

İTERAKSİYONLU İKİ - YÖNLÜ SINIFLAMADA VARIYANS UNSURLARININ TAHMİN EDİLMESİ

Yusuf VANLI (1)

Ö Z E T

İnteraksiyonun dahil edildiği iki-yönlü sınıflamada kareler ortalamalarının beklenen değerlerindeki varyans unsurlarına ait " en iyi" sapmasız tahminlerin elde edilişi ile ilgili hesaplamalar rakamlı bir misalle gösterilmiştir.

G İ R İ Ş

Varyans unsuru analizinin teorisi Crump (1946 ; 1951) ve Eisenhart (1947) tarafından incelenmiştir. Bu çalışmalar ve gerçekten, varyans unsuru tahmini üzerine yayınlanmış makalelerin büyük bir kısmı tek-yönlü sınıflama, iç-içe sınıflama ve eşit altsınıf sayılı faktöriyel sınıflama ile ilgilidir.

İyi planlanmamış denemelerden elde edilen altsınıf frekansları farklı rakamların şansa bağlı ve karışık modelde varyans ve kovaryans unsurlarının en küçük-kareler tekniğine göre hesaplanması Henderson (1948, 1953) ve Searle ve Henderson (1961) tarafından gösterilmiştir. En küçük-karelere göre, kareler ortalamalarının beklenen değerlerindeki varyans ve kovaryans unsurlarına ait katsayıların doğrudan ve kısa yoldan

(short-cut) hesaplanması, Harvey (1960) tarafından verilmiştir.

Yerli literatürde varyans unsurlarının tahminine ait metodlar teori ve uygulama yönünden, Karataş (1967) tarafından incelenmiştir. Bu çalışmada, varyans unsurlarının tam en küçük-kareler tekniğine dayanan doğrudan ve dolaylı metodla tahmin edilmesine ait hesaplama işlemleri rakamlı bir misalle gösterilecektir.

Şansa Bağlı Model

Bir rakamlar dizisinin analizinde, bir arada incelenmesi gereken faktörlerin μ hariç, hepsi şansa bağlı kabul edilebilirse model varyans unsurları modeli veya şansa bağlı model olarak bi-

(1) Atatürk Üniversitesi, Ziraat Fakültesi Zootečni Bölümü Dr. Asistanı
Dergi komisyonuna Geliş Tarihi :

Tablo 3. Süt Verimine Ait İndirgenmiş Katsayılar Matrisi.

$\hat{\mu}$	\hat{a}_1	\hat{a}_2	\hat{a}_4	\hat{a}_5	\hat{a}_6	\hat{a}_1	\hat{b}_2	$\hat{a}_1\hat{b}_1$	$\hat{a}_1\hat{b}_2$	$a_2\hat{b}_1$	$a_2\hat{b}_2$	$a_4\hat{b}_2$	$a_5\hat{b}_2$	
μ	583	-25	49	-67	-77	-113	-82	38	21	59	-13	-13	-26	-4
a_1	-25	247	136	136	136	136	21	59	23	77	1	9	9	9
a_2	49	136	321	136	136	136	-13	-13	1	9	-11	5	9	9
a_4	-67	136	136	205	136	136	-44	-26	1	9	1	9	-8	9
a_5	-77	136	136	136	195	136	-28	-4	1	9	1	9	9	14
a_6	-113	136	136	136	159	159	-24	-32	1	9	1	9	9	9
b_1	-82	21	-13	-44	-28	-24	336	209	-49	-35	37	25	1	-15
b_2	38	59	-13	-26	-4	-32	209	456	-35	-11	25	37	-24	-34
a_1b_1	21	23	1	1	1	1	-49	-35	121	49	85	42	42	42
a_1b_2	59	77	9	9	9	9	-35	-11	49	175	42	93	93	93
a_2b_1	-13	1	-11	1	1	1	37	25	85	42	207	109	42	42
a_2b_2	-13	9	5	9	9	9	25	37	42	93	109	223	93	93
a_4b_2	-26	9	9	-8	9	9	1	-24	42	93	42	93	162	93
a_5b_2	-4	9	9	9	14	9	-15	-34	42	93	42	93	93	152

$$\begin{aligned}
k_5 &= \frac{1}{6} \left[(173.53 + 314.41 + \dots + 129.86) - \frac{2}{5} (141.55 + 127.05 \dots \right. \\
&\quad \left. + 113.93 + 114.58) \right] \\
&= \frac{1}{6} (976.71 - 517.66) \\
&= 76.50
\end{aligned}$$

bulunur. Aynı şekilde k_3 katsayısı ile ilgili dilimin inversi alınarak,

$$Z = \begin{bmatrix} .006594 & -.001822 \\ -.001872 & .003777 \end{bmatrix}$$

$$Z^{-1} = \begin{bmatrix} 174.97 & 84.38 \\ 84.38 & 305.44 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
k_3 &= \frac{1}{3} \left[(174.97 + 305.44) - \frac{2}{2} (84.38) \right] \\
&= \frac{1}{3} (480.41 - 84.38) \\
&= 132.01
\end{aligned}$$

bulunur. İnteraksiyona ait k_1 katsayısında benzer şekilde varyans-kovaryans

invers matrisinde kendisiyle ilgili dilimin yeniden inversinin alınmasıyla,

$$\begin{aligned}
k_1 &= \frac{1}{14} \left[(105.16 + 122.25 + \dots + 148.00) - \frac{2}{6} (24.59 + 93.34 + \dots + 95.61 + \right. \\
&\quad \left. 89.97) \right] \\
&= \frac{1}{14} (950.20 - 346.38) \\
&= 43.13
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

k_2 ve k_4 Katsayılarının Hesaplanması:

Bunun için belirli matrislerin inversini almak gerekir. Bu sebeple her iki katsayı için Nij matrisi teşkil edilir ve daha sonra birleştirilmiş toplamalar

matrisinden katsayıları hesaplanır. k_4 için teşkil edilen Nij matrisi Tablo 5 de gösterilmiştir. Bu tabloda NN' çarpımı gerçekleştirilirse, meydana gelecek katsayılar matrisi şöylece bulunur. Meselâ

Tablo 6. k₄'ün Hesaplanması İçin Teşkil Edilen N_{ij} Matrisi

	b ₁	b ₂	b ₃	a _{1b1}	a _{1b2}	a _{1b3}	a _{2b1}	a _{2b2}	a _{2b3}	a _{3b1}	a _{3b2}	a _{3b3}	a _{4b2}	a _{4b3}	a _{5b2}	a _{6b2}
	29019	13895	4909	841	5625	49	3025	3969	4489	1849	2601	1764	676	1849	1024	729
b ₁	5715			841						1849						
b ₂	5715	13895			5625		3025				2601					
b ₃	13895		9409			49										
a _{1b1}	9409			841					4489							
a _{1b2}	841	5625			5625											
a _{1b3}	5625					49										
a _{2b1}	49		49				3025									
a _{2b2}	3025	3969						3969								
a _{2b3}	3969								4489							
a _{3b1}	4489		4489							1849						
a _{3b2}	1849										2601					
a _{3b3}	2601	2601										1764				
a _{4b2}	1764												676			
a _{4b3}	676	676														
a _{5b2}	1849		1849											1849		
a _{5b3}	1024	1024													1024	
a _{6b3}	729		729													729
a _{6b2}	529															529

$$x_{11} = 29^2 + 75^2 + 55^2 + \dots 27^2 + 23^2 = 29019$$

$$x_{12} = 29^2 + 55^2 + 43^2 = 5715$$

v.b.

böylece bütün elemanlar tamamlandıktan sonra Tablo 6 daki matris elde edilir. Bu katsayılar matrisine $\sum a_i = \sum b_j = 0$ kısıtlaması uygulanırsa, Tablo

7 deki şekle dönüşür. Bu indirgemeye bir misâl olarak μ denklemini verelim. Tablo 6 dan μ denklemi;

$$\begin{aligned} & 29019 \mu + 5715 b_1 + 13895 b_2 + (-9409 b_1 + 9409 b_2) + \\ & 841 a_1 b_1 + 5625 a_1 b_2 + (-49 a_1 b_1 - 49 a_1 b_2) + 3025 a_2 b_1 + \\ & 3969 a_2 b_2 + (-4489 a_2 b_1 - 4489 a_2 b_2) + (-1849 a_1 b_1 - 1849 \\ & a_2 b_2 - 1849 a_4 b_1 - 1849 a_5 b_1 - 1849 a_4 b_1) + (-2601 a_1 b_2 - \\ & -2601 a_2 b_2 - 2601 a_4 b_2 - 2601 a_5 b_2 - 2601 a_6 b_2) + (1764 a_1 b_1 \\ & + 1764 a_2 b_1 + 1764 a_4 b_1 + 1764 a_5 b_1 + 1764 a_6 b_1 + 1764 a_1 b_2 \\ & + 1764 a_2 b_2 + 1764 a_4 b_2 + 1764 a_5 b_2 + 1764 a_6 b_2) + 676 a_4 b_2 \\ & + (-1849 a_4 b_1 - 1849 a_4 b_2) + 1024 a_5 b_2 + (-729 a_5 b_1 - 729 a_5 b_2) \\ & + (-529 a_6 b_1 + 529 a_6 b_2) \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifadedeki parantezler açılır ve gerekli toplama ve çıkarmalar yapılırsa μ denklemi Tablo 7 deki indirgenmiş şekli alır. Diğer denklemler de teker teker aynı işleme tabi tutularak Tablo 7 tamamlanır. Elektronik hesap makinasıyla inversi alınmış alınmış Tablo 7 deki indirgenmiş katsayılar matrisinin elemanları Tablo 8

de verilmiştir. Başlangıçta Tablo 3 de verilen indirgenmiş matristen a_i faktörü çıkarılır ve inversi alınır, Tablo 8 elde edilir. Böylece k_4 'ün hesaplanması için gerekli olan elemanlar Tablo 7 ve Tablo 8 de mevcut olup, bunlar dolaylı metod için verilen formülde yerine konularak ;

$$\begin{aligned} k_4 &= \frac{1}{5} \left\{ 583 - \left[(.001988) (29019) + (.005093) (15124) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \dots + (.012774) (6118) \right] - 2 \left[(.00588) (-3694) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. (-.000455) (4486) + \dots + (-.002639) (4365) + (-.003563) (4365) \right] \right\} \\ &= \frac{1}{5} \left[583 - (776.791259 - 358.603346) \right] \\ &= \frac{1}{5} (583 - 418.187913) \\ &= 32.96 \end{aligned}$$

bulunur. Aynı işlemin b_j faktörünün denklemden çıkartılıp takip edilmesi

halinde k_2 katsayısı hesaplanır. İlgili matrisler hesaplandıktan sonra ;

Tablo 7. K_4 'ün Hesaplanmasında Kullanılan İndirgenmiş N_{ij} Matrisi

	b_1	b_2	a_1b_1	a_1b_2	a_2b_1	a_2b_2	a_4b_2	a_5b_2
	29019	4486	707	4739	-1549	-1357	-2010	-542
b_1	-3694	9409	-2723	-1715	3901	2725	85	-1035
b_2	15124	23304	-1715	1309	2725	4093	-1840	-2612
a_1b_1	4486	9409	-2723	1813	3613	1764	1764	1764
a_1b_2	707	-1715	4503	10039	1764	4365	4365	4365
a_2b_1	4739	1309	1813	1764	11127	6253	1764	1764
a_2b_2	-1549	2725	3613	4365	6253	12823	4365	4365
a_4b_2	-1357	4093	1764	-4365	1764	4365	6890	4365
a_5b_2	-2010	-1840	1764	4365	1764	4365	4365	6118
	-542	-2612	1764	4365	1764	4365	4365	6118

$$\begin{aligned}
k_2 &= \frac{1}{2} \left\{ 583 - \left[(.002928) (29019) + (.013207) (12729) + \dots \dots + (.012521) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. (6890) + (.013511) (6118) \right] - 2 \left[(-.000239) (301) + (-.002008) (5269) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \dots + (-.002082) (4365) + (-.003218) (4365) \right] \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left[583 - (1422.980195 - 908.635278) \right] \\
&= \frac{1}{2} (583 - 514.34491) \\
&= 34.32
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Elde edilen bütün bu k_1 , k_2 , k_3 , k_4 , ve k_5 değerleri, Tablo 1 de verilen denklemlerde yerine konarak kareler ortalamalarına eşitlenir ve

bu denklemler serisinin çözülmesi ile σ_a^2 , σ_b^2 , σ_{ab}^2 ve σ_e^2 unsurlarına ait mutlak değerler tahmin edilmiş olur.

K A Y N A K L A R

- Crump, S.L. 1946. The estimation of variance components in analysis of variance. *Biometrics* 2: 7-11.
- Crump, S.L. 1951. The present status of variance component analysis, *Biometrics* 7: 1-16.
- Eisenhart, C. 1947. The assumptions underlying analysis of variance. *Biometrics* 3: 1-21.
- Henderson, C.R. 1948. Estimation of general, specific and maternal combining abilities in crosses among inbred lines of swine. Unpublished Ph. D. Thesis. Iowa State Univ. Library. Ames, Iowa.
- Henderson, C.R. 1953 Estimation of variance and covariance components. *Biometrics* 9: 226-252.
- Harvey, w.R. 1960 Least - squares analysis of data With unequal subclass numbers. U.S.D.A.A. R. S. 20 - 8.
- Harvey, w.R. 1964. Computing procedures for a generalized least - squares analysis program. Presented at the analysis of variance conference, Colorado State University, Ft. Collins. Colorado.
- Karataş, Ş. 1967. Atatürk Üniversitesi Meriç Sürüsünde Bazı Parametreler ve Tahmin Metodları. A.Ü. Zir. Fak. Ziraî Araş. Enstitüsü Bülteni No. 20. Erzurum.
- Searle, S.R. and C.R. Henderson, 1961. Computing procedures for estimating components of variance in the two-way classification, mixed model. *Biometrics* 17: 607-616.
- Vanlı, Y. 1974. Atatürk Üniversitesi Morkaraman Sürüsünde Yapağı ve Süt Verimi Özelliklerinin Fenotipik ve Genetik Parametre Tahminleri. A.Ü. Ziraat Fakültesi Basılmamış Doktora Tezi. Erzurum.