İstatistik Araştırma Dergisi Cilt 02 No 01 Sayfa 89-104 Nisan 2003

Bayes Ağlarda Koşullu Bağımsızlıkların İncelenmesi Üzerine Bir Çalışma

Hülya OLMUŞ* Semra ORAL ERBAŞ**

ÖZET

Bir Bayes ağ, koşullu bağımsızlık özelliklerine sahip yön verilmiş döngüsel olmayan bir grafiktir. Bayes ağ, değişkenler ve değişkenler arası yön verilmiş kenarların kümesinden oluşur. Kenarlar, değişkenler arası olasılık bağımlılıkları gösterir. Bu bağımlılıklar koşullu olasılıkların kümesinden oluşur. Her bir değişkenin ebeveynleri verildiğinde değişkenin koşullu olasılığı belirlenir. Bir düğümün ebeveynleri olmadığı zaman, bir değişken koşulsuz (marjinal) bir olasılığa sahiptir. Bu çalışmada, Bayes ağlarda, koşullu bağımsızlıklar aşağıdaki farklı üç yoldan araştırılmıştır. Bu yollardan ilki, yön verilmiş Markov özelliğidir. İkincisi, moral ve üçgen grafik yardımıyla elde edilebilen koşullu bağımsızlıktır. Moral ve üçgen grafikten elde edilebilen takımlar sayesinde birleşme ağacı kurulur. Birleşme ağacından, verilen Bayes ağ modeline ilişkin koşullu bağımsızlıklar elde edilir. Üçüncüsü ise, koşullu bağımsızlık kavramının yönsel-ayrılma kriteri ile verilmesidir. Verilen Bayes ağ modeli için, üç farklı şekilde koşullu bağımsızlık özellikleri gösterilmiş ve bu yollar arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Anahtar Sözcükler: *Yön Verilmiş Döngüsel Olmayan Grafik, Yön Verilmiş Grafik, Yön Verilmemiş Grafik, Koşullu Bağımsızlık, Markov Bağımsızlık, Moral Grafik, Üçgen Grafik, Birleşme Grafiği.*

1. GİRİŞ

Grafik; $G=(V,E)$, düğümlerin (köşeler) sonlu kümesi V ve bu düğümler arası kenarların (bağlantılar) sonlu kümesi E'den oluşan bir yapıdır (Edwards, 1995). E kümesi V'den alınan değişken çiftlerinden oluşur. Yani; E, $\{a,b\}$ düzenlenmiş çiftler kümesi olup her $\{a,b\}$ de V'nin elemanlarıdır.

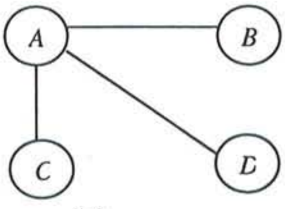
Grafik modelleri; düğümlerin rasgele değişkenlerle gösterildiği ve kenarların koşullu bağımsızlık özellikleri gösterdiği grafiktir. Yön verilmiş ve yön verilmemiş grafik modeller olarak iki şekilde incelenir. Bayes ağlar, yön verilmiş grafik modelleri, Markov ağlar, yön verilmemiş grafik modelleri kullanırlar (Buntine, 1996).

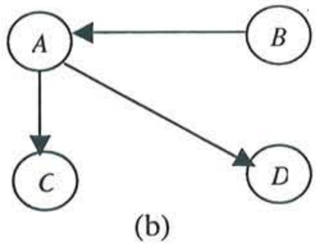
*Araş. Gör., Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümü, e-mail: hulya@gazi.edu.tr (Haberleşme adresi)

**Prof. Dr., Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümü, e-mail:serbas@gazi.edu.tr

İki düğüm arasındaki kenarlar, oklarla gösterilmiş ise (bir yöne sahip ise), buna yön verilmiş grafik denir. a'dan b'ye bir ok çizilmiş ise, a, b'nin nedeni demektir.

Bu durumda $a \rightarrow b$ şeklinde gösterilir. Bir G grafiğinde tüm kenarlar çizgi şeklinde ise, G'nin yapısına yön verilmemiş grafik denir. Bu durumda $\{a,b\} \in E$ ve $\{b,a\} \in E$ dir (Şekil 1), (Oral Erbaş, Bayrak ,1999).





Şekil 1. (a) Yön Verilmemiş Grafik
(b) Yön Verilmiş gGafik

Şekil 1'de (a) ve (b) grafikleri, aynı düğümler arası kenarlara sahiptir. (b) grafiği yön verilmiş kenarlara sahip iken, (a) grafiği yön verilmemiş kenarlara sahiptir. (a) grafiği $V=\{A,B,C,D\}$ düğümler kümesi ve

$E=\{(A,B),(B,A),(A,C),(C,A),(A,D),(D,A)\}$ kenarlar kümesine sahiptir. (b) grafiği ise düğümler kümesi aynı ancak $E=\{(A,C),(A,D),(B,A)\}$ kenarlar kümesine sahiptir.

Grafik, yön verilmiş ve döngüsel olmama durumlarının her ikisini de sağlar ise, grafiğe yön verilmiş döngüsel olmayan grafik denir (Liarokapis, 1999).

2. GRAFİK TEORİSİNDE TEMEL KAVRAMLAR

Düğümlerin sıralanmasından oluşan yapıya yol denir. Örneğin, A ve B düğümleri arası herhangi bir yol, $A \rightarrow C \leftarrow D \rightarrow E \rightarrow F \leftarrow B$ ile verilebilir.

$A \rightarrow \ldots \rightarrow B$ biçiminde bir yol A'dan B'ye yön verilmiş yol olarak adlandırılır.

Aynı düğüm ile başlayan ve biten yola döngü denir. Örneğin, $A \rightarrow \ldots \rightarrow A$ biçiminde ise, bir döngü söz konusudur.

Yön verilmiş bir grafikte ebeveyn/çocuk ilişkilerinden söz edilir. A'dan B'ye bir kenar varsa A, B'nin ebeveyni ve B,·A'nın çocuğudur denir ($A \rightarrow B$). Dede/torun ilişkisi, ebeveyn/çocuk ilişkisinin uzantısıdır. A, B'nin ebeveyni ve B, C'nin ebeveyni ise ($A \rightarrow B \rightarrow C$), A,C'nin dedesi ve C, A'nın torunudur denir. Aile, düğüm ve düğümün ebeveynlerinden oluşan bir kümedir (Richardson, 1997).

3. KOŞULLU BAĞIMSIZLIKLAR İLE İLGİLİ TEMEL ÖZELLİKLER

G=(V,E) grafiğinde, *A,B* ve *C*, *V*'nin alt kümelerini göstersin. Bir *G* grafiğinde, *C* düğümü verildiğinde *A* düğümünün, *B* düğümünden koşullu bağımsızlığı $A \perp B \backslash C$ ile gösterilsin. Böylece, koşullu bağımsızlık özellikleri aşağıdaki gibidir:

- $A \perp B$ ise $B \perp A$'dır.
- $A \perp B \backslash C$ ve *U*, *A*'nın alt kümesi ise $U \perp B \backslash C$'dir.
- $A \perp B \backslash C$ ve *U*, *B*'nin alt kümesi ise $A \perp B \backslash (C \cup U)$'dır.
- $A \perp B \backslash C$ ve $A \perp D \backslash (B \cup C)$ ise $A \perp (B \cup D) \backslash C$'dır (Lauritzen, 1996; Lauritzen ve diğerleri, 1990).

4. BAYES AĞLARDA TOPOLOJİK SIRALAMA

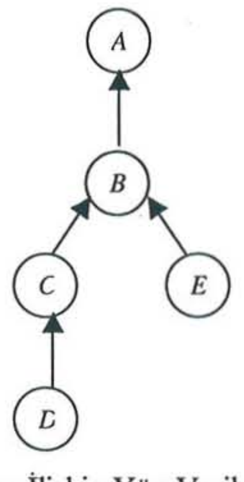
Yön verilmiş döngüsel olmayan grafikler için; bir X düğümünün ebeveynleri (*eb(X)*) topolojik sıralamada önce gelir. Bundan dolayı, yön verilmiş döngüsel olmayan grafikler, düğümlerin doğrusal bir sıralanmasına sahiptir. Düğümlerin böyle sıralanması topolojik sıralama olarak adlandırılır (Cowell, 1999). Topolojik sıralamayı bulmak için basit bir algoritma şöyle olabilir. İlk olarak, grafik ve boş bir liste alınır. Ebeveyne sahip olmayan herhangi bir düğüm grafikten çıkarılır ve tüm düğümler listenin sonuna eklenerek sıralaması elde edilmiş olur. Grafiğin döngüsel olduğu düşünüldüğünde, hiçbir düğüm, ebeveyne sahip olmadığından grafik, birçok durumda sağlanır. Bu algoritma, grafiğin döngüsel olduğunu kontrol etmenin bir yoludur. Başka bir durum ise, çocuksuz düğüm grafikten çıkarılıp tüm düğümler listenin başına eklenerek elde edilir.

5. OLASILIK HESAPLAMALARI İÇİN NİÇİN BAYES AĞLARA İHTİYAÇ DUYULUR?

Bayes ağlar, farklı değişkenler arası bağımlılıkları açıklar. Bayes ağlar'da doğrudan bağımlılıklardan söz edilir. İstenilen tüm olasılıkları hesaplamak için, koşullu bağımsız olan düğümlerden yaralanılır. Böylece, olasılıkları hesaplamak için daha az sayıda işleme gerek duyulur. Düğümler, koşullu olarak bağımsız olduğu zaman, ortak olasılık dağılımını hesaplamak basitleşir. Örneğin; beş değişkenden (düğüm) oluşan A,B,C,D,E ağına sahip olunduğu düşünülsün. Olasılık teorisinde bilinen zincir kuralı ile P(A,B,C,D,E) ortak olasılık dağılımı hesaplanabilir. Böylece bu beş düğüme ilişkin ortak olasılık dağılımı, aşağıdaki şekilde yazılır.

$$P(A,B,C,D,E)=P(A \backslash B,C,D,E).P(B \backslash C,D,E).P(C \backslash D,E).P(D \backslash E).P(E)$$

Ancak; bir Bayes ağda bağımlılıklar daha kolay görülür. Bunun için aşağıda bir ağ verilmiştir (şekil 2). Bu modele ilişkin topolojik sıralama (A,B,C,E,D)'dır.



Şekil 2.Beş Düğüme İlişkin Yön Verilmiş Döngüsel Olmayan Grafik

Şekil 2'den bu beş düğüme ilişkin, P(A,B,C,D,E) ortak olasılık dağılımını hesaplamak basitleşir. Bu hesaplama,

$$P(A,B,C,D,E)=P(A \backslash B).P(B \backslash C,E).P(C \backslash D).P(D).P(E)$$

ile elde edilir.

6. BAYES AĞLARDA KOŞULLU BAĞIMSIZLIKLAR

6.1. Bayes Ağlar da Koşullu Bağımsızlığın Yön Verilmiş Markov Özelliği

Bayes ağlarda, keyfi olarak sıralanan $(X_1,X_2,...,X_n)$ gibi n tane kesikli değişkenler üzerinde P dağılımına sahip olunduğu varsayılsın. Değişkenlerin kümesi $U=\{X_1,X_2,...,X_n\}$ ve bu değişkenlerin ortak olasılık dağılımı P(U) olsun. Bir Bayes ağ, U üzerinde temsil edilir ve koşullu olasılıklar U için sağlanır. O zaman; $P(U)$, ağda belirlenen koşullu olasılıklardan hesaplanır. Düğümün ebeveynleri üzerinde koşullandırma yapılarak, her düğüm için koşullu olasılıklar $P(X_j \backslash eb_j)$ belirlenir. Tüm değişkenler kümesi üzerinde ortak olasılık,

$$P(U)=\prod_j P(X_j / eb_j) \qquad (1)$$

ifadelerin çarpımıyla verilir. Eş. 1, Bayes ağda belirlenen tüm koşullu olasılıkların çarpımıdır (Jensen, 1996).

Yön verilmiş döngüsel olmayan grafiğe, geri dönüşlü faktörleştirme de denir. Bu, yön verilmiş döngüsel olmayan grafik üzerinde oluşan dağılım olarak da bilinir (Cowell, 1999).

Yön verilmiş Markov özelliği, koşullu bağımsızlık özelliğidir. Bir değişkenin ebeveynleri verildiğinde $(eb(X))$ torunları olmayan değişkenlerden $(nd(X))$ koşullu bağımsız olma durumudur (Cowell,1999).

$$X \perp nd(X) \backslash eb(X) \qquad (2)$$

eb_j, X_j'nin atalarının minimal bir kümesi ise X_j, diğer tüm atalarından bağımsızdır. eb_j, X_j'nin Markov ailesidir. Başka bir deyişle; eb_j,

$$P(x_j / eb_j) = P(x_j / x_1, x_2, ..., x_{j-1}) \qquad (3)$$

eşitliğini sağlayan $\{x_1, x_2, ..., x_{j-1}\}$'in herhangi alt kümesidir. Bu yapı, koşullu bağımsızlık ilişkilerini taşıması nedeni ile Bayes ağı tanımlar.

Eş.1'e göre; eb_j ebeveyn kümesi verildiğinde, her X_j değişkeni, diğer geriye kalan tüm değişkenlerden koşullu bağımsızdır denir ($\{X_1, X_2, ... X_{j-1}\} \backslash eb_j$). Bağımsızlığın kümesi aşağıdaki şekilde yazılabilir.

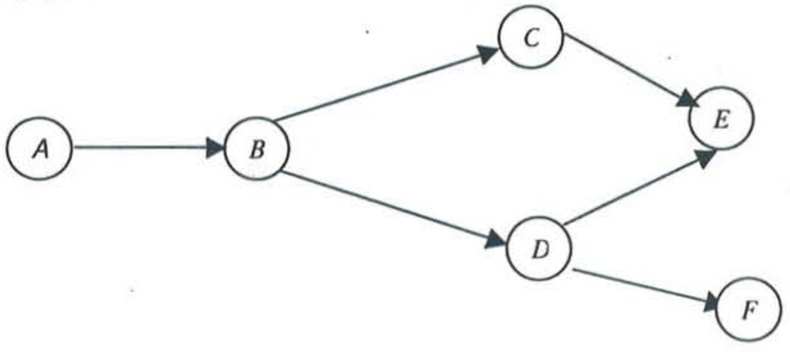
$$X_j \perp \{X_1, X_2, ..., X_{j-1}\} \backslash eb_j \qquad i=1,2,...n \qquad (4)$$

Bu tür bağımsızlıklara Markov bağımsızlığı denir (Pearl, 2000).

Bir olasılık fonksiyonu P, yön verilmiş döngüsel olmayan grafik G'ye bağlı Eş. 3' deki ayrıştırmayı sağlarsa G, P'ye karşılık gelir. G ve P tutarlıdır ya da P, G'ye Markov bağlantılıdır denir ve grafiğin olasılığa karşılık gelmesi ya da koşullu olasılıkların tanımlanması olarak düşünülebilir (Pearl, 2000).

Kesikli değişkenlerin $U=\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ kümesi üzerinde P ortak olasılık dağılımı ve yön verilmiş döngüsel olmayan grafik G verilsin. G'de düğümler ve X'de değişkenler arası bire-bir uygunluk varsa G, P'yi temsil eder. Yani; P, Eş.1'deki ayrışım ile gösterilir (Pearl, 1993).

Örneğin; şekil 3'de, verilen yön verilmiş döngüsel olmayan grafik için Eş.1'e göre ortak olasılık aşağıda verilmiştir. Bu modele ilişkin topolojik sıralama (A,B,C,D,E,F)'dır.



Şekil 3. Altı Düğümden Oluşan Bayes Ağ Modeli

Elde edilen Markov bağımsızlıkları aşağıdadır.

1. $E \perp \{A,B\} \backslash \{C,D\}$
2. $F \perp \{A,B,C,E\} \backslash \{D\}$
3. $\{C,D\} \perp \{A\} \backslash \{B\}$

6.2. Birleşme Ağacı İle Koşullu Bağımsızlıkların İncelenmesi

İlk olarak birleşme ağacının kurulması ile ilgili gereken tanımlamalar verilsin (Geiger et. al.,1990;Stephenson, 2000).

Bir alt grafik tam ise, bu alt. grafiğe takım denir. Bir grafik verildiğinde, takımların tanımlanmasına gereksinim duyulur ve grafik modellerde önemli bir kavramdır. Verilen herhangi bir yol için kiriş, kenardır. Yön verilmemiş grafiklerde, ard arda gelen düğüm çiftleri komşudur ve eğer döngüdeki ardışık düğüm çiftlerinden başka komşu yoksa o zaman döngü kirişsizdir denir (Stephenson, 2000).

Birleşme ağacını oluşturmak için aşağıda adımlar sıralanmıştır.

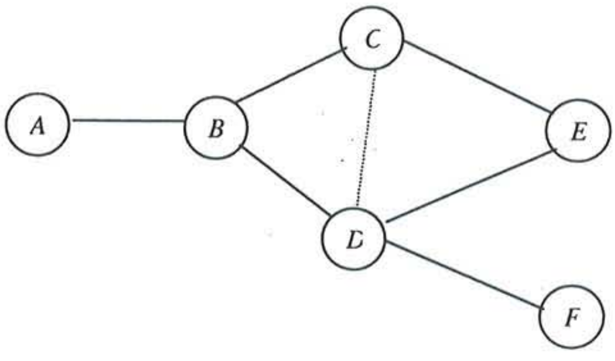
Adım 1: Moral grafik, her düğümün ailelerinin evlendirilmesi ile oluşan yön verilmemiş bir grafiktir (Lauritzen and Spiegelhalter, 1988). Her aile arasına yön verilmemiş kenar eklenir. Bundan sonra, orijinal kenarların hepsinin yönleri kaldırılır.

Adım2: Üçgenleştirilmiş grafik, yön verilmemiş bir grafiktir. Burada her döngü, en az dört düğüm ve en az bir kirişe sahip olmalıdır (Jensen, 1996). Üç düğüme sahip olan döngünün herhangi bir kirişe sahip olması mümkün değildir.

Verilen Bayes ağ, moral grafik haline getirildikten sonra, takımlar, bazen kolaylıkla görülmemektedir. Bundan dolayı, moral grafiğe, yapay bağlantılar eklenerek, grafik üçgenleştirilmiş grafik haline getirilir. Takımlar da, bu grafikten görülebilir. Takımlar sayesinde, değişkenler arasındaki koşullu bağımsızlık ilişkileri kolaylıkla görülmektedir. Elde edilen moral grafik, üçgenleştirilmiş grafiktir. Bu grafikte uzunluğu 3'den büyük her döngü kirişe sahip olmalıdır. Üçgenleştirilmiş grafiği elde edebilmek için büyük ağlarda, yapay bağlantıların nasıl ekleneceği literatürde vardır. Yapay bağlantıların minimal sayısının bulunması problemi NP-hard olarak adlandırılır (Jensen et.al., 1990). Bu çalışma da, amacımız, fikir takımlarının minimal kümesini alarak yapay bağlantıları eklemektir.

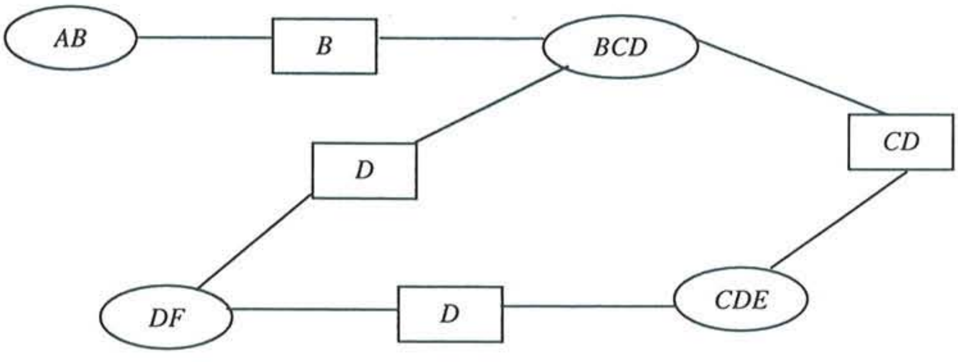
Adım 3: Birleşme grafiği, her A değişkeni, $eb(A) \neq \emptyset$ ile $eb(A) \cup \{A\}$ takımı ile kurulur. Her iki takım arasına, boş olmayan arakesit eklenir. Elde edilen grafiğe, birleşme grafiği denir. Elde edilen birleşme grafiği, bir döngüye sahip ise kenarların her biri döngüleri kırarak ortadan kaldırılır. Döngü üzerindeki tüm arakesitler aynı değişkeni kapsar. Böyle bir durum söz konusu ise, döngü ortadan kaldırılarak birleşme ağacı elde edilir.

Moral grafik, üçgenleştirilmiş bir grafik ise moral grafik için birleşme grafiği, birleşme ağacına sahiptir (Jensen, 1996). Şekil 3 için moral ve üçgen grafik aşağıda verilmiştir.



Şekil 4: Moral ve Üçgen Grafik

Birleşme ağaçlarını kurabilmek için, ilk önce takımlar elde edilir. *B* düğümünün ebeveyni *eb(B)={A}* ile *{A,B}* takımı ve {C,D}düğümünün ebeveyni *eb{C,D}={B}* ile *{B,C,D}* takımları ele alınır. Bu iki takım *B* arakesiti ile bağlanır. Daha sonra, *eb(E)={C,D}* ile *(C,D,E)* takımı oluşturulur. *(C,D,E)* ve *(B,C,D)* takımları da *{C,D}* arakesiti ile bağlanır. *eb(F)={D}* ile *(F,D)* takımı elde edilir. *{F,D}* takımı, *(C,D,E)* ve *(B,C,D)* takımları ile {D} arakesiti ile bağlanır. Ortak düğüme sahip olan takımlar arakesitleri ile bağlanarak birleşme grafiği elde edilir (şekil 5). Arakesitler, kare kutular ile gösterilmiştir.



Şekil 5: Birleşme ağacı

Elde edilen birleşme ağacına göre koşullu bağımsızlıklar şöyledir.

1. $\{B\}\perp\{E\}\backslash\{C,D\}\Rightarrow\{E\}\perp\{A,B\}\backslash\{C,D\}$
2. $\{B,C\}\perp\{F\}\backslash\{D\}\Rightarrow\{B,C,A,E\}\perp\{F\}\backslash\{D\}$
   $\{C,E\}\perp\{F\}\backslash\{D\}\Rightarrow\{A,B,C,E\}\perp\{F\}\backslash\{D\}$
   $\{A,B,C,E\}\perp\{F\}\backslash\{D\}$
3. $\{A\}\perp\{C,D\}\backslash\{B\}$

6.3. Yönsel-ayrılma Kriteri

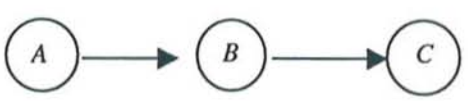
6.3.1. Bayes Ağlarda Olayların Tanımlanması

İki çeşit olay vardır: kuvvetli olay, zayıf olay (Fenton, 1997). Kuvvetli olay: *X* rasgele değişkeni için kuvvetli olay, *X* ile ilgili mümkün durumların kesin bir değer alması olayıdır. Örneğin; *X*, futbol takımı için belli bir oyunun sonuçlarını (kazanma, kaybetme, berabere kalma) göstersin. Bu olayın kuvvetli bir olay olması, bilgi alanı maçın kesinlikle kazanılması olayıdır. Bu durumda kazanma değeri olarak bilinen *X* rasgele değişkeni kuvvetli olaydır. Zayıf olay: *X* ile ilgili durumların önsel olasılık değerlerinin güncelleştirilmesine imkan sağlayan herhangi bir olaydır. Örneğin, bir futbol takımının ilk yarı devrede skoru 3-0 olduğu bilindiğinde, takımın maçı kazanma olasılığının yüksek olduğu söylenebilir. Bunun yanında kaybetme ve berabere kalma olasılıklarının her ikisi de oldukça düşüktür. Kaybetme ve berabere kalma değişkenleri zayıf olaydır.

6.3.2. Bayes Ağlarda Bağlantı Durumlarının Tanımlanması

Burada üç tane bağlantı durumundan söz edilir: serisel bağlantı, ıraksayan bağlantı, yakınsayan bağlantı (Jensen, 1996; Fenton, 1997).

Serisel bağlantı: Şekil 6'daki Bayes ağı göz önüne alınsın. A,B ve C değişkenleri doğru ve yanlış mümkün durumlarıyla kesikli bir değişkendir. A olayının gerçekleştiği varsayılsın. Bu bilgi, sırasıyla B ve C olaylarının gerçekleşebileceğini artırır. A hakkındaki olay, B üzerinden C'ye iletilebilmelidir.

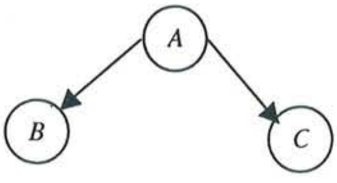


Şekil 6. Serisel Bağlantı

B olayının bilindiği varsayılsın (*B* olayı kuvvetli bir olaydır). Bu durumda, *A* olayı, *C* ile ilişkisizdir. A olayı ile C olayı bağımsız olarak oluşur. *A*'da ki olay *C*'ye iletilemeyecektir. Serisel bağlantı da, *B* bilinmiyor ise olay, *A*'dan *C*'ye iletilebilecektir. Ancak; *B* verildiğinde, *A* ve *C* yönsel-ayrılmıştır.

Sonuç olarak, bağlantıda bir değişkenin durumu bilinmiyorsa, olay serisel bağlantı vasıtasıyla iletilebilmelidir.

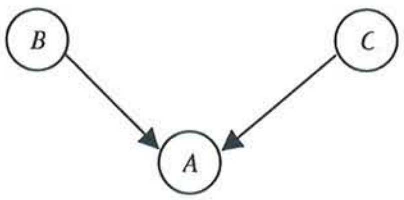
Iraksayan bağlantı: Şekil 7'deki Bayes ağı düşünülsün. *A*, *B*, ve *C* değişkenleri doğru ve yanlış mümkün durumlarıyla kesikli bir değişkendir. *A* hakkındaki herhangi olay, *B* ve *C*'nin her ikisine de iletilmelidir. Başka bir deyişle; *A* olayı, *B* ve *C* olaylarının her ikisinin de kesinliğini etkileyecektir. *A* olayındaki fikri kuvvetli ise, sırasıyla *B* ve *C* olaylarındaki fikir artar.



Şekil 7. Iraksayan Bağlantı

B hakkındaki bilginin *C*'ye iletilip iletilemeyeceği ile ilgilenilsin. *A* ile ilgili olayın kuvvetli bir olay olduğu düşünülsün. Bu durumda, *B* hakkındaki olay, *C* hakkındaki fikir herhangi bir durumda değiştirmeyecektir. Yani, *C*'nin değeri sadece A'nın kesinliği ile etkilenecektir. *A* bilindiği zaman *B* ve *C* bağımsız olarak oluşur. *B* ve *C*'nin bağımsızlığı, *A*'nın kesinliği ile koşullandırılmıştır. Bundan dolayı, *A* verildiğinde, *B* ve *C* koşullu olarak bağımsızdır. Iraksayan bağlantı ile; *A* olayı bilinmiyorsa, *A* üzerindeki olay *B*'den *C*'ye iletilecektir. *A* verildiğinde *B* ve *C* yönsel ayrılmıştır.

Yakınsayan bağlantı: Şekil 8'deki Bayes ağı düşünülsün. *A*, *B* ve *C* değişkenleri doğru ve yanlış mümkün değerleri ile kesikli bir değişkendir.



Şekil 8. Yakınsayan Bağlantı

B ya da C hakkındaki herhangi olay A'ya iletilebilecektir. A olayının, B ve C arasındaki olaylara iletilip iletilemeyeceği ile ilgilenilir. A hakkında bilgi yoksa, A'nın aileleri B ve C bağımsızdır. Bununla beraber, A hakkında herhangi bir şey biliniyorsa, (zayıf olay) A'nın aileleri bağımlı olarak oluşur. B ve C, A üzerinde koşullu olarak bağımlıdır. A yakınsayan düğümü, zayıf ya da kuvvetli olayları içerirse, olay sadece B ve C'nin aileleri arasında iletilecektir.

Sonuç olarak, serisel ve ıraksayan bağlantılar durumunda, koşullu bağımsızlığın sağlanması için, kuvvetli bir olay gerekir. Ancak, yakınsayan bir bağlantıda, koşullu bağımsızlılığın sağlanması için, zayıf ya da kuvvetli bir olay gerekmektedir (Fenton, 1997).

Yukarıda verilen üç durumda, olayın bir değişken vasıtasıyla iletilebileceğini, tüm durumlarda görüldü. Bu kriter, ağ içerisinde bilinen bir olay verildiğinde, herhangi değişken çiftlerinin bağımlı olup olmayacağına karar vermek için imkan sağlar. Koşullu bağımsızlıklar, yönsel-ayırma kriteri kullanarak görülebilir. Kural aşağıdaki biçimde ifade edilmiştir.

A ve *B* değişkenleri arası tüm yollar için *X* orta değişkeni *var ise,*

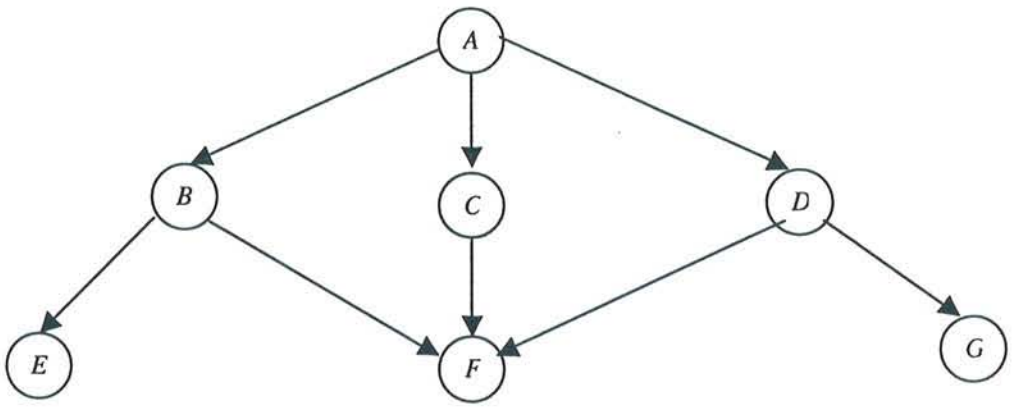
- bağlantı serisel ya da ıraksayan ve *X*'nin durumu bilinmesi durumunda
- bağlantı yakınsayan ve ne *X* ne de *X*'nin herhangi torunları olayda bulunmaması durumunda *A* ve *B* değişkenleri yönsel-ayrılmıştır denir.

A ve *B* değişkenleri yönsel-ayrılmış değil ise, *A* ve *B* değişkenlerine yönsel-bağlantılıdır denir (Madsen and Jensen, 1999; Neal, 2000).

Şekil 3 için yönsel-ayrılma kriterine göre elde edilen koşullu bağımsızlıklar şöyledir:

$* \ \{E\}\perp\{A\}\backslash\{C\}$
$\{E\}\perp\{B\}\backslash\{C\}$
$\{E\}\perp\{A\}\backslash\{D\}\Rightarrow \{E\}\perp\{A,B\}\backslash\{C,D\}$
$\{E\}\perp\{B\}\backslash\{D\}$
$*\{E\}\perp\{F\}\backslash\{D\}$
$\{A\}\perp\{F\}\backslash\{D\}\Rightarrow \{F\}\perp\{A,B,E\}\backslash\{D\}\Rightarrow\{F\}\perp\{A,B,C,E\}\backslash\{D\}$
$\{B\}\perp\{F\}\backslash\{D\}$
$*\{A\}\perp\{C\}\backslash\{B\}$
$\{A\}\perp\{D\}\backslash\{B\}\Rightarrow\{A\}\perp\{C,D\}\backslash\{B\}$

Değişik Bayes ağ modelleri üzerinde üç farklı şekilde koşullu bağımsızlıklar elde etmeye çalışalım.



Şekil 9. Yön Verilmiş Döngüsel Olmayan Grafik

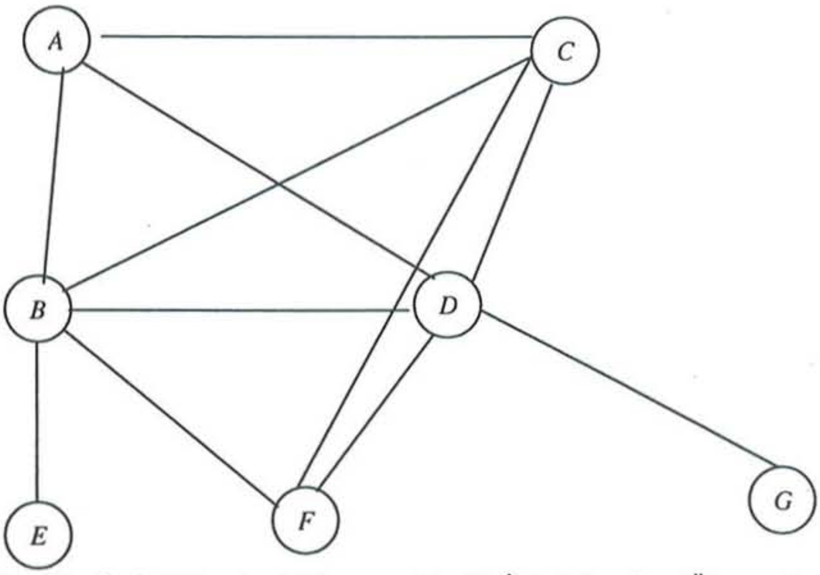
Bu modele ilişkin, topolojik sıralama (A,B,C,D,E,F,G)'dır.

Ortak olasılık dağılımı,

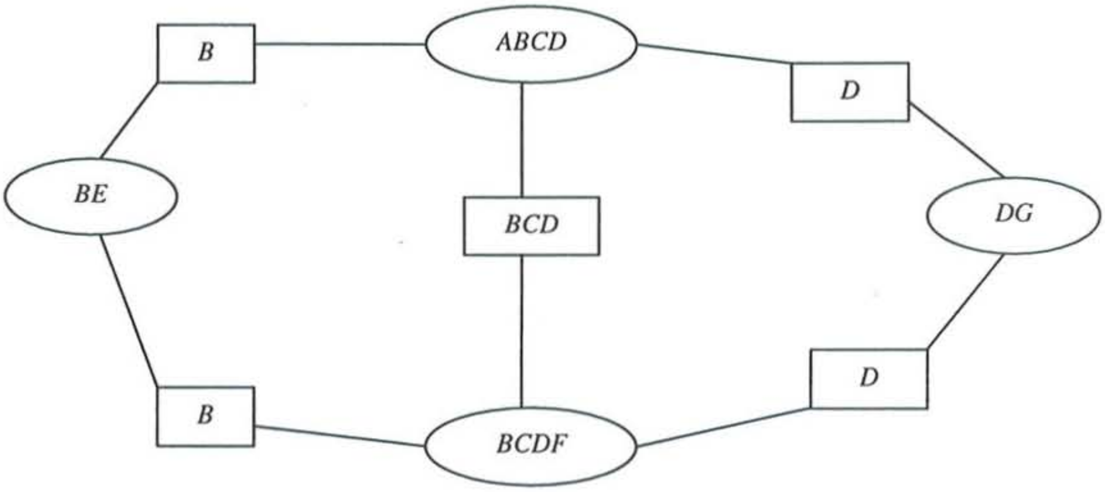
$$P(A,B,C,D,E,F,G)=P(A).P(B/A).P(C/A).P(D/A).P(E\backslash B).P(G\backslash D).P(F\backslash B,C,D)$$

olarak ifade edilir.

Genel Markov Koşulu	Birleşme ağacına göre	Yönsel-ayrılma kriteri
$F\perp\{A,E,G\}\backslash\{B,C,D\}$	$\{A\}\perp\{F\}\backslash\{B,C,D\}\Rightarrow F\perp\{A,E,G\}\backslash\{B,C,D\}$	$\{A\}\perp\{F\}\backslash\{B\}$ $\{A\}\perp\{F\}\backslash\{D\}\Rightarrow\{A\}\perp\{F\}\backslash\{B,C,D\}$ $\{A\}\perp\{F\}\backslash\{C\}$
$E\perp\{A,C,D,F\}\backslash\{B\}$	$\{E\}\perp\{A,C,D\}\backslash\{B\}$ $\{E\}\perp\{C,D,F\}\backslash\{B\}\Rightarrow E\perp\{A,C,D,F\}\backslash\{B\}$	$\{E\}\perp\{F\}\backslash\{B\}\Rightarrow\{E\}\perp\{A,C,D,F\}\backslash\{B\}$
$G\perp\{A,B,C,E,F\}\backslash\{D\}$	$\{G\}\perp\{B,C,F\}\backslash\{D\}$ $\{G\}\perp\{A,B,C\}\backslash\{D\}\Rightarrow G\perp\{A,B,C,E,F\}\backslash\{D\}$	$\{F\}\perp\{G\}\backslash\{D\}\Rightarrow$ $\{G\}\perp\{A,B,C,E,F\}\backslash\{D\}$

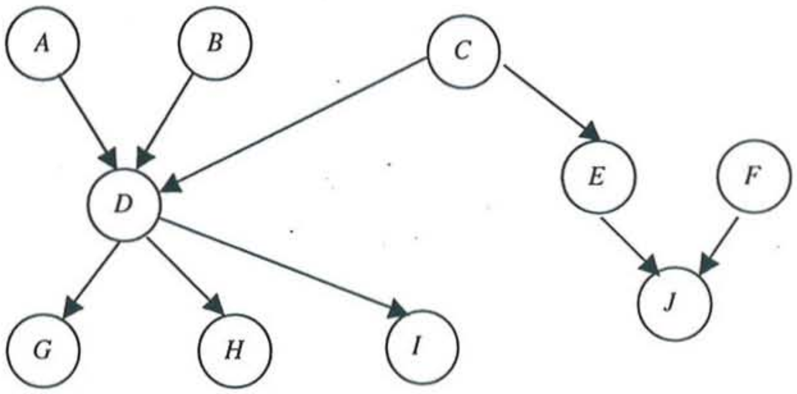


Şekil 10. Yön Verilmiş Döngüsel Olmayan Grafik İçin Moral ve Üçgen Grafiği



Şekil 11. Yön Verilmiş Döngüsel Olmayan Grafik İçin Birleşme Ağacı

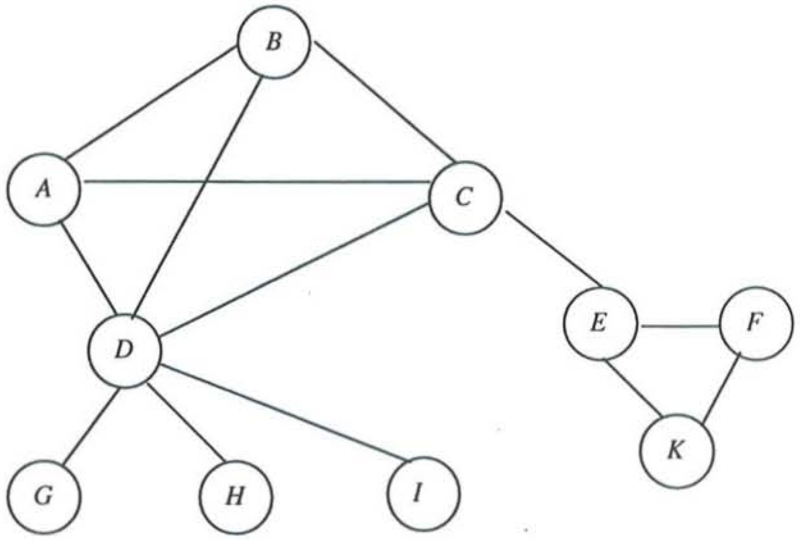
Başka bir Bayes ağ modeli şekil 12'de gösterildiği gibi olsun. Bu modele ilişkin topolojik sıralama (A,B,C,D,E,F,J,G,H,I)'dır.



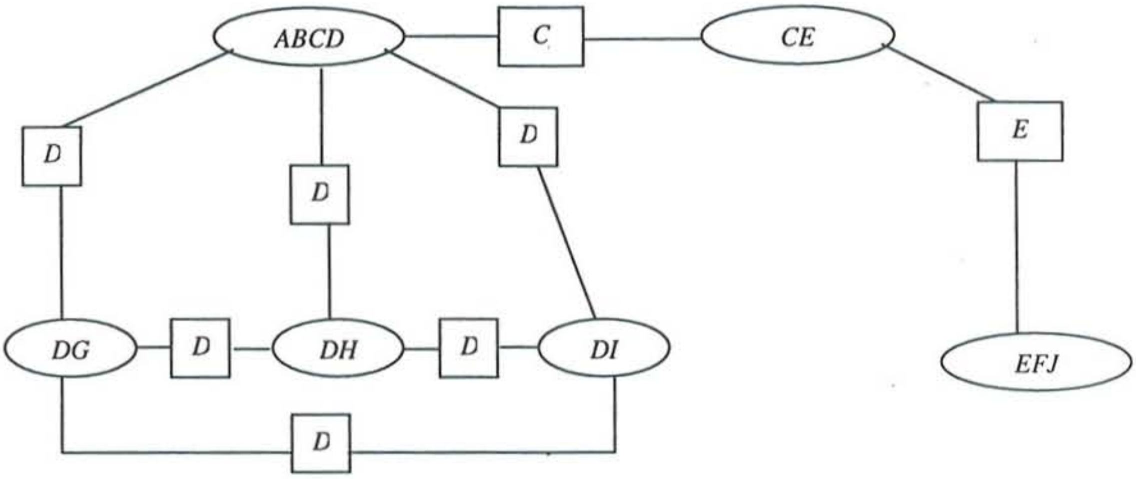
Şekil 12. On Düğümden Oluşan Bayes Ağ Modeli

Şekil 12'ye göre ortak olasılık dağılımı,
P(A,B,C,D,E,F,G,H,I,J)=P(A).P(B).P(C).P($D/A,B,C$).P(E/C).P(G/D).P(H/D).
P(I/D).P($J\backslash E,F$)'dır.

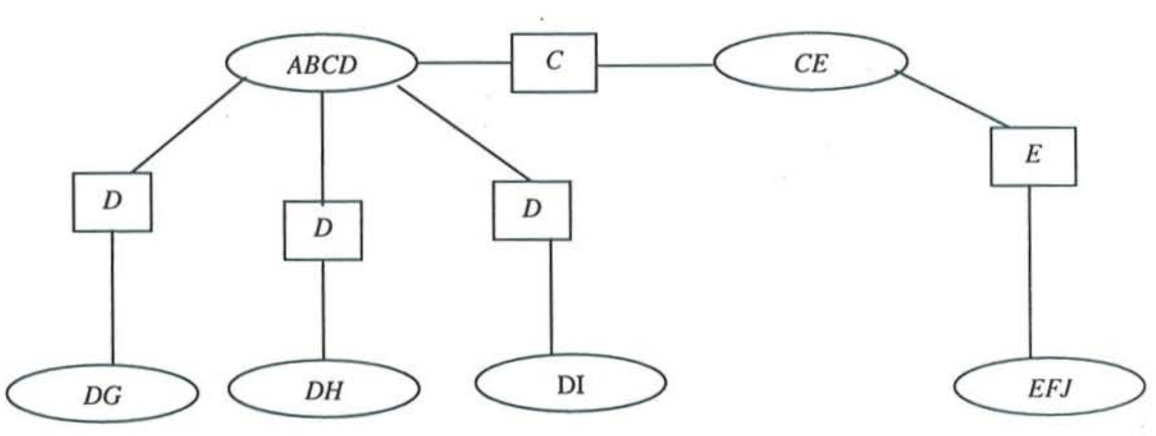
Genel Markov Koşulu	Birleşme ağacına göre	Yönsel-ayrılma kriteri
$\{G,H,I\}\perp\{A,B,C\}\backslash\{D\}$	$\{A,B,C\}\perp\{G\}\backslash\{D\}$ $\{A,B,C\}\perp\{H\}\backslash\{D\}\Rightarrow\{G,H,I\}\perp\{A,B,C\}\backslash\{D\}$ $\{A,B,C\}\perp\{I\}\backslash\{D\}$	$\{A\}\perp\{H,G,I\}\backslash\{D\}$ $\{C\}\perp\{H,G,I\}\backslash\{D\}\Rightarrow\{G,H,I\}\perp\{A,B,C\}\backslash\{D\}$ $\{B\}\perp\{H,G,I\}\backslash\{D\}$
$\{J\}\perp\{A,B,C,D,G,H,I\}\backslash\{E,F\}$	$\{C\}\perp\{F,J\}\backslash\{E\}\Rightarrow$ $\{J\}\perp\{A,B,C,D,G,H,I\}\backslash\{E,F\}$	$\{C\}\perp\{J\}\backslash\{E\}\Rightarrow$ $\{J\}\perp\{A,B,C,D,G,H,I\}\backslash\{E,F\}$
$\{E\}\perp\{A,B,D,G,H,I,\}\backslash\{C\}$	$\{A,B,D\}\perp\{E\}\backslash\{C\}\Rightarrow$ $\{E\}\perp\{A,B,D,G,H,I,\}\backslash\{C\}$	$\{D\}\perp\{E\}\backslash\{C\}\Rightarrow$ $\{E\}\perp\{A,B,D,G,H,I,\}\backslash\{C\}$



Şekil 13. Yön Verilmiş Döngüsel Olmayan Grafik İçin Moral ve Üçgen Grafiği



Şekil 14. Yön Verilmiş Döngüsel Olmayan Grafik İçin Birleşme Grafiği



Şekil 15. Yön Verilmiş Döngüsel Olmayan Grafik İçin Birleşme Ağacı

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bayes ağlar, grafikte koşullu olasılıkları güncelleştirmek için etkili metotlar geliştirir. Olasılık modellerini ortaya koyar. Kesin olmayışlığı içeren bilgi alanlarını biçimlendirir. Ayrıca, değişkenler arasındaki bağımlılık ve bağımsızlık kavramlarını etkili bir şekilde açıklar.

Bayes ağ modellerinde, modelin belirlenmesi önemlidir. Çünkü seçilen modele göre koşullu bağımsızlıklar değişecektir. Araştırmacı, amacına uygun bir şekilde modelini belirlemeye çalışmalıdır. Bu konu literatürde, uzman sistemler adı altında oldukça geniş bir yer kaplar. En iyi modelin belirlenmesinde uzman sistemlerin görüşlerine başvurulmalıdır.

Bu çalışmada kesikli değişkenler için Bayes ağlarda önemli olan koşullu bağımsızlık kavramı üzerinde durulmuştur. Koşullu bağımsızlık, yön verilmiş döngüsel olmayan grafikler ve nedensellik göz önüne alınarak anlatılmıştır. Bayes ağlar, nedensel düğümlerin kümesi verildiğinde, koşullu bağımsızlık ilişkilerin çıkarımını sağlar. Böylece, yön verilmiş döngüsel olmayan grafiklerde, koşullu bağımsızlıklar, çeşitli değişkenler arası ilişkileri yorumlamak için kolaylık sağlayan grafiksel bir gösterimdir.

Bayes ağlarda, koşullu bağımsızlığın incelenmesi için üç farklı yol ve bu yollar arasındaki ilişkiler ortaya konulmaya çalışılmıştır. Üç farklı Bayes ağ modeline yer verilmiş ve her bir model için üç yol ile koşullu bağımsızlıklar incelenmiştir.

Bayes ağlarda koşullu bağımsızlıklar, sayısal hesaplamalara gitmeksizin sadece ağdaki bağımsızlıkların maksimum sayısını tanımlar (Geiger vb. diğerleri, 1990). Koşullu bağımsızlığın incelenmesi için kullanılan yollar, okların yok olması ya da bulunmamasını ifade eder. İlk kullanılan yolda, ilgilenilen tüm değişkenler için, koşullu bağımsızlıkların bir listesini verir. Bu yöntem, maliyeti yüksek olan bir yöntemdir. Yönsel-ayrılma kriteri, nedensel ilişkilerin gösterimi olarak en iyi şekilde ifade edilmektedir. Yönsel-ayrılma kriterinin en iyi çözümü verdiği gözlenmiştir. Birleşme ağacı ile elde edilen koşullu bağımsızlıklar ile yönsel-ayrılma kriteri ile elde edilen koşullu bağımsızlıkların birbirine daha yakın olduğu gözlenmiştir (Oliver ve Smith, 1988). Ancak, her üç modelde de koşullu bağımsızlık özellikleri kullanılarak, elde edilen koşullu bağımsızlıkların aynı olduğu gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

BUNTİNE, W., (1996), *A guide to the literature on learning probabilistic networks from data*, IEEE transactions on Knowledge and data Engineering, 8(2), 195-210.

COWELL, R.G., (1999), *Inroduction to inference in bayesian networks*, In Learning in Graphical Models, 9-26.

EDWARDS, D., (1995), *Introduction to Inference Bayesian Networks*, Springer-Verlag, New York.

FENTON, N., (1997), *Basics of BBNs*, [http://www.csr.city.ac.uk/people/norman.fenton/bbns/Details]. Erişim tarihi: 02.06.2000

GEİGER, D., VERMA, T. AND PEARL, J., (1990), *Identifying independence in Bayesian networks*, Networks, Vol. 20, 507-534.

JENSEN, F.V., OLESEN, K.G. AND ANDERSEN, S.K. (1990), *An algebra Bayesian belief universes for knowledge-based systems*, Networks, Vol. 20, 637-659.

JENSEN, F.V., (1996), *An Introduction to Bayesian Networks*, UCL Press Ltd., London.

LAURİTZEN, S.L., (1996), *Graphical Models*, Oxford University Press, Oxford.

LAURİTZEN, S.L. AND SPİEGELHALTER, D.J., (1998), *Local computations with probabilities on graphical structures an their application to expert systems*, J.R. statist. Soc. B, 50(2), 157-224.

LAURİTZEN, S.L., DAWİD, A.P., LARSEN, B.N., AND LEİMER, H.G., (1990), *Indepedence properties of directed Markov fields*, Networks, 20,491-505.

LİAROKAPİS, D., (1999), *An introduction to belief networks*, [http://www.cs.umb.edu/~dimitris]. Erişim Tarihi: 02.11.2000.

MADSEN, A.L.,AND JENSEN, F.V.,(1999), *LAZY propagation:A junction tree inference algorithm based on lazy evaluation*, Artificial Intelligence, 113,203-245.

NEAL, R.M., (2000), *On deducing conditional independence from d-separation in causal graphs with feedback*, Journal of Artificial Intelligence Research, 12, 87-91.

OLİVER, R.M. AND SMITH, J.Q., (1988), *Influence diagrams, Belief Nets and Decision Analysis*, John Wiley&Sons, New York.

ORAL ERBAŞ, S., VE BAYRAK, H., (1999), *Grafiksel Modeller*, Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümü, Ankara.

PEARL, J., (1993), *From Bayesian Networks to Causal Networks*, 49th Session of the International Statistical Instıtue, Florence, Italy.

PEARL, J., 2000, *Causality: Models, Reasoning and Inference*, Cambridge University Press, England.

RİCHARDSON,T., (1997), *Introductin and d-separation*, UW department of statistics, [http://www.stat.washington.edu/tsr/s538/lec1].Erişim Tarihi: 4.11.2000

STEPHENSON, T.A., (2000), *An introduction to Bayesian network theory and usage*, IDIAP Research Report 00-03.

A Study For Examining The Conditional Independence In Bayesian Networks

ABSTRACT

A Bayesian network is a directed acyclic graph which has conditional independence properties. Bayesian network consists of variables and the sets of the directed edge between variables. Edges denote probability dependence between variables. This dependence consists of the set of conditional probabilities. Conditional probability of a variable is determined by giving parents of each variable. When a node has no parent, a variable has an unconditional (marginal) *probability. In this study, conditional independence in Bayesian Networks is examined by following three ways. First of these ways is directed Markovian properties. Second is conditional independence which can be obtained by using moral and triangulated graph. Junction tree is constituted with cliques which can be obtained by using moral and triangulated graph. Conditional independence related with Bayesian network is obtained from junction tree.Third is the definition of the conditional independence by using d-separation criterion. The characteristics of conditional independence are given in three different ways and relations between these ways are examined.*

Key Words: *Directed Acyclic Graphs, Directed Graphs, Undirected Graphs, Conditional Independence, Markovian Independence, Moral Graph, Triangulated Graph, Junction Tree.*