Bernoulli Sayıları ve Lojistik Dağılış Fonksiyonu Üzerine Bir Çalışma

Samim DÜNDAR*

ÖZET

Bernoulli polinomu, ilk n tamsayının p'ci kuvvetlerinin toplamını belirten p+1 'ci dereceden bir polinomdur. Bernoulli polinomlarından yararlanarak Bernoulli sayıları elde edilebilir.

Bernoulli polinomları ve Bernoulli sayıları, Uygulamalı Matematiğin bir çok alanında , özelliklede sayısal çözümleme, fark denklemleri ve toplamların asimtotik analizinde kullanılmaktadır. Bernoulli polinomları ve Bernoulli sayılarının aynı zamanda İstatistik Biliminde de bir çok önemli ve yararlı uygulamaları vardır. Örneğin Stirling yaklaşımı en önemli uygulamalarından birisidir.

Bu çalışmada Bernoulli sayıları kullanılarak lojistik dağılış fonksiyonunun, kümülant çıkaran fonksiyonu elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler : *Bernoulli polinomları, Bernoulli sayıları, Lojistik dağılış, karekteristik fonksiyon.*

1. GİRİŞ

Bernoulli polinomları, doğuran fonksiyon adı verilen $x e^{tx}/(e^x - 1)$ fonksiyonunun açılımından elde edilebilir (Atkinson, 1978; Stuart ve Ord,1987). Bu polinomlar $B_0(t),B_1(t),B_2(t),...$ şeklinde ifade edilip , t=0 için $B_0(0),B_1(0),B_2(0),...$ şeklinde Bernoulli sayıları bulunabileceği gibi daha pratik yollar da vardır(Kelley ve Peterson,1991). Çalışmanın ikinci bölümünde Bernoulli polinomları yukarıda adı geçen doğuran fonksiyonunun Mac-Laurin açılımından doğrudan doğruya elde edilmiş ve bu polinomların daha pratik bulunmasını sağlayan yinelemeli bir bağıntı tanımlanmıştır.

Çalışmanın üçüncü bölümünde de Bernoulli sayılarını elde edebileceğimiz yinelemeli bir bağıntı tanımlanmış ve bu bağıntı yardımıyla ilk birkaç tanesi elde edilmiştir. (Kincaid ve Cheney,1991).

Matematiksel İstatistikte momentlerin hesaplanmasında moment çıkaran fonksiyonlardan yararlanılır. Fakat bazı durumlarda moment çıkaran fonksiyon bulunamaz. Bu durumda momentlerin bulunması "Karakteristik Fonksiyon" ile mümkün olur (Saraçoğlu ve Çevik,1995). Her dağılış fonksiyonunun karakteristik

* Yrd.Doç.Dr., Dokuz Eylül Üniversitesi İ.İ.B.F Ekonometri Bölümü, İZMİR, e-mail:samim.dundar@deu.edu.tr .

fonksiyonu mutlaka vardır (Dündar,2000). Karakteristik fonksiyonun logaritması alınarak da "Kümülant Çıkaran Fonksiyon" elde edilir (Khuri,1993). Momentlerle , kümülantlar arasında önemli ilişkiler olduğu bilinmektedir (Stuart ve Ord,1987). Bu nedenle , çalışmanın dördüncü bölümünde ise dağılış teorisinde "Lojistik Dağılış" olarak bilinen fonksiyonun karakteristik fonksiyonu ve bunun yardımıyla da kümülant çıkaran fonksiyonu elde edilmiştir. Buradan haraket edilerek beşinci bölümde ; Lojistik Dağılış fonksiyonunun "Kümülant Çıkaran Fonksiyonu" , katsayıları Bernoulli sayıları olan x 'in bir kuvvet serisi şeklinde bulunmuştur.

2. BERNOULLI POLİNOMLARI

Tanım 2.1. $\{y_k(t)\}$ bir fonksiyon dizisi olmak üzere , sıfırı içeren bir açık aralıktaki tüm x 'ler için ;

$$g(t,x) = \sum_{x=0}^{\infty} y_k(t)x^t$$

olsun. Bu durumda $g(t,x)$ fonksiyonuna , $\{y_k(t)\}$ dizisi için "Doğuran Fonksiyon" denir. Başka bir deyişle ; $x = 0$ civarında $g(t,x)$ fonksiyonunun kuvvet serisinde k 'cı katsayı $y_k(t)$ dır. Bu katsayılar ;

$$y_k(t) = \frac{1}{k!}\frac{{}^{k}}{x^{k}}g(t,0) \qquad (1)$$

formülü ile hesaplanır (Kelley ve Peterson,1991). Ancak bu katsayıları hesaplamak için başka yollar da vardır.

Tanım 2.2. $B_k(t)$ Bernoulli polinomları ;

$$\frac{x\,e^{tx}}{e^{x}-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k(t)}{k!}x^{k} \qquad (2)$$

denklemi ile tanımlıdır (Atkinson,1978). Başka bir deyişle , $x\,e^{tx}/(e^{x}-1)$ fonksiyonu $\{B_k(t)/k!\}$ dizisi için doğuran bir fonksiyondur.

Bernoulli polinomlarından ilk birkaç tanesini hesaplamak için (1) den yararlanılabilir. Fakat (2) denklemini kullanarak amacımıza doğrudan doğruya ulaşabiliriz. İlk olarak (2) denkleminin her iki yanı $(e^{x}-1)/x$ ile çarpılırsa ;

$$e^{tx} = \frac{e^{x}-1}{x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k(t)}{k!}x^{k} \qquad (3)$$

olur. (3) eşitliğinin her iki tarafında yer alan üstel fonksiyonların Mac-Laurin serilerinden yararlanılır ve sağ taraftaki seri k 'nın ilk birkaç değeri için açık yazılırsa ;

$$1+\frac{tx}{1!}+\frac{t^2x^2}{2!}+\cdots=\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)\left(B_0(t)+\frac{B_1(t)}{1!}x+\frac{B_2(t)}{2!}x^2+\cdots\right)$$

$$=B_0(t)+\left(\frac{B_1(t)}{1!}+\frac{B_0(t)}{2!}\right)x+\left(\frac{B_2(t)}{2!}+\frac{B_1(t)}{2!1!}+\frac{B_0(t)}{3!}\right)x^2+\cdots$$

olur. Polinom özdeşliğinden de ;

$$B_0(t)=1\ ,\ \frac{B_1(t)}{1!}+\frac{B_0(t)}{2!}=\frac{t}{1!}\ ,\ \frac{B_2(t)}{2!}+\frac{B_1(t)}{2!1!}+\frac{B_0(t)}{3!}=\frac{t^2}{2!}\ ,\cdots \tag{4}$$

yazılır ve (4) 'deki eşitliklerden yararlanarak , Bernoulli polinomlarının ilk birkaç tanesi ;

$$\left.\begin{aligned} B_0(t)&=1\\ B_1(t)&=t-\frac{1}{2}\\ B_2(t)&=t^2-t+\frac{1}{6}\\ B_3(t)&=t^3-\frac{3}{2}t^2+\frac{1}{2}t \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

olarak bulunur.

Bu şekilde elde edilen Bernoulli polinomları için ;

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}B_k(t)=(n+1)\,t^n \tag{6}$$

bağıntısı bir yineleme bağıntısıdır (Kincaid ve Cheney,1991). Yani $n=0,1,2,\cdots$ için (5) 'deki $B_k(t)$ 'leri bulabiliriz. Örneğin (6) 'da $n=0$ verilirse ;

$$\binom{1}{0}B_0(t)=(0+1)\,t^0$$

ve buradan , $B_0(t)=1$ olur. Yine (6) 'da $n=1$ verilirse ;

$$\sum_{k=0}^{1}\binom{2}{k}B_k(t)=(1+1)\,t$$

$$\binom{2}{0}B_0(t)+\binom{2}{1}B_1(t)=2t$$

$$B_0(t) + 2B_1(t) = 2t$$

$B_0(t) = 1$ olduğundan , $B_1(t) = t - 1/2$ olarak tekrar bulunur. Bu şekilde devam edilerek , $n = 2,3,\cdots$ verilirse diğerleri de kolaylıkla elde edilebilir.

3. BERNOULLİ SAYILARI

Tanım 3.1. B_k Bernoulli sayıları ; $B_k = B_k(0)$ ile tanımlıdır (Kelley ve Peterson,1991 ;Kincaid ve Cheney,1991).Yani k 'ıncı Bernoulli sayısı, k 'ıncı mertebeden Bernoulli polinomundan $t = 0$ konularak elde edilebilir. Diğer taraftan (6) 'da $t = 0$ yazılırsa ;

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k(0) = 0 \qquad (n \geq 1) \tag{7}$$

elde edilir ki , bu da Bernoulli sayıları için bir yineleme bağıntısıdır. (7) den $n = 1$ için ;

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{2}{k} B_k(0) = \binom{2}{0} B_0(0) + \binom{2}{1} B_1(0) = 0$$

ve $B_0(0) = 1$ olduğundan $B_1(0) = -1/2$ olur. Yine (7) 'den $n = 2$ için ;

$$\sum_{n=1}^{2} \binom{3}{k} B_k(0) = \binom{3}{0} B_0(0) + \binom{3}{1} B_1(0) + \binom{3}{2} B_2(0) = 0$$

eşitliğinden de , $B_2(0) = \frac{1}{6}$ olur. Yine (7) 'den $n = 3$ için ;

$$\sum_{k=0}^{3} \binom{4}{k} B_k(0) = \binom{4}{0} B_0(0) + \binom{4}{1} B_1(0) + \binom{4}{2} B_2(0) + \binom{4}{3} B_3(0) = 0$$

eşitliğinden de $B_3(0) = 0$ olarak elde edilir. Bu şekilde devam edilirse ; önce

$$k \geq 1 \quad \text{için} \quad B_{2k+1}(0) = 0$$

olduğu , ve sonra da $B_4(0) = -1/30$, $B_6(0) = 1/42$, $B_8(0) = 1/30$,... bulunur.

4. LOJİSTİK DAĞILIŞ FONKSİYONUNUN KARAKTERİSTİK FONKSİYONU

Tanım 4.1. F(x) sürekli ve $dF = f(x)\,dx$ olmak üzere ;

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF \tag{8}$$

integralinin tanımladığı fonksiyona "Karakteristik Fonksiyon" denir(Saraçoğlu ve Çevik,1995 ; Dündar, 2000).

$$|\varphi(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left|e^{itx}\right| dF = \int_{-\infty}^{\infty} dF = 1 \tag{9}$$

olduğundan (8) 'deki integral yakınsaktır , yani $\varphi(t)$ fonksiyonu vardır (Dündar,2000). Üstel fonksiyonların derlemesi şeklinde ;

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2} \tag{10}$$

ya da hiperbolik fonksiyon şeklinde ;

$$f(x) = \frac{1}{4\cosh^2(x/2)} \tag{11}$$

olarak ifade edilebilen f(x) fonksiyonu dağılış teorisinde "Lojistik Dağılış" olarak bilinir (Khuri,1993 ; Dündar,2000). (8) 'den , (9) 'ye geçiş ; $\cosh x = \left(e^{x} + e^{-x}\right)/2$ tanımı yardımıyla kolaylıkla yapılabilir.

Şimdi (10) yada (11) ile verilen fonksiyonun , karakteristik fonksiyonunu bulmak istersek ;

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}\, dx \tag{12}$$

integralini hesaplamak gerekir. (12) 'deki integralde , $e^{-x} = u$ değişken dönüşümü yapılırsa ;

$$\varphi(t) = \int_{\infty}^{0} u^{-it} \frac{(-du)}{(1+u)^2}$$

olur. Son integralde de $y = (1+u)^{-1}$ dönüşümü ile ;

$$\varphi(t) = \int_0^1 y^{it}(1-y)^{-it}\, dy \tag{13}$$

bulunur. (13) 'daki integral ise Beta fonksiyonunun tanımı (Kreyszig,1966) gereğince ;

$$\varphi(t) = \beta(1+it\,,1-it)$$

dır. Beta fonksiyonundan , Gamma fonksiyonuna geçilirse ;

$$\varphi(t) = \frac{\Gamma(1+it)\ \Gamma(1-it)}{\Gamma(1+it+1-it)} = \Gamma(1+it)\ \Gamma(1-it) = it\ \Gamma(it)\ \Gamma(1-it)$$

olur. $\sin x = \left(e^{ix} - e^{-ix}\right)/2i$ ve $\Gamma(x)\ \Gamma(1-x) = \pi/\sin\pi x$ (Kreyszig,1966) , özelliklerinden yararlanılırsa ;

$$\varphi(t) = \frac{\pi t}{\sinh \pi i} \tag{14}$$

bulunur. (14) 'nin logaritması , kümülant çıkaran fonksiyonu vereceğinden (Khuri ,1993 ; Stuart ve Ord,1987) , logaritma özelliği de kullanılarak ;

$$\psi(t) = \ell og\varphi(t) = -\ell og\left(\frac{\sinh \pi t}{\pi t}\right) \tag{15}$$

elde edilir.

5. LOJİSTİK DAĞILIŞ FONKSİYONU İLE BERNOULLİ SAYILARININ İLİŞKİSİ

Bernoulli polinomları için bir yineleme bağıntısı olan , (2) eşitliğinde $t = 0$ verilirse ;

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k(0)}{k!} x^k \tag{16}$$

olur. (16) 'deki serinin ilk birkaç terimi yazılırsa ;

$$\frac{x}{e^x-1} = \frac{B_0(0)}{0!} + \frac{B_1(0)}{1!}x + \frac{B_2(0)}{2!}x^2 + \frac{B_3(0)}{3!}x^3 + \frac{B_4(0)}{4!}x^4 + \cdots$$

dır. $B_0(0) = 1$ ve $B_1(0) = -1/2$ olduğundan ;

$$\frac{x}{e^x-1} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{B_2(0)}{2!}x^2 + \frac{B_3(0)}{3!}x^3 + \frac{B_4(0)}{4!}x^4 + \cdots$$

dır ve buradan da ;

$$\frac{x}{e^x-1}-1+\frac{1}{2}x = x\left(\frac{B_2(0)}{2!}x+\frac{B_3(0)}{3!}x^2+\frac{B_4(0)}{4!}x^3+\cdots\right)$$

olup, her iki tarafı x ile bölersek ;

$$\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}=\frac{B_2(0)}{2!}x+\frac{B_3(0)}{3!}x^2+\frac{B_4(0)}{4!}x^3+\cdots$$

olur. Son eşitliğin her iki tarafının terim , terim integrali alınırsa ;

$$\ell og\left(1-e^{-x}\right)-\ell og\,x+\ell og\,e^{x/2}=\frac{B_2(0)}{2.2!}x^2+\frac{B_3(0)}{3.3!}x^3+\frac{B_4(0)}{4.4!}x^4+\cdots$$

$$\ell og\left(\frac{\left(1-e^{-x}\right)e^{x/2}}{x}\right)=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{B_k(0)}{k.k!}x^k$$

$k\geq 1$ için $B_{2k+1}(0)=0$ olduğundan ,

$$\ell og\left(\frac{e^{x/2}-e^{-x/2}}{x}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{2n}(0)}{(2n).(2n)!}x^{2n}$$

ve buradan da ;

$$\ell og\left(\frac{\sinh(x/2)}{x/2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{2n}(0)}{(2n).(2n)!}x^{2n} \tag{17}$$

bulunur. (17) 'de $x=2\pi t$ dönüşümü yapılırsa ;

$$\ell og\left(\frac{\sinh\pi t}{\pi t}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2\pi)^{2n}B_{2n}(0)}{(2n).(2n)!}t^{2n} \tag{18}$$

yazılabilir. Son olarak (18) ile (15) karşılaştırılırsa ;

$$\psi(t)=-\ell og\left(\frac{\sinh\pi t}{\pi t}\right)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2\pi)^{2n}B_{2n}(0)}{(2n).(2n)!}t^{2n}$$

dolayısıyla ;

$$\psi(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2\pi)^{2n}B_{2n}(0)}{(2n)}\frac{(it)^{2n}}{(2n)!} \tag{19}$$

elde edilir.

r 'ci kümülantın , $\psi(t)=\ell og\varphi(t)$ nın açılımında $(it)^r/r!$ nın katsayısı olduğundan (Stuart ve Ord,1987) , (19) 'den $n\geq 1$ için ;

$$\kappa_{2n}=\frac{(-1)^{n-1}(2\pi)^{2n}B_{2n}(0)}{2n} \tag{20}$$

olduğu açıktır.

6. SONUÇ

$\psi(t)=\ell og\varphi(t)$ fonksiyonunun birinci ve ikinci mertebeden türevleri ;

$$\psi'(t)=\varphi'(t)/\varphi(t)$$

$$\psi''(t)=\varphi''(t)/\varphi(t)-\{\varphi'(t)/\varphi(t)\}^2$$

olup , $t=0$ için $\varphi(0)\equiv 1$ olduğundan ;

$$\kappa_1=\varphi'(0)=\mu'_1$$

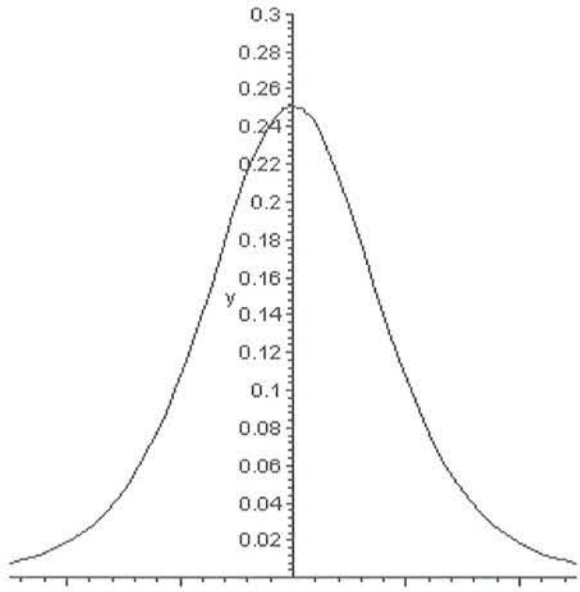
$$\kappa_2=\varphi''(0)-\{\varphi'(0)\}^2=\mu'_2-\{\mu'_1\}^2=\mu_2$$

olur.

$k\geq 1$ için $B_{2k+1}(0)=0$ olduğundan ; $\kappa_1=\mu'_1=0$ dır. Bu sonuç $\varphi(t)$ fonksiyonunun türevinde $t\to 0$ yapılarak da görülebilir. $\mu'_1=0$ olduğu için de ; $\kappa_2=\mu'_2=\mu_2$ dır. $\varphi'(0)=0$ olduğundan , $\kappa_2=\varphi''(0)$ dır.

Lojistik Dağılış için bu tarzda κ_2'yı ve diğer kümülantları elde etmek , oldukça güç ve uzun matematiksel işlemleri gerektirmektedir. Oysaki (20) bağıntısında , $n=1$ verilirse, kolaylıkla $\kappa_2=\pi^2/3$ ve $n=2$ için de ; $\kappa_4=2\pi^4/15$ bulunur.

Demekki $\kappa_1=0$ olduğundan , lojistik dağılışın ortalaması sıfırdır. $\kappa_2=\mu_2$ olduğundan , varyansı $\pi^2/3$ dır. $\kappa_3=0$ olduğundan dağılış tam simetriktir. $\kappa_4=\mu_4-3\mu_2^2$ 'den $\mu_4=7\pi^4/15$ olup , basıklık ölçüsü $\beta_2=\mu_4/\mu_2^2$ 'den , $\beta_2=4.2$ elde edilir. $\beta_2 > 3$ olması nedeniyle de ; lojistik dağılışın, normal dağılışa göre daha basık olduğu görülür. Lojistik dağılış fonksiyonunun grafiği , Şekil 1 'de Maple V Release 5 programı ile çizilmiştir.



Şekil 1. Lojistik Dağılış Fonksiyonu

KAYNAKLAR

ATKINSON, K.E. (1978), *An Introduction to Numerical Analysis* , John Wiley & Sons, NewYork.

DÜNDAR, S. (2000), *Fourier Dönüşümü ve Karakteristik Fonksiyon*, D.E.Ü İ.İ.B.F Dergisi , Cilt:15 , Sayı:2 , s:115-126 , İzmir.

KELLEY, W.G. and PETERSON,A.C.(1991), *Diference Equations*, Academic Pres , San Diego.

KHURI, A.I. (1993), *Advanced Calculus with Aplications in Statistics* , John Wiley & Sons , New York.

KINCAID, D. and CHENEY,W. (1991), *Numerical Analysis Mathematics of Scientific Computing*, Brooks-Cole Publishing Comp., California.

KREYSZIG, E. (1966), *Advanced Engineering Mathematics*, John Wiley & Sons, NewYork.

SARAÇOĞLU, B. and ÇEVİK, F. (1995) , *Matematiksel İstatistik,* Gazi Büro Kitapevi , Ankara.

STUART, A. and ORD, J.K. (1987), *Advanced Theory of Statistics*, Vol:1 CharlesGriffin , London.

A Study on Bernoulli Numbers and Logistic Distribution Function

ABSTRACT

The Bernoulli polynomial is a polynomial which is the sum of p^{th} *powers of the first n positive integers and of degree p+1. Bernoulli numbers can be obtained from Bernoulli polynomials.*

The Bernoulli polynomials and Bernoulli numbers have been used in applied mathematics, especially in numerical analysis, difference equations and asymptotic analysis of the sums. The Bernoulli polynomials and Bernoulli numbers have useful and important applications in statistics. For example, Stirling's approximations is one of the important applications.

In this work we obtained the cumulant generating function of logistic distribution using Bernoulli numbers.

Key Words : *Bernoulli polynomials, Bernoulli numbers, Logistic distribution, Characteristic function.*