Koşullu Gauss Dağılımı ve Etkileşimleri

Hülya BAYRAK* Fikri GÖKPINAR*

ÖZET

Grafiksel zincir modeller diye adlandırılan istatistiksel modeller, değişkenler arasında hem simetrik hem de nedensel ilişki içeren grafiklerin özel bir tipidir. Koşullu Gauss Dağılımı(CG) kesikli değişkenler verilmişken sürekli değişkenlerin bileşik Gauss dağılımı ve kesikli değişkenlerin her bir seviye kombinasyonunun pozitif olasılıkları ile tanımlanır. Bir CG dağılımında bir değişken çiftinin geri kalan değişkenler verilmişken koşullu bağımsız olabilmesi için gerek ve yeter koşul bu değişken çiftini ifade eden tüm etkileşim terimlerinin sıfır olmasıdır. Bu çalışmada koşullu Gauss etkileşimleri ve koşullu Gauss Zincir model tanıtılacaktır.

Anahtar Kelimeler: *Koşullu Gauss dağılımı, Koşullu Gauss etkileşimleri, Zincir Grafik, Koşullu Gauss regresyonu*

1. GİRİŞ

1.1 . Bağımlılık Zincirleri

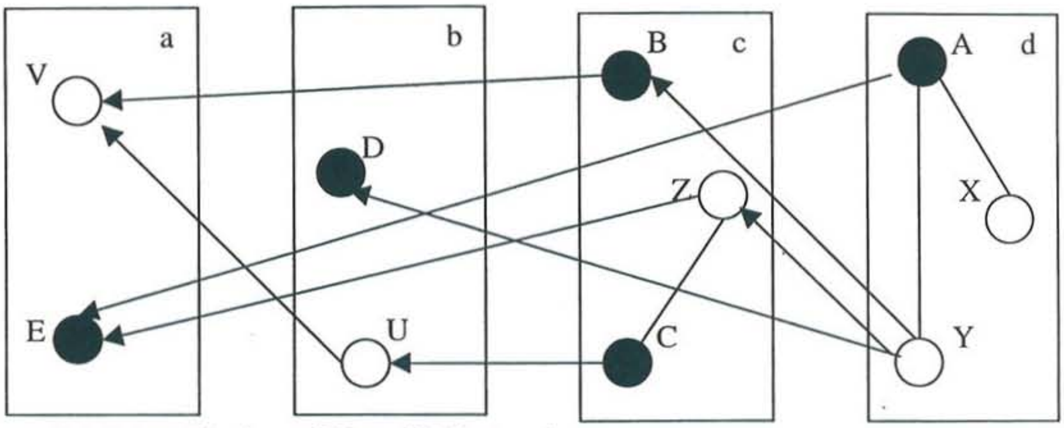
Grafikler, koşullu bağımsızlık ilişkilerini formüle etmek için kullanılır. Grafikte; köşeler, rassal değişkenleri ve kenarlar bu değişkenler arası ilişkiyi gösterir. Grafik; köşeler kümesi ve kenarlar kümesinin terimleriyle belirlenir. Farklı köşelerin her kümesi en çok bir kenara sahiptir. Grafikte iki tip köşe vardır, bunlar çemberle gösterilen sürekli değişkenler ve noktayla gösterilen kesikli değişkenlerdir. (1)

Değişkenler arasında iki çeşit ilişkiden bahsedilebilir; değişkenlerden biri, açıklanan değişken ve diğeri açıklayıcı değişken olduğunda, değişken çiftinin aralarında yönlü ilişki, değişkenlerin ikisi de açıklayıcı yada açıklanan değişkenler ise aralarında simetrik ilişki olduğu söylenir.

Tüm değişkenlerin kümesini gösteren grafik, alt kümelere ayrılabilir. Eğer alt kümeler için aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa, bu grafiğe, bağımlılık zinciriyle ilişkilidir denir (2).

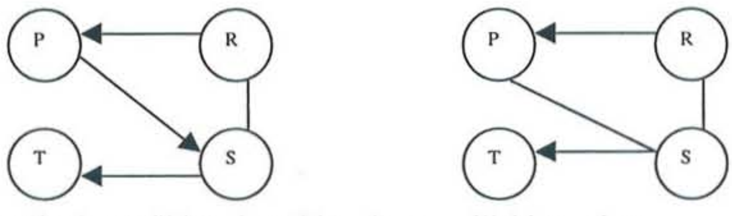
*Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümü Ankara, hbayrak@gazi.edu.tr
*Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümü Ankara, fikri@gazi.edu.tr

a)Alt kümeler yatay bir düzeyde sıralanır.
b)Alt kümeler arasında sadece bir yönde oklar işaretlenir.
c)Altkümeler içinde sadece çizgiler vardır.



Şekil 1.1 Zincir grafiklere ilişkin örnek

Bir grafik bir bağımlılık zinciri ile ilişkili ise, bu grafiğe zincir grafik denir. Tesadüfi (concurrent) değişkenler kümesi, bağımlılık zincirinde açıklanan değişken kümelerinin birer birer silinmesiyle elde edilir. Şekil 1.1'de tesadüfi değişkenlerin dört kümesi $a \cup b \cup c \cup d$, $b \cup c \cup d$, $c \cup d$ ile d'dir. Grafiklerde aralarında çizgi yada ok olmayan değişkenler, geri kalan tesadüfi değişkenler hakkındaki bilgi verildiğinde, bu çiftler arasında koşullu bağımsızlık ilişkisi vardır şeklinde yorumlanır.



Şekil 1.2. Zincir grafiklere karşılık gelmeyen ilişki yapıları.

Yukarıdaki grafikler bloklar arası ok ve bloklar içi çizgi olacak şekilde düzenlenemediğinden zincir grafik değildir.

1.2. Koşullu Bağımsızlık Yapıları

Grafiğin tüm köşe çiftleri arasında kenar varsa grafik tamdır. Tam grafikte hiçbir koşullu bağımsızlık belirlenemez. Tüm değişkenler kümesi K; Δ kesikli ve Γ sürekli değişkenler alt kümelerini belirtmek üzere $K=\Delta \cup \Gamma$ şeklinde yazılabilir

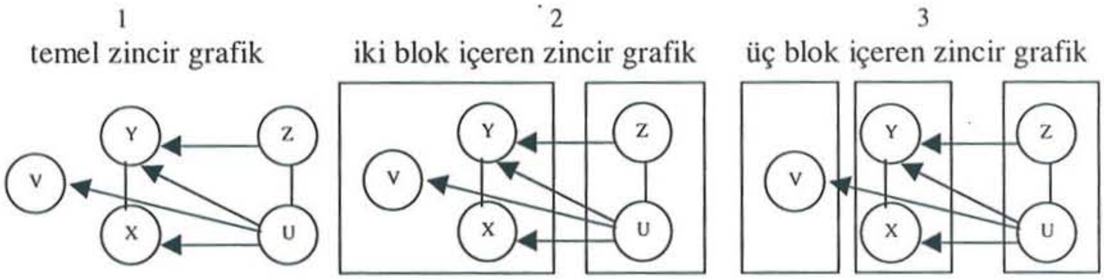
Bir zincir grafikte bağımlılık zincirinden açıklanan değişkenler kümesi, tesadüfi değişkenler kümesi ve her kayıp kenarın anlamı yorumlanabilir

Şekil 1.1'de bağımlılık zinciri $\varphi=(a,b,c,d)$, köşe kümesi $K= a \cup b \cup c \cup d$, açıklanan değişken kümesi a, b, c, d ve 4 tesadüfi kümesi $a \cup b \cup c \cup d$, $b \cup c \cup d$, $c \cup d$ ve d'dir.

Kayıp bir kenarı, geri kalan tüm tesadüfi değişkenler verilmişken o çiftler arasında koşullu bağımsızlık vardır şeklinde yorumlanabilir.
Örneğin, aşağıdaki seçilmiş çiftler için;

$(V,E) : V\perp E/(a\cup b\cup c\cup d \setminus \{V,E\})$ yada $V\perp E/(A,B,C,D,X,Y,Z,U)$
$(D,B) : D\perp B/(b\cup c\cup d \setminus \{D,B\})$ yada $D\perp B/(A,C,X,Y,Z,U)$
$(X,Y) : X\perp Y/(d \setminus \{X,Y\})$ yada $X\perp Y/A$

Değişik bağımlılık zincirleri, aynı *temel zincir grafiğe* sahip olabilir. Örnek olarak, şekil 1.3'teki grafikler verilebilir. Araştırma hipotezini anlamak için (her kayıp kenarın belirli bir anlam belirttiği sürece) bağımlılık zincirini bilmek gerekir.



Şekil 1.3. İkinci grafikte (X,Z) kayıp kenarının anlamı $X\perp Z/(Y,U,V)$ ve üçüncü grafikteki (X,Z) kayıp kenarının anlamı $X\perp Z/(Y,U)$'dur.

Koşullu bağımsızlık grafiğinin üç sınıfı aşağıdaki gibidir: simetrik ortaklık grafiği, sadece bir açıklanan değişkeni olan ve çoklu açıklanan değişkene sahip olan bağımsızlık grafiği. Değişik durumlar arasındaki farkı ayırt etmek için, genel geri dönüşlü koşullu bağımsızlık grafiği G ile gösterilsin. Bir koşullu bağımsızlık grafiğinde;

i) hiçbir açıklanan değişkene kümesi yoksa simetrik ortaklık grafiği (G^{a})
ii) en az bir açıklanan değişken kümesi birden fazla değişken içeriyorsa çoklu açıklanan grafiği (G^{mr})
iii) tüm açıklanan değişken kümesi bir değişken içeriyorsa tek açıklanan grafiği (G^{sr})

şeklinde sınıflanabilir.

2. GRAFİKSEL KOŞULLU GAUSS (CG) ZİNCİR MODEL

Bileşik dağılım, tesadüfi değişkenlerin farklı kümelerini gerektiren dağılımlar cinsinden belirlenebiliyorsa, grafik, bir grafiksel zincir modele karşılık gelir. Zincir grafik bileşik dağılım üzerinde koşullu bağımsızlık kısıtlarını gösterir.

2.1 . Zincir Modelde Bileşik Dağılım

Bir bağımlılık zinciri,istatistiksel modelde iki farklı rol oynar: 1) Sistemdeki tüm değişkenlerin bileşik dağılımını elde etmenin bir yolunu belirtir. 2) Grafikteki kayıp kenara sahip olan her değişken çifti için koşullu bağımsızlık sınırlamasını tanımlar.

Bağımlılık zinciri T tane eleman içeriyorsa sistemdeki tüm değişkenlerin bileşik dağılımı f_V, T-1 tane koşullu yoğunluk ve bir tane marjinal yoğunluğun bileşiminden elde edilir(3). Örneğin şekil 1.1 için

$$f_V=f_{a\backslash bcd}\, f_{b\backslash cd}\, f_{c\backslash d}\, f_d$$

yazılır. CG zincir modellerde, T-1 tane koşullu yoğunluk ve 1 tane marjinal yoğunluk CG tipindedir . g sembolü CG tipindeki yoğunlukları ayırt etmek için kullanılır. Şekil 1.1'de bir CG zincir modelin bileşik dağılımı aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$g_V=g_{abcd}\, g_{bcd}\, g_{cd} g_d$$

2.2 .Koşullu Gauss Dağılımı

Değişkenler kümesi, ($K=\Gamma\cup\Delta$) q tane sürekli değişken içersin. K için CG dağılımı kesikli değişkenler verilmişken sürekli değişkenlerin koşullu bileşik Gauss dağılımı ve kesikli değişkenler her seviyedeki kombinasyonuna ilişkin olasılıklar tarafından tanımlanır. Tüm değişkenlerin bileşik yoğunluğu moment özelliklerinin yardımıyla ifade edilebilir. Bunlar Π_l olasılıkları, μ_l ortalamaları ve kovaryans matrisleri Σ_l'dir. Burada l=1,2,........L kesikli değişkenlerin seviye kombinasyonunu gösterir. Koşullu kovaryans matrisi kesikli değişkenleri seviye kombinasyonlarına bağlı olmadığı zaman, (örn. $\Sigma_l=\Sigma$) CG dağılımına, homojen denir. Bileşik yoğunluk, koşullu Gauss yoğunlukları $g_{\Gamma\backslash\Delta}$'in ve $g_\Delta=\Pi_l$ marjinal olasılık fonksiyonunun bir ürünüdür.

$$g_V = g_{\Gamma/\Delta} = [\{\frac{1}{2\Pi}\}^{q/2}|\Sigma_l|^{-\frac{1}{2}}\exp\{-\frac{1}{2}(x-\mu_l)^T\Sigma_l^{-1}(x-\mu_l)\}]\,\Pi_l$$

Eşdeğer olarak yoğunluğun logaritması kanoniksel özellikler cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\ln g_V = d_l + h_l' x - \frac{1}{2}x' K_l x$$

Burada kanonik özellikler olan kesikli lineer ve kuadratik özellikler sırasıyla d_l, h_l ve K_l ile gösterilir.

İki özellik kümesi (d_l, h_l, K_l) ve (Π_l, μ_l, Σ_l) arasındaki ilişki şöyledir(4):

$$d_l = \log\Pi_l - \frac{1}{2}\{q\ln(2\pi)+\ln|\Sigma_l| + \mu_l^T\Sigma_l^{-1}\mu_l\},\qquad h_l=\Sigma_l^{-1}\mu_l,\qquad K_l=\Sigma_l^{-1}\qquad (*)$$

(* ifadesinin ispatı için Eklere bakınız.)

2.3. Koşullu Gauss Dağılımlarının Etkileşimleri

Dolaylı ilişkiler ile ilgili araştırma hipotezlerinin değerlendirilmesinde CG dağılımının önemli bir özelliği etkileşimlerle araştırma hipotezlerinin parametrelendirilmesidir.

CG dağılımlarında bir değişken çiftinin geri kalan değişkenler üzerinden koşullu bağımsız olması sadece ve sadece bu değişken çiftlerini içeren tüm etkileşim terimlerinin sıfır olmasına bağlıdır (5).
Etkileşimlerle CG dağılımının parametrelenmesi, K={A,B,X,Y} olmak üzere, φ=(K) için örneklenmiştir (burada Δ={A,B} A, B'in sırasıyla i=1,2,...I ve j=1,2,....J kategorilerine sahip olsun ve sürekli değişkenler kümesi Γ={X,Y} şeklinde verilsin). Bu durumda, CG yoğunluğu kanoniksel özellikler terimleriyle aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\ln g(i,j,x,y) = d_{ij} + h_{ij}^{x}x + h_{ij}^{y}y - \frac{1}{2}k_{ij}^{x}x^2 - \frac{1}{2}k_{ij}^{y}y^2 - k_{ij}^{xy}xy \qquad (2.1)$$

ve etkileşim terimleriyle şöyle ifade edilebilir.

$$\begin{aligned}\ln g(i,j,x,y) = {} & \lambda + (\lambda_i^A + \lambda_j^B + \lambda_{ij}^{AB}) + (\eta^X + \eta_i^{AX} - \eta_j^{BX} + \eta_{ij}^{ABX})x + (\eta^Y + \eta_i^{AY} + \eta_j^{BY} + \eta_{ij}^{ABY})y - \\ & - \frac{1}{2}(\Psi^X + \Psi_i^{AX} + \Psi_j^{BX} + \Psi_{ij}^{ABX})x^2 - \frac{1}{2}(\Psi^Y + \Psi_i^{AY} + \Psi_j^{BY} + \Psi_{ij}^{ABY})y^2 - \\ & - (\Psi^{XY} + \Psi_i^{AXY} + \Psi_j^{BXY} + \Psi_{ij}^{ABXY})xy \qquad (**)\end{aligned}$$

(** ifadesinin ispatı için Eklere bakınız)
$d \subseteq \Delta$ olmak üzere buradaki λ, η, ψ etkileşim terimlerine aşağıdaki gibi yorumlanabilir.

λ^d : |d|=0 ise sabit, |d|=1 ise kesikli değişkenin ana etkisi, |d|>1 ise d'deki kesikli değişkenlerinin birbirleriyle etkileşimlerini gösterir.

η^d : |d|=0 ise sürekli değişkenin ana etkisi, |d|≠0 ise sürekli değişken ile d'deki kesikli değişkenlerin karma lineer etkileşimleri gösterir.

ψ^d : |d|=0 ise sürekli değişkenlerin saf kuadratik etkisi, |d|≠0 sürekli değişken çifti ile d'deki kesikli değişkenler arası kuadratik etkileşimi tanımlar. (5)

Modellerin etkileşimleri için aşağıdaki sonuçlar çıkarılabilir.

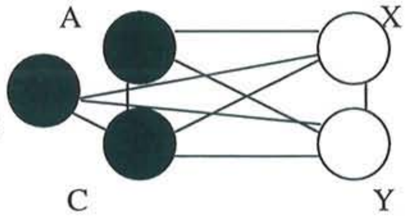
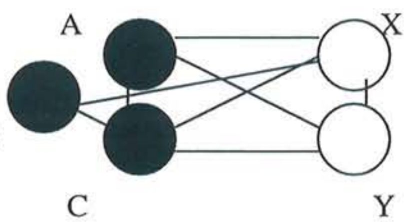
Sonuç 2.1:

Simetrik ortaklık grafik G^a'da, değişkenler kümesi Δ∪Γ'den her çift için, aşağıdaki ifadelere karşılık gelir.

i) Değişken çifti, diğer tüm değişkenler verilmişken koşullu olarak bağımsızdır.
ii) Değişken çiftini içeren tüm etkileşimler sıfıra eşit olur.
iii) Değişken çiftinin kenarı simetrik ortaklık grafiğinde yoktur.

Aşağıdaki tabloda bazı koşullu bağımsızlıklar ve etkileşimler verilmiştir.

Tablo 2.1
Sonuç 2.1 için örnekler

Simetrik Ortaklık Grafiği	Karşılık Gelen Bağımsızlıklar	Sıfır Olan Etkileşimlerin Kümesi
 **Şekil 2.1**	A⊥B/(B,C,Y)	$S_1=\{\lambda_{ij}^{AB}, \lambda_{ijk}^{ABC}\}$ $\cup\{\eta_{ij}^{ABX}, \eta_{ijk}^{ABCX}\}$ $\cup\{\eta_{ij}^{ABY}, \eta_{ij}^{ABCY}\}$ $\cup\{\Psi_{ij}^{ABX}, \Psi_{ijk}^{ABCX}\}$ $\cup\{\Psi_{ij}^{ABY}, \Psi_{ijk}^{ABCY}\}$ $\cup\{\Psi_{ij}^{ABXY}, \Psi_{ijk}^{ABCXY}\}$
 **Şekil 2.2**	A⊥B/(B,C,Y) ve Y⊥B/(A,C,X)	$S_2=S_1\cup\{\eta_{j}^{BY}, \eta_{ij}^{ABY}, \eta_{ijk}^{ABCY}\}$ $\cup\{\Psi_{j}^{BY}, \Psi_{ij}^{ABY}, \Psi_{ijk}^{ABCY}\}$ $\cup\{\Psi_{j}^{BXY}, \Psi_{ij}^{ABXY}, \Psi_{ijk}^{ABCXY}\}$

Tablo 2.1'deki Şekil 2.1'de A ile B arasındaki kayıp kenarı A⊥B/(B,C,Y) koşullu bağımsızlığını ifade eder. Bu koşullu bağımsızlığın anlamı tabloda verildiği gibi A ve B'yi içeren tüm etkileşimlerin 0 olmasıdır. Benzer olarak Şekil 2.2'de (A, B) ile (B,Y) içeren tüm etkileşimler sonuç 2.1'den dolayı 0 olur.

2.4 . Koşullu Gauss Regresyonu

Bir CG zincir modelinde koşullu yoğunluklara CG regresyonu denir. CG regresyon bir koşullu dağılımdır (açıklanan ve açıklayıcı değişkenler kümesindeki değişkenlerin bileşik dağılımı bileşik CG dağılımını belirtir). Bu koşullu dağılımın yoğunluğu kesikli, lineer ve kuadratik kanoniksel ifadelerin cinsinden açıklanabildiği sürece, CG tipindedir.

Bir tek değişkenli CG regresyonu, eğer açıklanan değişken sürekli ise, bir *lineer regresyon*dur, ve eğer açıklanan değişken kesikli ise (etkileyen değişkenler üzerinden lineer ve kuadratik bağımlılıkla birlikte) *lojistik regresyon*dur. Bir homojen CG regresyonu, homojen CG dağılımından türetilir. Bu durumda, lineer regresyonlar paraleldir. Örneğin eşitlik (2.1)'den A,B ve X verilmiş iken Y'nin lineer regresyonu aşağıdaki gibi verilir (6)

$$E(Y/x) = \alpha_{ij} + \beta_{ij} x \qquad Var(Y/x) = 1/k_{ij}^{y} \qquad \alpha_{ij} = h_{ij}^{y} / k_{ij}^{y} \qquad \beta_{ij} = -k_{ij}^{xy} / k_{ij}^{y} \qquad (***)$$

(* ** ifadesinin ispatı için Eklere bakınız)

2.5 . Koşullu Gauss Zincir Modelinde Bileşik Dağılım

Bir CG modelinin varsayımları aşağıdaki gibidir.

(a) Bileşik dağılımdaki T-1 tane koşullu yoğunlukların tümü, CG regresyonlardır.

(b) Açıklanan değişken içermeyen değişkenler kümesinin marjinal dağılımı, bir CG dağılımıdır.

Sadece bir açıklanan değişkene sahip olan CG zincir modele G^{sr} grafiği tarafından verilen *tek değişkenli geri dönüşlü regresyon modeli* denir. Çoklu açıklanan değişkene sahip olan modele *blok geri dönüşlü regresyon modeli* (G^{mr} tarafından verilen) denir. Her grafiksel zincir model T, simetrik ortaklık grafiğin yardımıyla yorumlanabilir: grafiksel zincir model tamamıyla bağımlılık zincirine bağlıdır.

3. SONUÇ

Dolaylı ilişkiler hakkındaki araştırma hipotezlerinin değerlendirilmesinde CG dağılımının önemli bir özelliği etkileşimleriyle birlikte araştırma hipotezlerinin parametrelenmesidir. CG dağılımındaki etkileşim fikri, varyans analizini modelleri kavramında kullanılan etkileşim fikriyle ilişkili fakat farklıdır (7).

Eğer bileşik dağılım tesadüfi değişkenlerin değişik kümelerini gerektiren dağılımlar cinsinden belirlenebiliyorsa, şekil 1.1 gibi bir grafik, grafiksel zincir modele karşılık gelir ve zincir grafik bileşik dağılım üzerinde koşullu bağımsızlık kısıtlarını gösterir. Genel olarak değişik bağımlılık zincirleriyle tamamlanmış grafikler, değişkenlerin aynı koleksiyonu için değişik doymuş model tanımlar. Bir CG zincir modelinin tüm dağılımları CG dağılımları olmasına rağmen, bunun bileşik dağılımının kendisinin CG dağılımı olmasına gerek yoktur.

EKLER

(*)'ın ispatı

$$(*) \quad g_V = [\{\frac{1}{2\pi}\}^{q/2} |\Sigma_l|^{-\frac{1}{2}} \exp\{ -\frac{1}{2}(x-\mu_l)^T \Sigma_l^{-1} (x-\mu_l)\}] \Pi_l$$

denklemin logaritması alındığında

$$\ln g_v = \log \Pi_l - \frac{1}{2}\{q \log(2\pi) + \log|\Sigma_l| + \mu_l^T \Sigma_l^{-1} \mu_l\} + \Sigma_l^{-1} \mu_l x - \frac{1}{2} x' \Sigma^{-1} x$$

olur.

$\log g_V = d_1 + h_l' x - \frac{1}{2} x' K_l x$ olduğu bilindiğinden;

kanonik özellikler ile moment özellikleri arasındaki ilişkiler

$$d_1 = \log \Pi_l - \frac{1}{2}\{q\log(2\pi) + \log|\Sigma_l| + \mu_l^T \Sigma_l^{-1}\mu_l\}, \qquad h_l = \Sigma_l^{-1}\mu_l, \qquad K_l = \Sigma_l^{-1}$$

biçimindedir.

(**)'ın ispatı

Burada ilk önce Möbius inversion tanımlamak faydalı olur.
H ve J sonlu A kümesinin bir alt kümesi a üzerinde tanımlanan fonksiyonlar olsun. O zaman aşağıdaki eşitlikler birbirine denktir.

(i) $\forall$ a$\subseteq$A : $H(a) = \sum_{b \subseteq a} J(b)$

(ii) $\forall$ a$\subseteq$A: $J(a) = \sum_{b \subseteq a} (-1)^{|a/b|} H(b)$

öncelikle d$\subseteq\Delta$ olmak üzere d'nin alabileceği değerlerden oluşan bir ζ kümesi tanımlansın. Sabit fakat keyfi bir $i^* \in \zeta$ seçilsin. $i \in \zeta$ için $i(d) \in \zeta$ ifadesine değiştirme elemanı densin.

$$i(d)_\delta = \begin{cases} i_\delta & \delta \in d \\ i_\delta^* & \delta \notin d \end{cases}$$

örneğin $i(\Delta)=i$ ve $i(\varnothing)=i^*$ şeklinde verilebilir.
CG dağılımındaki kanoniksel özellikleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$p_d(i) = d(i(d)), \quad \xi_d(i) = h(i(d)), \quad \Phi_d(i) = K(i(d)) \qquad \text{(E1)}$$

a$\subseteq\Delta$ iken

$$\lambda_a(i) = \sum_{d \subseteq a} (-1)^{|a/d|} p_d(i)$$

$$\eta_a(i) = \sum_{d \subseteq a} (-1)^{|a/d|} \xi_d(i)$$

$$\Psi_a(i) = \sum_{d \subseteq a} (-1)^{|a/d|} \Phi_d(i) \qquad \text{(E2)}$$

yukarıdaki denklemde özel olarak d=Δ ve $i(\Delta)=i$ alındığında

$$p_d(i) = d(i) = \sum_{b \subseteq \Delta} \lambda_d(i)$$

$$\xi_d(i) = h(i) = \sum_{b \subseteq \Delta} \eta_d(i)$$

$$\Phi_d(i) = K(i) = \sum_{b \subseteq \Delta} \Psi_d(i),$$

elde edilir. Burada $d_{ij}=d(i)$, $h_{ij}=h(i)$, $K_{ij}=K(i)$ dir. Burada sadece λ'lar bulundu. Benzer şekilde η,ξ değerleri de bulunabilir.

$$p_{AB}(i,j) = d(i,j) = \lambda_\phi(i^*,j^*) + \lambda_A(i,j^*) + \lambda_B(i,j^*) + \lambda_{AB}(i,j)$$

$$\lambda_\phi(i^*,j^*) = p_\phi(i^*,j^*)$$

$$\lambda_A(i,j^*) = -p_\phi(i^*,j^*) + p_A(i,j^*)$$
$$\lambda_B(i^*,j) = -p_\phi(i^*,j^*) + p_B(i^*,j)$$
$$\lambda_{AB}(i,j) = p_\phi(i^*,j^*) - p_A(i,j^*) - p_B(i^*,j) + p_{AB}(i,j)$$

(***) ispatı

Bir regresyon denklemi ve katsayıları aşağıdaki gibidir.

E(Y/x)=α(i,j)+β(i,j)x , $\beta(i,j) = \dfrac{\sigma_{xy}(i,j)}{\sigma_{xx}(i,j)}$, $\alpha(i,j) = \mu_{ij}^y - \mu_{ij}^x \beta(i,j)$, Var(Y/x)=σ_{yy}(i,j)

$$h(i,j) = (h_{ij}^x, h_{ij}^y) = \Sigma(i,j)^{-1}\mu(i,j) = (k_{ij}^x\mu_{ij}^x + k_{ij}^{xy}\mu_{ij}^y, k_{ij}^{xy}\mu_{ij}^x + k_{ij}^y\mu_{ij}^y) \quad \text{(E3)}$$

$$\Sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx}(i,j) & \sigma_{xy}(i,j) \\ \sigma_{xy}(i,j) & \sigma_{yy}(i,j) \end{pmatrix}$$

olduğundan konsantrasyon matrisi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$K(i,j) = \Sigma(i,j)^{-1} = \begin{pmatrix} k_{ij}^x & k_{ij}^{xy} \\ k_{ij}^{xy} & k_{ij}^y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sigma_{xx}(i,j)\sigma_{yy}(i,j) - \sigma_{xy}(i,j)^2} \begin{pmatrix} \sigma_{yy}(i,j) & -\sigma_{xy}(i,j) \\ -\sigma_{xy}(i,j) & \sigma_{xx}(i,j) \end{pmatrix} \quad \text{(E4)}$$

(E4)'den β(i,j)=β_{ij}= $\dfrac{-k_{ij}^{xy}}{k_{ij}^y}$ bulunur.

(E3) ve (E4)'den α(,i,j)= $\dfrac{h_{ij}^y}{k_{ij}^y}$ bulunur.

KAYNAKLAR

Lauritzen S.L. *Graphical Models.* Clarendon press, New York, (1996).

Erbaş S.O., Bayrak H. . *Grafiksel Zincir Modeller,* İstatistik Sempozyumu 2000, 273-284,(2000).

Lauritzen S.L and Richardson T.S., *Chain graph models and their casual interpretation, Department of Mathematical Science,* Aalborg university, Research report R-01-2003, (2001).

Lauritzen S.L. and Jensen F., *Stable local computation with conditional gaussian distribution, Department of Mathematical Science,* Aalborg university, Research report R-99-2014, (1999).

Lauritzen , S.L and Wermuth, N. *Graphical models for associations between variables,* some of which are qualitative and some quantative. ***Annals of Statistics*****, 17**, 31-57, (1989).

Wermuth, N. And Lauritzen, S.L. On substantive research hypotheses, conditonal independence graphs and graphical chain models (with discussion). ***Journal of Royal Statistical Society, Series B***, 52, 21-72, (1990).

Cox, D.R. "*Interaction*" *Int. Statist.* Rev., 52, 1-31, (1984).

Condıtıonal Gaussıan Dıstrıbutıon and Interactıons

ABSTRACT

Statistical models called graphical chain models correspond to special types of graphs which included both symmetric and casual relation between variables. A conditional Gaussian (CG) distribution is defined by a joint Gaussian distribution of the continuous variables given discrete variables and by positive probabilities for each level combination of the discrete variables. In CG distribution, a variable pair is conditionally independent given remaining variables if and only if all interaction terms containing this variable pair are zero. In this study, we present CG chain models and CG interactions.

Key Words: *Conditional Gaussian distributions, Conditional Gaussian interactions, Chain graph, Conditional Gaussian regression*