda bu çıkarımlarını öğrencinin kesir veya kesirlerin eş paylaşım anlamını kullanmasına dayandırmıştır. Zehra ise problemdeki sayıların küçük olmasından dolayı modellemeyi yapabilen öğrencinin çözümünü oran kavramını anlamak için yeterli bulmamıştır. Öğretmen adaylarının yorumları, oran ve kesir arasındaki ilişkiyi net olarak göremediklerini göstermektedir. Bu yorumlarından sonra öğretmen adaylarına *"Oran ve kesir aynı mıdır?"* sorusu yöneltilmiş ve aşağıdaki cevaplar alınmıştır.

Şeyda: Her kesir bir orandır ama her oran bir kesir değildir. Mesela kesirlerde bizim gözettiğimiz şey parça bütün ilişkisi ama oranda parça parça ilişkisini de değerlendiriyoruz bazen. (4. Oturum)

Gizem: ...kesir aslında bence bir ifade biçimi. ...şey değil kesirin anlamı tamam bölme bölünme bölme işleminin anlamı o. Eşit parçalara ayırmak falan. Kesir de bir bölüm şeklinde yazış o bir ifade biçimi…Bence oran biraz daha özelleşmiş halidir. (4. Oturum)

Buket: Ben de Şeyda'ya katılıyorum… Ayrıca oran kesir gösterimi olarak da kullanılabilir. Pardon kesir, oran gösterimi olarak. (4. Oturum)

Zehra: ..Ortak durumları var ama tamamen aynı da değiller. Aynı olsalar birine kesir birine oran demezdik herhalde. Bir de öyle bir durum var. Kesiştikleri noktalar da var, ayrı oldukları noktalar da. (4. Oturum)

Görüldüğü üzere, Şeyda ve Buket kesirler oranların alt kümesidir fikrini savunurken Gizem oranlar kesirlerin alt kümesidir düşüncesini savunmuştur. Oran ve kesirlerle ilişkili her iki düşünce de yanlıştır. Sadece Zehra, oranlarla kesirlerin kesişen kümeler olduğunu iddia etmiş, ancak bu iddiasını desteklemek için yeterli bir argüman sunmamıştır. Bu açıklamalar, öğretmen adaylarının yanlış çıkarımlara varmalarının oran ve kesir kavramlarıyla ilgili mevcut bilgilerindeki eksikliklerin veya yanılgıların bir sonucu olduğunu göstermektedir.

Öğrenci Düşünce Modelini Yeniden Yapılandırma

Araştırmanın dördüncü alt problemi kapsamında elde edilen bulgular, öğretmen adaylarının tanımlamaları ve karşılaştırmaları kullanarak çıkarımlarda bulunduklarını ve edindikleri yeni bilgilerle mevcut şemalarını yeniden düzenleyerek öğrenci düşünmesi hakkındaki bilgilerini yeniden yapılandırdıklarını göstermiştir. Oturumlar boyunca öğretmen adaylarının yeniden yapılandırılmış bilgileri, öğrenci düşünmesini tahmin etme ve yorumlama şekillerinde görülmüştür. Aşağıda öğretmen adaylarının öğrenci düşünme yollarını tahmin etmelerine yönelik açıklamaları verilmiştir.

Şeyda: İkinci çözümde biraz daha öğrenci gibi düşünmeye çalıştım. Bir, biraz daha hızlı bir çözümdü. Ama ikide dedim hani öğrenci bu kadar hızlı düşünebilir mi? İkinci çözümü biraz ona yönelik yaptım. (2. Oturum, Bay Uzun/ Bay Kısa Problemi)

Gizem: Yani normalde direkt ikinci yoldan çözerdim hiç düşünmeden. Ama şimdi çocuk olsam nasıl düşünürüm diye düşünerek de biraz cevap vermeye çalıştım. (2. Oturum, Hız problemi 2)

Buket: Evet ilk başta ben yapsaydım burada içler dışlar çarpımı yapardım. Ama öğrenci gibi düşününce belki oran tablosunu kullanabileceğini düşündüm, oradan gittim. (4. Oturum, Kahve Problemi)

Bu açıklamalarda, öğretmen adayları görevlere cevap verirken sundukları birden fazla çözüm yolundan hangisinde öğrenci gibi düşünmeye çalıştıklarını ifade etmişlerdir. Şeyda'nın "daha hızlı bir çözüm" olarak değerlendirdiği yöntem, iki nicelik arasında çarpımsal karşılaştırma yaparak oran oluşturduğu bir çözümdür. Öğrenci gibi düşünmeye çalıştığı çözümde ise birleşik birimleri kullanarak oran oluşturmuş ve çözümünü destekleyecek bir şekil çizmiştir. Gizem ise "hiç düşünmeden kullanırım" diye sunduğu ikinci çözümde orantı kurmuştur. Öğrenci gibi düşünmeye çalıştığı çözümde ise Şeyda'ya benzer şekilde birleşik birimlerle düşünmüş ve çözümünü destekleyecek şekiller çizmiştir. Buket de Gizem gibi kendi çözümünde orantı kullanmayı tercih edeceğini ancak öğrenci gibi düşündüğü için oran tablosu oluşturmayı tercih ettiğini belirtmiştir. Bu örnekte öğretmen adayları yeniden yapılandırdıkları öğrenci düşünme modellerini öğrencilerin oran problemlerine ilişkin matematiksel düşüncelerini veya eylemlerini tahmin etmek için kullanmışlardır.

Öğretmen adaylarının mevcut öğrenci bilgilerini yeniden yapılandırdığı durumlar potansiyel olarak faydalı bir problem veya soru ortaya koydukları zamanlarda da görülmüştür. Aşağıdaki alıntılarda Şeyda'nın öğrencilerin verdikleri cevaplara göre önerdiği soru/ probleme ilişkin açıklamaları verilmiştir.

Şeyda: Burada şöyle bir soruyla yönlendirilebilir. Hani otuz metre çizebileceğin bir metre. Bunun için böyle bir şey çizebildin. Peki ben bunu sana otuzla değil de üç yüz metrede sorsaydım. Nasıl bir strateji geliştirirdin? Çocuk o zaman artık buradan bir ilişki fark etmesi gerektiğini fark edecektir. (2. Oturum, Hız Problemi 2)

Şeyda: Bu örnekte öğrenci yine iki niceliğe odaklanmak yerine tek niceliğe odaklandığı için yani eğim kavramını bilmemekten dolayı değil oran kavramını bilmemekten dolayı sıkıntı yaşamış. Eğer bu hani aynı eğime sahip iki farklı uzunlukta rampa verilerek aradaki işte oran mesela üç bölü dörtle altı bölü sekiz iki rampa verilerek bu yanılgı giderilebilir diye düşünüyorum. Aynı üçgen içerisinde değil de iki farklı rampada gösterilebilir. (3. Oturum, Rampa Problemi 1)

Şeyda ilk açıklamasında Hız Problemi 2 görevini yeniden düzenleyerek daha zor bir sayı ile sunmayı önermiştir. Burada Şeyda daha önceki problemlerde yer alan sayıların küçük olmasından dolayı öğrencilerin modelleme yapmakta zorlanmadıkları, bu yüzden birleşik birimleri kullanmayı tercih ettikleri bilgisini kullanmıştır. Sunduğu problem öğrencilerin çözüm yöntemini yeniden incelemelerini ve kullandıkları yöntemin her zaman verimli olmayabileceğini fark etmelerini istediğini göstermektedir. Önceki çıkarımlarına dayanarak oranı oluşturan nicelikler arasındaki ilişkiyi görmenin daha önemli bir adım olduğunun farkında olduğu görülmektedir. Şeyda'nın bu görevi önermesi, öğrencilerin oran bilgisine ve modelleme konusundaki yeteneklerine dayandığı için yeniden yapılandırmayı göstermektedir. Şeyda ikinci açıklamasında ise Rampa Problemi 1 görevine benzer fakat farklı sorular sorabileceği bir görev önermiştir. Bu örnekte, Şeyda mevcut öğrenci bilgisini yeniden yapılandırmak için öğrencinin tek nicelikle akıl yürüttüğü hakkındaki çıkarımını kullanmıştır. Öğrencilerin oran oluşturmak için iki niceliğe odaklanmaları gerektiği bilgisini kullanarak farklı büyüklükte ancak aynı eğime sahip ($\frac{3}{4}$ ve $\frac{6}{8}$ denk oranlarını kullanarak) iki farklı rampa örneği kullanmayı öğrenciler için daha uygun bulduğu anlaşılmaktadır. Bu örnekler, yeniden yapılandırma sürecinde

Şeyda'nın oluşturduğu öğrenci düşünme modelinin faydalı bir problem sunmaya olan katkısını göstermektedir.

TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada araştırma tabanlı öğrenci bilgisini merkeze alan hizmet içi/öncesi eğitim programları ile ilgili çoğu araştırmadan farklı olarak öğretmen adaylarının öğrenci bilgisindeki değişikliklerin sonuçlarından ziyade bu değişikliklerin nasıl oluştuğu üzerinde durulmuştur. Bu amaçla öğretmen adaylarının öğrenci düşünmesini Tanımlama, Karşılaştırma, Çıkarım Yapma ve Yeniden Yapılandırma olmak üzere dört farklı şekilde tanımlayan Wilson ve diğerleri (2011)'nin modeli kullanılmıştır. Çalışma boyunca öğretmen adayları öğrenci düşüncesini tanımlayarak ve/veya karşılaştırarak öğrenci düşünmesi hakkında çeşitli çıkarımlarda bulunmuş ve öğrenci düşünmesini öngörmek veya öğrenci düşüncesini dikkate alan bir problem ortaya koymak için oluşturdukları modeli kullanmıştır. Öğretmen adayları, öğrenci sözlerini tekrar ederek, çözümlerdeki önemli noktaları ifade ederek, çözüm yöntemlerini açıklayarak veya genel çözüm özelliklerine odaklanarak öğrenci düşüncesini tanımlamıştır. Özellikle, oran anlayışıyla ilgili önemli gördükleri ayrıntılara odaklanmışlardır. Bu bulgu, öğretmen adaylarının yorumlarında öğrenci düşüncesini yüzeysel olarak doğru ve yanlış şekilde tanımladıklarını ortaya koyan diğer çalışmaların (Crespo, 2000; Didis, Erbas, Cetinkaya, Cakiroglu ve Alacaci, 2016) bulgularından farklılık göstermektedir. Bunun nedeni çalışmaya katılan öğretmen adaylarının BYÖ temelli eğitim programındaki görevler sayesinde öğrencilerde oran kavramının gelişimine yönelik araştırma tabanlı bilgileri keşfetmelerine olanak sağlayacak deneyimler yaşamaları olabilir.

Karşılaştırma sürecinde öğrencilerin çözümleri ile öğretmen adaylarının kendi çözümleri arasında yaptıkları açık veya örtük karşılaştırmalar, kendi veya diğer öğretmen adaylarının düşüncelerine dayanmıştır. Öğretmen adayları öğrenci çözümleri ile kendi çözümleri arasındaki benzerlik ve farklılıkları ifade ederken çözüm yönteminin bütün aşamalarını karşılaştırmak yerine önemli gördükleri noktaları karşılaştırma eğiliminde olmuştur. Bazı öğretmen adaylarının oran anlayışı, çoğu ders kitabında bulunan 'iki çokluğun bölünerek karşılaştırılması' tanımına dayanmaktadır. Bu öğretmen adaylarının karşılaştırma sürecinde, öğrencilerin oranı kesir şeklinde (kendi gibi) ifade edip etmedikleri önemli bir etken olmuştur. Ancak, öğrencilerin a/b veya a ÷ b şeklinde ifadeler yazması, zihinsel olarak a ve b arasında bir oran oluşturduğuna dair herhangi bir garanti vermediği gibi bölme işlemi yapmadan veya kesir oluşturmadan oran oluşturmak da mümkündür (Lobato ve diğerleri, 2010). Bu bulgu, öğretmen adaylarının öğrenci düşünmesi hakkındaki bilgilerinin kendi deneyimleri ve diğer öğretmen adaylarının deneyimleri ile sınırlı olduğunu gösteren araştırmaların bulguları ile paralellik göstermektedir (Wilson ve diğerleri, 2011; Wilson ve diğerleri, 2013).

Öte yandan bu çalışmada Wilson ve diğerleri (2011)'nin çerçevesinden farklı olarak öğretmen adaylarının karşılaştırma sürecinde aynı göreve cevap veren diğer öğrencilerin düşünme biçimlerini karşılaştırarak çözüm yöntemlerindeki benzerlik ve farklılıklara odaklandıkları görülmüştür. Bu bağlamda sunulan öğrenci çözümlerinin çeşitliliği ve niteliği, öğretmen adaylarının öğrencilerin matematiksel düşüncelerine ilişkin anlayış oluşturmalarına yardımcı olmuştur. Özellikle ilgili temel fikirlere sahip olan ve olmayan öğrenci çözümlerini karşılaştırmak öğretmen adaylarının öğrenci düşünme modelleri oluşturma süreçlerini desteklemiştir. Ayrıca edindikleri bilgiler doğrultusunda tahmin ettikleri öğrenci çözüm süreçlerinin araştırma tabanlı çözüm süreçleri ile uyumlu olması öğretmen adayları için motive edici bir faktör olmuştur. Bu bulgular, öğretmen adaylarının üniversite eğitimleri süresince öğrenci düşüncesini inceleyebilmeleri için uygun ortamların yaratılmasının ve deneyimlerinin artırılmasının önemini göstermektedir.

Ayrıca, Wilson ve diğerleri (2011)'nin çerçevesinden farklı olarak öğretmen adaylarının öğrenci düşünme biçimlerine yönelik eksik/hatalı çıkarımlarda bulundukları gözlenmiştir. Bu bulgu, öğrenci düşüncesinin arkasında yatan mantığı anlamayan öğretmenlerin eksik/yanlış çıkarımlarda bulunabileceklerini ortaya koyan Didis ve diğerleri (2016)'nin bulguları ile uyumludur. Öğretmen adaylarının öğrenci düşüncesiyle ilgili eksik çıkarımları, öğrenci çözüm kâğıtlarında öğrencilerin açık olmayan veya eksik ifadeleriyle ilişkilendirilebilir. Ayrıca, öğretmen adaylarının oran kavramıyla ilgili eksik/yetersiz bilgileri, yanlış çıkarımlarda bulunmalarına neden olmuş olabilir. Özellikle oranın kesir ve bölüm anlamı ile ilgili bilgilerinin eksik/hatalı olması öğretmen adaylarının öğrenci düşüncesini yorumlama becerilerini engellemiştir. Bu bulgu, öğretmen adaylarının oran ve kesir kavramlarıyla ilgili kafa karışıklığı yaşadıklarını saptayan Johnson (2017)'nin bulguları ile benzerdir. Güçlü bir alan bilgisine sahip olmak, öğretmen adaylarının öğrencilerin düşüncelerini tespit etmesini kesin bir şekilde sağlamasa da zorunlu bir önkoşuldur (Bartell, Webel, Bowen ve Dyson, 2013). Ayrıca diğer çalışmalarda rapor edildiği gibi (örneğin, de la Cruz, 2016) araştırma tabanlı öğrenci bilgisi öğretmen adaylarının pedagojik alan bilgilerini hem öğrenci bilgisi hem de alan bilgisi boyutlarında desteklemiştir. Bu bulguların yanı sıra öğretmen adayları çalışma boyunca öğrencilerin oran bilgisine dair çeşitli akıl yürütme biçimlerine maruz kalsalar bile bazıları öğrenci çözümlerinde yüzeysel kanıtlar (gösterim biçimleri gibi) aramaya devam etmiştir. Öğrencilerin matematiksel düşünmeleri ile ilgili anlayış geliştirmek değişim için bir temel sağlamıştır, ancak değişimin meydana gelmesi ve sürekli olması için öğretmen adaylarının yeni bilgilerini uygulamaya çalışmaları gerekmektedir (Franke ve Kazemi, 2001).

Öğrenci düşünmesini öngörme, öğretmen adaylarının öğrenci bilgilerini yeniden yapılandırdıklarını gösterse de Wilson ve diğerleri (2011)'nin sonuçlarına benzer şekilde yeniden yapılandırma süreci diğer süreçlere kıyasla daha seyrek gözlenmiştir. Bu sonuçlar, öğretmen adaylarının bilgiyi anlamlı bir şekilde yapılandırabilmeleri için öğrenci düşünme modelinin neden ve nasıl işe yaradığını kendi öğretim uygulamaları bağlamında araştırmaları gerektiğini göstermektedir (Carpenter ve Levi, 2000). Öğretmen adaylarının öğretime yönelik uygulama ve deneyimleri (ders planlama, işleme vb.) bu çalışmanın kapsamında değildir. Bu nedenle bu çalışmanın öğretmen adaylarına öğrenci düşünmesi hakkında kendi teorilerini oluşturmak ve test etmek için bir başlangıç noktası sağladığı söylenebilir.

ÖNERİLER

Bu çalışmada öğretmen adaylarının öğrenci düşünmesine yönelik model oluşturma süreçleri önceki araştırmalarda (Wilson ve diğerleri, 2011; Wilson ve diğerleri, 2013) ortaya konan süreçler ile benzerlik göstermektedir. Ancak bu çalışma, öğretmen adaylarının oran görevleri ve öğrenci düşünme biçimleri üzerinde çalışma uygulamaları ile sınırlıdır. Özellikle Yeniden Yapılandırma süreci öğretmen adaylarının öğretim uygulamalarında daha detaylı gözlenebilir. Bu sebeple öğretmen adaylarının edindikleri bilgileri öğretim uygulamalarına nasıl yansıttıkları ileriki çalışmalarda ele alınabilir. Ayrıca bu çalışmada öğretmen adaylarının PAB'ları özellikle öğrenci bilgisi boyutu açısından ele alınmıştır. Gelecek araştırmalar öğretmen adaylarının model oluşturma süreçlerini PAB'ın diğer boyutları ile birlikte ele alabilir.

KAYNAKLAR

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special?

Bartell, T. G., Webel, C., Bowen, B., & Dyson, N. (2013). Prospective teacher learning: recognizing evidence of conceptual understanding. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *16*, 57-79.

Carpenter, T. P., Fennema, E., & Franke, M. L. (1996). Cognitively guided instruction: A knowledge base for reform in primary mathematics instruction. *The Elementary School Journal, 97*(1), 3-20.

Carpenter, T. P., Fennema, E., Peterson, P. L., Chiang, C.-P., & Loef, M. (1989). Using knowledge of children's mathematics thinking in classroom teaching: An experimental study. *American Educational Research Journal, 26*(4), 499-531.

Carpenter, T. P., & Levi, L. (2000). Developing Conceptions of Algebraic Reasoning in the Primary Grades. Research Report.

Clement, D., & Sarama, J. (2004). Learning Trajectories in Mathematics Education. *Mathematical Thingking and Learning, 6*(2), 81-89. In.

Clements, D. H., Sarama, J., Spitler, M. E., Lange, A. A., & Wolfe, C. B. (2011). Mathematics learned by young children in an intervention based on learning trajectories: A large-scale cluster randomized trial. *Journal for Research in Mathematics Education, 42*(2), 127-166.

Crespo, S. (2000). Seeing more than right and wrong answers: Prospective teachers' interpretations of students' mathematical work. *Journal of Mathematics Teacher Education, 3*(2), 155-181.

de la Cruz, J. A. (2016). Changes in One Teacher's Proportional Reasoning Instruction after Participating in a CGI Professional Development Workshop. *Universal Journal of Educational Research, 4*(11), 2551-2567.

Didis, M. G., Erbas, A. K., Cetinkaya, B., Cakiroglu, E., & Alacaci, C. (2016). Exploring prospective secondary mathematics teachers' interpretation of student thinking through analysing students' work in modelling. *Mathematics Education Research Journal, 28*, 349-378.

Franke, M. L., & Kazemi, E. (2001). Learning to teach mathematics: Focus on student thinking. *Theory into practice, 40*(2), 102-109. Retrieved from http://faculty.washington.edu/ekazemi/theory%20into%20practice.pdf

Harel, G., Behr, M., Lesh, R., & Post, T. (1994). Invariance of ratio: The case of children's anticipatory scheme for constancy of taste. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(4), 324-345. Retrieved from http://www.jstor.org/stable/749237 .

Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualizing and Measuring Teachers' Topic-Specific Knowledge of Students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(4), 372-400. doi:10.5951/jresematheduc.39.4.0372

Hines, E., & McMahon, M. T. (2005). Interpreting middle school students' proportional reasoning strategies: Observations from preservice teachers. *School Science and Mathematics, 105*(2), 88-105.

I, J. Y., Martinez, R., & Dougherty, B. (2018). Misconceptions on part-part-whole proportional relationships using proportional division problems. *Investigations in Mathematics Learning, 12*(2), 67-81. doi:10.1080/19477503.2018.1548222

Ivars, P., Fernández, C., Llinares, S., & Choy, B. H. (2018). Enhancing noticing: Using a hypothetical learning trajectory to improve pre-service primary teachers' professional discourse. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 14*(11), em1599.

Johnson, K. (2017). *A Study of Pre-Service Teachers Use of Representations in Their Proportional Reasoning.* Paper presented at the Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Indianapolis, IN: Hoosier

Lamon, S. J. (2012). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding: Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers* (3 ed.). New York, NY: Taylor & Francis Group.

Liang, B. (2021). *Learning about and learning from students: Two teachers' constructions of students' mathematical meanings through student-teacher interactions.* [University of Georgia, Retrieved from https://esploro.libs.uga.edu/esploro/outputs/doctoral/Learning-about-and-learning-from-students/9949375152802959#file-0

Lobato, J. (2008). When Students Don't Apply the Knowledge You Think They Have, Rethink Your Assumptions about Transfer. In M. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), *Making the Connection* (pp. 289-304): Washington, DC: Mathematical Association of America.

Lobato, J., Ellis, A., & Zbiek, R. M. (2010). *Developing Essential Understanding of Ratios, Proportions, and Proportional Reasoning for Teaching Mathematics: Grades 6-8*: ERIC.

Lobato, J., & Thanheiser, E. (2002). Developing understanding of ratio as measure as a foundation for slope. In B. Litwiller (Ed.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions: 2002 yearbook* (pp. 162-175): National Council of Teachers of Mathematics.

Martinez, R., & Dougherty, B. (2018). Misconceptions on part-part-whole proportional relationships using proportional division problems.

Merriam, S. B. (2013). *Nitel araştırma: Desen ve uygulama için bir rehber* (3. Basım). Ankara: Nobel akademik yayıncılık.

Miles, M. B., & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis: An expanded sourcebook*: sage.

Pişkin Tunç, M. (2016). *Pre-service middle school mathematics teachers' proportional reasoning before and after a practice based instructional module* (DOCTOR). Middle East Technical University, Retrieved from http://etd.lib.metu.edu.tr/upload/12620187/index.pdf

Richardson, K., Miller, S. D., & Reinhardt, J. (2019). Professional Development as an Ongoing Partnership: The Sum Is Greater than Its Parts. *School-University Partnerships, 12*(1), 45-50.

Riehl, S. M., & Steinthorsdottir, O. B. (2014). Revisiting Mr. Tall and Mr. Short. *Mathematics Teaching in the Middle School, 20*(4), 220-228. doi:https://doi.org/10.5951/mathteacmiddscho.20.4.0220

Sarama, J., Clements, D. H., Wolfe, C. B., & Spitler, M. E. (2016). Professional development in early mathematics: Effects of an intervention based on learning trajectories on teachers' practices. *Nordic Studies in Mathematics Education, 21*(4), 29-55.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(2), 114-145.

Simon, M. A., & Blume, G. W. (1994). Mathematical modeling as a component of understanding ratio-as-measure: A study of prospective elementary teachers. *The Journal of Mathematical Behavior, 13*(2), 183-197.

Sztajn, P., Wilson, P. H., Edgington, C., & Confrey, J. (2011). Learning Trajectories and Key Instructional Practices. *North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*.

Wilson, P. H., Lee, H. S., & Hollebrands, K. F. (2011). Understanding prospective mathematics teachers' processes for making sense of students' work with technology. *Journal for Research in Mathematics Education, 42*(1), 39-64.

Wilson, P. H., Mojica, G. F., & Confrey, J. (2013). Learning trajectories in teacher education: Supporting teachers' understandings of students' mathematical thinking. *The Journal of Mathematical Behavior, 32*(2), 103-121.

Yıldırım, A., & Şimşek, H. (2013). Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri.(9. Genişletilmiş Baskı) Ankara: Seçkin Yayınevi.

SUMMARY

Purpose

This study examines how and in what ways prospective middle school mathematics teachers who participated in a training program based on research-based student knowledge developed student thinking. The training program aimed to enable pre-service teachers to explore the development of students' concept of ratio through research-based knowledge and use it effectively in their teaching decisions.

Method

This qualitative study was conducted in the spring semester of the 2021-2022 academic year with four prospective teachers in the last year of the undergraduate program of elementary mathematics teaching at a state university in Ankara. Participants were selected through purposive sampling. The program consisted of five sessions in which pre-service teachers were presented with 10 mathematical tasks related to ratios and student responses to these tasks. These tasks and student responses were taken from the literature and aimed to understand the basic ideas about the concept of ratio (Lobato, Ellis, & Zbiek, 2010). The study's data were coded according to the processes (Defining, Comparing, Inferring, and Reconstructing) through which prospective teachers examine student thinking (Wilson, Lee, & Hollebrands, 2011).

Findings

Throughout the study, it was observed that prospective teachers made various inferences by describing and/or comparing student thinking and used the model they created to predict student thinking or to pose a problem that takes student thinking into account. The prospective teachers described the students' remarks by repeating them, expressing important points, explaining the solution methods, or focusing on general solution features. They made explicit or implicit comparisons between their and students' solutions. The prospective teachers also compared other students' thinking to the same task. They made inferences about student thinking based on the evidence they obtained in the identification and comparison processes and rarely used evidence about student thinking. In addition, prospective teachers sometimes made incomplete or incorrect inferences about student thinking. They could reconstruct their knowledge of student thinking by reorganizing their schemas with the new information they acquired. During the sessions, their reconstructed knowledge was seen in predicting student thinking and posing problems or questions that consider student thinking.

Discussion and Conclusion

The findings show that the prospective teachers' constructed models were consistent with the framework defining four processes for constructing student thinking models: Describing, Comparing, Inferring, and Reconstructing (Wilson et al., 2011). At the defining stage, they focused on the details they considered necessary about the concept of ratio. This finding differs from the findings of other studies (Crespo, 2000; Didis et al., 2016), which have shown that teacher candidates superficially defined student thinking as right or wrong in their interpretations. This may be because the prospective teachers who participated in the study had the opportunity to explore research-based knowledge about the development of students' concept of ratio through the training program. In the comparison phase, the prospective teachers focused on the similarities and differences in the solution methods by comparing the thinking of other students responding to

the same task. In this context, the variety and quality of the student solutions presented helped them to understand students' mathematical thinking. It was also observed that the prospective teachers made incomplete or incorrect inferences about student thinking. This result suggests that teachers who do not understand the logic of student thinking may make incomplete or incorrect inferences, which is in line with the results of Didiş et al. (2016). Anticipating student thinking and posing a potentially valuable problem or question suggests that prospective teachers restructure student knowledge. However, the restructuring process occurs less frequently compared to the other processes. In line with these results, we can say that this study provides a baseline for prospective teachers to start constructing and testing student thinking.

ORCID

Sultan Yıldırım ORCID 0000-0002-7445-3438

İffet Elif Yetkin Özdemir ORCID 0000-0001-8784-0317

Araştırmacıların Katkı Oranı Beyanı

Bu çalışmanın planlanması, yürütülmesi ve yazılı hale getirilmesinde araştırmacılar eşit oranda katkı sağlamıştır.

Destek ve Teşekkür Beyanı

Bu araştırmada herhangi bir kurum, kuruluş ya da kişiden destek alınmamıştır.

Çatışma Beyanı

Araştırmacıların, araştırma ile ilgili diğer kişi ve kurumlarla herhangi bir kişisel ve finansal çıkar çatışması yoktur.

Etik Kurul Beyanı

Bu araştırmanın verileri öğretmen adayları ve öğrencilerden toplandığı için etik kurul izni gerektirmektedir. Araştırma, Hacettepe Üniversitesi Etik Komisyonu'nun 08 Haziran 2021 tarihli E-35853172-300-00001610808 sayılı kararı ile alınan izinle yürütülmüştür.

Ekler

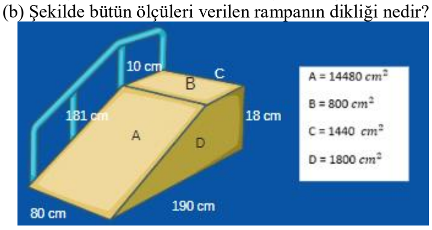
1. Portakal/Su Karışım Problemi
Bir şişe portakal suyunun içinde 40 ml su ve 24 ml portakal özü bulunmaktadır. 8 ve 4 ml'lik bardaklara bu portakal suyundan doldurulmuştur. Bardaklardaki portakal suyunun tadına bakıldığında;
a) İki bardaktaki portakal suyunun tadı aynı olur mu? Lütfen nedenini söyleyiniz.
b) Cevabınız hayır ise, hangisinin daha çok portakal tadına sahip olduğunu söyleyiniz. Lütfen gerekçenizi açıklayınız.

2. Hız Problemi 1
Bir simülasyon programı aracılığıyla iki karakter (kedi ve köpek) yan yana yürüyebilmektedir. Pati'nin 10 metre uzunluğundaki bir yolu 4 saniyede yürüdüğü biliniyor. Asil' in Pati ile aynı hızda yürüdüğünü gösteren,
(a) Olabildiğince çok yol ve zaman değeri üretiniz. Bu değerleri bir tabloda gösteriniz ve gerekçelerinizi açıklayınız.
(b) Cevabınızı açıklamak için bir resim çiziniz.

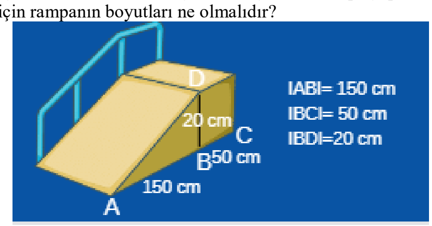
3. Bay Uzun/Bay Kısa Problemi
Resimde Bay Kısa' nın ataşlarla ölçülen boyunu görebilirsiniz. Bay Kısa' nın, Bay Uzun isimli bir arkadaşı var. Boylarını kibrit çöpleriyle ölçtüğümüzde Bay Kısa' nın boyu 4 kibrit çöpü ve Bay Uzun' un boyu 6 kibrit çöpü gelmektedir. Buna göre Bay Uzun için kaç ataş gerekiyor?

4. Hız Problemi 2
Bir simülasyon programı aracılığıyla iki karakter (kedi ve köpek) yan yana yürüyebilmektedir. Kedinin 10 metre uzunluğundaki bir yolu 4 saniyede yürüdüğü biliniyor. Köpeğin kedi ile aynı hızda yürüyebilmesi için,
(a) 30 m uzunluğundaki yolu kaç saniyede yürümesi gerekir?
(b) 1 saniyede kaç m yol yürümesi gerekir?

5. Rampa Problemi 1
Tekerlekli sandalyeler için rampalar yapan bir şirkette çalıştığınızı düşünün. Şirketinizin oluşturduğu her rampa modelinin dikliğini ölçmeniz veya hesaplamanız gerekiyor.
(a) Herhangi bir tekerlekli sandalye rampasının ne kadar dik olduğunu anlamak için nasıl bir yöntem geliştirirsiniz?
(b) Şekilde bütün ölçüleri verilen rampanın dikliği nedir?



6. Rampa Problemi 2
Tekerlekli sandalyeler için rampalar yapan bir şirkette çalıştığınızı düşünün. Şirketin ürettiği aşağıdaki şekilde görülen rampalar 20 cm yükseklik için uygundur. Ancak bir müşteri 30 cm yüksekliğe ulaşan bir tekerlekli sandalye rampasına ihtiyacı olduğunu söylemektedir. Bu rampa ile aynı diklikte ama 30 cm ye ulaşan yeni bir rampa yapmak için rampanın boyutları ne olmalıdır?



7. Limonata Problemi
Eray, Bülent'inkiyle (2 bardak limon suyu için 3 bardak su) tamamen aynı tada sahip 12 bardak miktarında limonataya sahiptir. Limonatasına bir bardak su ve bir bardak daha limon suyu ekliyor. Limonatasının tadı hala aynı mıdır? Aynıysa neden aynıdır ya da aynı değilse neden aynı değildir?

8. Kahve Problemi
Demet'in 7 fincan kahve yapabilmesi için tam olarak 4 bardak suya ihtiyacı vardır. 10 bardak su ile kaç fincan kahve yapabilir?

9. Pizza Problemi 1
Kızlar ve erkekler pizzalarını eşit paylaşırlarsa, kim daha çok pizza alır, bir kız mı daha fazla pizza alır yoksa bir erkek mi? Ne kadar fazla alır?
8 kız 3 pizza ve 3 erkek 1 pizza

10. Pizza Problemi 2
24 kişi bir restorana giderek 18 adet peynirli pizza sipariş etmiştir. Restorana gelenler, restoranda bulunan 12 kişilik 1 masa, 6 kişilik 1 masa, 4 kişilik 1 masa ve 2 kişilik 1 masaya oturacaktır. Garson pizzaları nasıl dağıtırsa herkes eşit miktarda pizza alır?