# CES Fonksiyonlarında Tahmin ve Tanımlama Problemi III.

Çeviren: Prof. Dr. Kutln Yaşar ZORAL

Marc Nerlove

Bu kısımda Kmenta (1964) ve Maddala ile Kaddane'nin (1965) araştırmalarından yararlanarak CES fonksiyonlarının tahmininde simültane eşitliklerden çıkan çeşitli problemler tartışılacaktır.

CES fonksiyonu çoğunlukla aşağıdaki gibidir;

(1) $V = \gamma[\sigma K^{-p}+(1-\sigma)L^{-p}]^{-1/p}$

Fonksiyon belli bir mertebeden homojen tutularak ölçeğe değişen getiriye yer verildiğinde;

(1') $V= \gamma[\sigma K^{-p}+(1-\sigma)L^{-p}]^{-\mu/p}$

olmaktadır.

V reel anlamıyla ele alınmaktadır, w ücret haddini, r de sermayenin geri oranını göstermektedir. ρ nihai outputun fiyatıdır. (1'). denkleme bir çarpan gibi bakiye $u_0$ ilave ediliyor. Yani (1'). denklemde (1). denklemdeki olmayıp dır. Sistemde altı değişken yer almaktadır:

Müteşebbisin kâr maksimizasyonunu esas aldığı kabul edildiğinde (1') denkleme göre,

(2) pV - w L - r K

olur ve p, w ve r veri kabul edildiğinde altı değişkeni ilişkilendiren iki denklem daha elde edilir. Marjinal şartlarda,

$$
(3)\quad \begin{aligned}
P &= \lambda \\
w &= \lambda\mu(1-\sigma)\, L^{-(1+p)}\, V^{1+p/\mu}\, \gamma^{-p/\mu} \\
r &= \lambda\mu\, \sigma K^{-(1+p)}\, V^{1+p/\mu}\, \gamma^{-p/\mu}
\end{aligned}
$$

olur. Burada λ faktör fiyatlarını sabit tutan marjinal masraftır, diğer bir ifadeyle

(4) $\lambda = \frac{\partial C}{\partial V} = \frac{\partial[wL+rK]}{\partial V}$

dir. Bu eşitlikte L ve K, (1') - (3)'ü sağlayan denge değerleridir. (1') - (3) eşitlikleri değişik şekillerde yazılabilir. Kâr maksimizasyonunda bazı aksaklıkların bulunması halinde p, w ve r çarpanları gibi $u_1$, $u_2$, $u_3$ faktörleri denkleme sokulabilir.

(x) Recent Emprical Analysis of Production Functions NBEK. New York 1967.

(1')-(3) denkleminin akla gelen ilk şekli, kâr maksimizasyonu şartları altında, üretim fonksiyonundan doğrudan doğruya basit çarpma işlemiyle elde edilebilir;

$$(6) \begin{cases} \dfrac{V}{L} = a \left(\dfrac{w}{p}\right)^{1/1+p} V^{-p(1-\mu(/\mu(1+p)} \\ \dfrac{V}{K} = b \left(\dfrac{r}{p}\right)^{1/1+p} V^{-p(1-\mu)/\mu(1+p)} \end{cases}$$

burada,

$$a = \mu^{-1/1+p} \gamma^{p/\mu} (1-\sigma)^{-1/1+p}$$

$$b = \mu^{-1/1+p} \gamma^{p/\mu (1+p)} 6^{-1/1+p}$$

dir. Ölçeğe sabit getiri olduğu zaman $\mu = 1$ dir ve (5). denklem sisteminin birinci eşitliği ACMS tarafından tahmin edilen denkleme dönüşmektedir. Sermaye verileri veya sermayenin getiri oranına ait bilgiler mevcut değilse ACMS ikinci denklemin tahminini yapmaktadır.

Eğer $\mu = 1$ ve (5). denklem sisteminde w, r ve p bakiyelerden bağımsız ise

$$U_o^{p/\mu(1+p)}$$

olur. Kâr maksimizasyonunda bir aksaklık yoksa eşitlik için en uygun tahmin metodu en küçük karelerdir. Denklem bulunduktan sonra ikame elastikiyeti $1/(1+p) = \sigma$ nin tahmini yapılabilir (1) Veriler yeterliyse (5). denklem sistemindeki iki eşitlik birbiriyle bölünerek bir araya getirilebilir.

$$(6) \quad \frac{K}{L} = \left[\frac{\sigma}{1-\sigma}\right]^{1/1+p} \left(\frac{w}{r}\right)^{1/1+p}$$

Ancak bu son eşitlikte $\gamma$ bulunmamaktadır ve bu nedenle denklem kâr maksimizasyonunda herhangi bir aksaklık yoksa geçerlidir. Bir de, (6) nolu denklemi basit en küçük kareler metoduyla tahmin etmek mümkün değildir.

(6). eşitlik alternatif tahmin metodu getirmektedir. Eğer bir zaman süresinde ele alınan sanayide toplam talep dalgalanmalar gösteriyor ise sanayiye ait outputun random tesirlerden ve (6). eşitlikteki bakiyelerden bağımsız olduğu kabul edilebilir. Böylece, log V'yı yardımcı değişken (instrumentul variable) gibi kullanarak $\sigma = 1/(1+p)$ ve $\sigma / (1-\sigma)$ ile $\sigma$ ve p'nin tutarlı tahminleri elde edilebilir. Bu tahminler (1'). denklemde yerlerine konduğunda,

$$(7) \quad V = \gamma z^{\mu}$$

elde edilir, eşitlikte

$$z = \left[ \hat{\sigma} K^{-\hat{p}} + (1-\hat{\sigma}) L^{-\hat{p}} \right]^{-1/\hat{p}}$$

Burada önemle üzerinde durulması zorunlu nokta unutulmamalıdır. Üretim fonksiyonunda K ve L bakiyelerden bağımsız değilse log V'nin log Z'ye göre en küçük karelerle elde edilen regresyonundan $\mu$ ile $\gamma$ 'nin tutarlı tahminleri yapılamaz. Kmenta (1964) bu durumda önemle işaret etmektedir. Bu nedenle üretim fonksiyonunun tahmi-

(1) Tahminde iterativ metodun yöntemini Hilhorts (1961) veriyor. Bak, Brown (1962, p. 19).

ninde direkt metodların daha kullanışlı olduğu ortaya çıkar.

Doğrusal olmayan üretim fonksiyonları hala en küçük kareler metoduyla tahmin edilmektedir(1). Kmenta'nın izah ettiği yolu takip ederek ve (1') denklem Taylor serilerinin açılımıyla birinci ve ikinci mertebeye eriştirilebilir.

(1') denklem aşağıdaki gibi yapılabilir;

$$(8)\ \log V = \log \gamma - \frac{\mu}{p} f(p) + \log u_o$$

Bu eşitlikte

$f(p) = \log\ [\sigma K^{-p} + (1\text{-}\sigma)\ L^{-p}]$ dir. ACMS'nin amprik bulgularından yararlanan Kmenta'nın yolu takip edilirse f(p) nin $p = 0$ değerinin çevresinde açılımı yapılır. Burdaki $p=0$ değeri $\sigma = 1$ değerine tekabül etmektedir. Böyle bir açılım Cobb-Douglas durumunda ;

$$(9)\quad f(p) = -p\ [\sigma \log K + (1\text{-}\sigma) \log L] + \frac{1}{2}\ p^2\ \sigma (1\text{-}\sigma)\ [\log K - \log L]^2 + \text{daha}$$

yüksek terimler

olur. p'deki ikinci mertebeden yüksek terimler dışta bırakılırsa, logaritmik dönüşümle (1'). eşitlik aşağıdaki gibi yazılabilir ;

$$(10)\quad \begin{aligned} \log V = {} & \text{lof}\ \gamma - \frac{\mu}{p}\Big[ -p\ [\sigma \log K + (1\text{-}\sigma) \log L] \\ & + \frac{1}{2}\ p^2\sigma\ (1\text{-}\sigma)\ [\log K - \log L\Big]^2 + v \\ = {} & \log \gamma + \mu\ \sigma\ \log K + \mu\ (1\text{-}\sigma) \log K \\ & - \frac{\mu p}{2} 6\ (1\text{-}6)\ [\log K - \log L]^2 + v \end{aligned}$$

Denklem (10) daki katsayıların tahminleri varsa, $\gamma$, $\mu$, $\sigma$ ve p de bunların fonksiyonu olarak tahmin edilebilir. Elde edilen tahminlerin standart hataları Klein'in (1953, p. 258) izah ettiği yolla hesaplanabilir. Bu son eşitlikte sermaye işgücü oranının logaritmik dönüşümünün karesi Cobb-Douglas durumundan ayrılışı ifade etmektedir (bu terim $p = 0$ halinde ortadan kalkmaktadır). Kmenta'nın (1964), p. 7) hesaplamaları (ikinci mertebeden terim dahil olmak üzere) sermaye -işgücü oranı ile ikame elastikiyeti çok büyük veya küçük olmadığı sürece hesaplamalarda yüksek mertebeden terimlerin dışta bırakılmasından doğan hatanın önemli olmadığını göstermektedir. İkinci mertebeden terim alınmadığında hatanın önemli olacağı iddia edilebilir. Sermaye ve işgücü inputları $u_o$ ile bağıntılı olmassa bile V ile bağıntılıdır. Dışta bırakılan terimin katsayısı negatiftir. Bundan ötürü Cobb-Douglas fonksiyonunun en küçük karelerle yapılan tahminlerinde sermayeye göre outputun elastikiyeti çok küçük, emeğe göre elastikiyet tahmininin ise çok büyük çıkmasına yol açılmaktadır. Bu, sermaye ve işgücü ile fonksiyonunun bakiyesi arasında bağımsızlığın var olmaması halinde ortaya çıkan güçlüklerden ayrı bir güçlüktür.

---

(1) Kmenta'nın (1964) verdiği referanslara bak, Kanney ve Keeping ve Davidon.

Bir firma örneklemesiyle işe başladığımızı farz edelim. Belirli şartlar altında, böyle bir örneklemede işgücü ve sermayenin üretimindeki bakiyelerle bağıntılı olmadığı kabul edilebilir. Örneğin, müteşebbis yönünden bakiye bir şans elemanı ise, bağımsızlık varsayımı beklenen kâr maksimizasyonununa dayanıyor demektir. Ancak tarımın dışında bu şartların gerçekleşmesi mümkün kün değildir. Firmaların yatay kesit'inde (cross-section) bakiyelerin firmalar arasındaki farklılıkları aksettirtiğini farzetmek genellikle geçerlidir. Firmanın elinde bulunan ve ölçülmeyen diğer faktörlerin varlığı müteşebbis tarafından biliniyor ve bu farklılıklarda input seviyelerinin tesbitinde rol oynuyor ise, inputlarla bakiyeler arasında bir korelasyon meydana gelmektedir. Zaman içinde gözlenen firmalardan elde edilen verilerde de aynı problem vardır. Bu durumda bakiye kaale alınmayan değişkenleri temsil etmektedir. Çünkü üretim fonksiyonu iyi tesbit edilememiştir yahut diğer faktörler iyi belirlenememiştir. Bütün bunlar gösteriyor ki genellikle üretim fonksiyonunu direkt olarak tahmin etmek için bütün şartlar sağlanamamaktadır.

Faktör ve output fiyatları bütün gözlemler için sabitse (böyle bir durum faktör akımının aksaksız bir şekilde gerçekleştiği tam rekabet halindeki endüstrilerden yapılan örneklemelerde söz konusudur) (1). üretim fonksiyonu ve (5). denklemde gösterilen kâr maksimizasyonu şartları altında, output ve faktör input seviyesi üretim fonksiyonunun bakiyesi $u_o$ ($\gamma$ parametresiyle ilişkili) ile kâr maksimizasyonundaki aksaklıkların $u_1$, $u_2$ gibi ($\gamma/p$ ve $w/p$ ile ilişkili) fonksiyonları şekilde belirlenebilir. (10). eşitliğin logaritmik dönüşümü

$$x_0 - \mu\sigma x_1 - \mu(1-\sigma)\, x_2 + \frac{1}{2}\, p\mu\sigma(1-\sigma)(x_1-x_2)^2 = k_o+v_o$$

$$(11) \qquad (1+\frac{p}{\mu})\, x_o - (1+p)\, x_1 = k_1+v_1$$

$$(1+\frac{p}{\mu})\, x_o \qquad -(1+p)\, x_2 = k_2+v_2$$

olur. Bu denklem sisteminde;

$x_0$ = Log V
$x_1$ = Log L
$x_2$ = log K
$V_1$ = log $u_i$ , $i=0,1,2$
$k_0$ = log $\gamma$
$k_1=-\log(\frac{w}{\rho})^{-1}\mu\ (1-\sigma)\gamma^{\rho/\mu}$
$k_2=-\log(\frac{r}{\rho})^{-1}\mu\sigma\gamma^{\rho/\mu}$

Genellikle (11). denklemlerin parametleri bilinmez. Ancak $V_0$, $V_1$ ve $V_2$ random değişkenlerinin birlikte dağılımı hakkında yeterince kesin varsayımlar yapabildiği takdirde, Kmenta'nın (1964) gösterdiği gibi, parametlerin tahminine gidilebilir.

İstatistiki bakımdan yapılabilecek varsayımlardan en uygunu, gözlemden gözleme $V_0$, $V_1$, $V_2$ bakiyelerinin bağımsızlığı ve bunların aynı sıradaki varyans kovaryans matrikslerinin diyagonallığıdır. Gerçi bu varsayımların da ekonometrik yönü aydınlatılmış değildir. Örneğin, firmaların yatay kesit verileriyle uğraşılıyor ise $V_1$ ve $V_2$ ile gösterilen kâr maksimizasyonundaki aksaklıklar biribiriyle bağıntılı olmayacaktır. Firmalar zaman süresi içinde inceleniyorsa üretim fonksiyonunda kale alınmayan ve $V_0$ ile gösterilen faktörler, şansa bağlı olarak marjinal üretim şartlarına aksettirilecektir. Bir de, bu faktörler şansa bağlı olarak sıra korelasyonludurlar. Sistemde egzojen değişkenler yoksa tanımlama (indentification) karmaşık bir hal alır ve ancak geçerli olmayan varsayımların yardımıyla tanım yapılabilir. Yukarıdaki varsayımlar yapıldığında maksimum olasılık tahmin (maksimum-likeliood) yöntemi için geçerli tüm bilgiler var demektir. Kmenta (1964, p. 24-26) bu yöntemin aşağıdaki iki aşamalı en küçük kareler metodona eşit olduğunu göstermektedir;

Z'lerin tarifi,

$$Z_1 = \varphi\, x_0 - x_1$$
$$Z_2 = \varphi\, x_0 - x_2$$
$$Z_3 = (x_1 - x_2)^2$$

şeklinde yapılıyor ve burada $\varphi = (1 + p/\mu)\,(1+p)$ dir.

$v_1$ ve $v_2$ bağımsız kabul edildiklerinden, (11). denklem sisteminin ikinci ve üçüncü eşitlikleri ;

$$(12)\quad Cov\,(v_1, v_2) = 0 = \varphi^2\, var\,(x_0) - \varphi\,[cov\,(x_0, x_1) + Cov\,(x_0, x_2)] + Cov\,(x_1, x_2)$$

olduğunu göstermektedir. Sağ taraftaki kovaryansların yerine bunların örneklemeden tahmin edilen değerleri konulursa $\varphi$ nın uygun (consistant) tahmini (12) eşitlik çözülerek elde edilebilir. (12). eşitliğin gerçek köklerinin bulunduğu ispatlanabilir, ancak bu köklerden hangisinin kullanılacağı sorunu çıkmaktadır Bu sorun da maksimum olasılık fonksiyonuna istinaden çözümlenebilir eğer; $p > 0$, $0 < \sigma < 1$, ve $0 < \mu < 1$ ise küçük karekök değerinin olasılık fonksiyonunun en büyük değerini vereceği ispatlanabilir. $\varphi$ nin uygun $\varphi$ tahmini elde edilince, yukarıdaki tarife uygun biçimde $Z_1$, $Z_2$, ve $Z_3$ denklemleri ile

$$(13)\qquad x_0 = a_0 + a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3 + \epsilon$$

teşkil edilebilir. Bu eşitlikte,

$$a_0 = k_0/(1-\mu\varphi)$$
$$a_1 = -\mu/(1-\mu\varphi)$$
$$a_2 = -\mu(1-\sigma)/(1-\mu\varphi)$$
$$a_3 = p\mu\sigma(1-\sigma)/Z(1-\mu\varphi)$$
$$\varepsilon = V_0/(1-\mu\varphi)$$

Böylece, $a_i$ $(i = 0,1,2,3)$ nin tahminleri yapıldığında p, $\mu$, $\sigma$ ve $k_0$'da tahmin edilmiş olur. Zira, (11). sistemin ikinci ve üçüncü eşitliklerinden,

$$(14)\quad Z_i = \frac{k_i + V_i}{1+p}\ , \ i = 1,2$$

ve

$$Z_3 = (x_1 - x_2)^2$$

$$= \frac{(k_1 - k_2 + V_1 - V_2)^2}{(1+p)^2} \qquad (15)$$

elde edilir. Buna ilaveten, $V_0$, $V_1$, $V_2$'nin bağımsızlığı varsayıldığında $Z_i$ $(i = 1, 2, 3)$ de $\varepsilon$ den bağımsızdır. Bu durumda, $a_i$'nin $(i = 0,1,2,3)$ en küçük karelerle (13). denklemden yapılan tahminleri uygun (Consistant) olmaktadır. Nitekim, Kmenta (1964) (12). denklem kullanılarak $\hat{\varphi}$ tesbit edildiğinde $a_i$ tahminlerinin kesinlikle maksimum olasılık tahminlerinin niteliğini taşıdığını kanıtlamaktadır.

Fiyatlar gözlemden gözleme değişiyorsa tahminler geniş bir değişkenlik gösterecek ve büyük bir hata riski tahminlerin seçiminde ortaya çıkacaktır. (1') ve (3). denklemleri V,L,K,p,w ve r değişkenlerinden herhangibirinin tesbiti için kullanılabilir. Ancak, tam rekabet şartları altında işletme ölçeğinin tesbit edilemediği, yani arz elastikiyetinin tam elastik olduğunu gösteren $\mu = 1$ durumunda bu değişkenler belirlenemez.

(1') ve (3'). denklemlerden kullanılabilir sonuçlar elde etmek için öncelikle masraf fonksiyonunun çıkarılması ile işe başlanmalıdır. Sonra marjinal masraf fiyata eşitlenir ve nihayet bulunan değerler (3). denklemde yerlerine konur. Böylece arz fonksiyonu ile üretim faktörleri için iki tane türev talep fonksiyonu elde edilmiş olur. Gerçekte bu fonksiyonlar, V,L ve K endojen değişkenlerle p,w ve r egzojen olarak ele alındığında daha da indirgenebilir. (3). denklemden ve toplam faktör masrafları kale alınarak,

$$(16)\ \frac{C}{pv} = \frac{w}{p}\frac{L}{v} + \frac{r}{p}\frac{K}{v} = \frac{w}{p}\left[a^{-1}\left(\frac{w}{p}\right)^{-1/1+p} V^{p(1-\mu)/(\mu(1+p))}\right]$$

$$+\frac{r}{p}\left[b^{-1}\left(\frac{r}{p}\right)^{-1/1+p} V^{p(1-\mu)/\mu(1+p)}\right]$$

$$=\left[a^{-1}\left(\frac{w}{p}\right)^{p/1+p} + b^{-1}\left(\frac{r}{p}\right)^{p/1+p}\right] V^{p(1-\mu)/(1+p)}$$

eşitliği elde edilir. Buradan marjinal masraf,

$$(17)\quad \lambda = \frac{\delta c}{\delta v} = p\left[a^{-1}\left(\frac{w}{p}\right)^{p/1+p} + b^{-1}\left(\frac{r}{p}\right)^{p/1+p}\right] V^{p(1-\mu)/(1+p)}$$

$$\left[1 + \frac{p(1-\mu)}{\mu(1+p)}\right] = \frac{C}{V}\ \frac{\mu - p}{\mu(1+p)}$$

Marjinal masraf fiyata eşitlenirse arz fonksiyonu bulunur,

$$\left[a^{-1}\left(\frac{w}{p}\right)^{p/1+p} + b^{-1}\left(\frac{r}{p}\right)^{p/1+p}\right] V^{p(1-\mu)/\mu(1+p)} + \frac{\mu + p}{\mu(1-p)}$$

$\mu = 1$, yani ölçeğe sabit getiri için $\rho$ çözülürse arzın bu durumunda tam elastik olduğu görülür,

$$p = \left[a^{-1}\, w^{p/1+p} + b^{-1}\, r^{p/1+p}\right]^{1+p/p}$$

genellikle. $\mu \neq 1$ olmadığı durumlarda;

$$(18)\quad V = \left[ \propto \left(\frac{w}{p}\right)^{p/1+p} + \beta\left(\frac{r}{p}\right)^{p/1+p} \right]^{(1+p)/p\,(1-\mu)}$$

dir ve burada,

$$\propto = \frac{\mu + p}{\mu(1+p)} a^{-1}$$

$$\beta = \frac{\mu + p}{\mu(1+p)} b^{-1}$$

(18). denklemden V ve = , (3). denklem sisteminin ikinci ve üçüncü eşitliklerinde yerlerine konulduğunda sermaye ve iş gücü için türev talep elde edilir;

$$L = \frac{\mu(1+p)}{\mu + p}\, \alpha \left[\frac{w}{p}\right]^{-1/1+p} \left[\alpha \left(\frac{w}{p}\right)^{p/1+p} + \beta \left(\frac{r}{p}\right)^{p/1+p}\right]^{(1+p)(\mu+p)/p(1-\mu)}$$

$$(19)\quad K = \frac{\mu(1+p)}{\mu+p}\, \beta\left[\frac{r}{p}\right]^{-1/1+p} \left[\alpha\left(\frac{w}{p}\right)^{p/1+p} + \beta\left(\frac{r}{p}\right)^{p/1+p}\right]^{(1+p)\,(\mu+p)/p\,(1-\mu)}$$

Eğer p,w ve r egzojen iseler (18) ve (19) denklemler indirgenmiş en uygun eşitliklerdir ve bilinen özellikleriyle en küçük kareler metodu uygulanabilir. Ancak eşitlikler doğrusallıktan bir hayli uzaktır. Bu nedenle iteratif bir yöntemin seçilmesi yahut kmenta'nın (1964) ileri sürdüğü biçimde doğrusallığa dönüştürme işleminin uygulanması gerekmektedir. Bir de, eşitliklere sadece parametre giriyor, halbuki daha fazla kat sayı bulunuyor. Bu durumda eşitliklerde ve eşitlikler arasında bazı kısıtlamalara gidilmesi gereklidir. Ancak bu kısıtlamalara gidilirken bunların çeşitli eşitliklerde meydana getireceği aksaklıklar (disturbances) arasındaki ilişkinin (aralarında hiç bir ilişki olmayabilir) özellikleri çok iyi saptanmalıdır.

Kâr maksimizasyonu için hiç bir aksaklık söz konusu değilse, her üç eşitliğe giren bakiye aynıdır, yani üretim fonksiyonunun kendisine ait bakiyedir. Bu durumda, üç eşitliği denge durumundaki net kârı fiyatın fonksiyonu gibi ifade eden bir tahmin eşitliği içinde bir araya getirmede fayda var,

$$\Pi = pV - wL - rK$$

$$(20)\quad = \left[p - \frac{\mu(1+p)}{\mu+p}[Q]^{p/p(1-\mu)}\right] \left[\alpha w\left(\frac{w}{p}\right)^{-1/1+p} + \beta r\left(\frac{r}{p}\right)^{-1/1+p}\right] \left[(Q)\right]^{\mu(1+p)/1-\mu)p}$$

Bu eşitlikte $Q = \alpha(w/p)^{p/1+p} + \beta(r/p)^{p/1+p}$ dir. $\alpha$ ve $\beta$ terimleri bakiye elemanlarını içermektedir ve bu elemanlar faktörlere ayrılabilir. Bunların dağılımı ile ilgili varsayımdan sonra maksimum olasılık metodları uygulanabilir. Genellikle, doğrusal olmayan denklemlerde nümerik metodlarla çözümlenebilir.

Kâr maksimizasyonunda aksaklıkların bulunmadığı varsayımın geçerli olmadığı ileri sürülebilir. (1') ve (3). denklemlerin tümünde bakiyeler elemanlarına yer verilirse (18) ve (19). denklemlerdeki bakiyelerin hepsi farklı olabilir. Fiyatların egzojenliği varsayımı muhafaza edilirse, (18) ve (19). denklemlerdeki bakiye elemanlarının birlikte dağılımı (joint distibution of the residual elements) belirtilerek maksimum olasılık metodlarının kullanılmasına gidilebilir. Bundan böyle bağımsızlığı belirtmeye lüzum yoktur ve gerçekten bakiyelerin multivariyet normal dağılımı takip ettiğini ve bağımsız olduklarını farzedersek arz ve türev talep eşitliklerinde bakiyelere ait kovaryansların tahminlerini hesaplayabiliriz. Kmenta (1964, p. 17-19) hesaplama yönünden maksimum olasılık yönteminden daha basit olan iki aşamalı en küçük kareler yöntemini tavsiye etmektedir. Bu hesaplama usulünde önce sermaye- işgücü oranının faktör fiyatları oranıyla logaritmik regresyonundan ikame elastikiyeti tahmin edilmekte ve sonra bu neticeler diğer bir denklem sisteminde kullanılarak parametrelerin tahmini yapılmaktadır. Ben, Kmentanın iki aşamalı yönteminin yukarıda izah edilen maksimum olasılık metodu kadar etkin olduğunu tahmin ediyorum, ancak bu etkinlik her üç eşitlikte bakiyelerin bağımsız olduğu farzedildiğinde geçerlidir. Eğer bakiyeler bağımsız değilseler maksimum olasılık metodu daha avantajlı görülmekte, en azından hesaplamanın kolaylığı yönünden tercih edilmektedir.

Output ve faktör fiyatlarının egzojen olduğunu kabul edelim. Output fiyatı ise endojendir. Bu durumda (18) ve (19). denklemler kullanılabilir. Output fiyatı veri olarak alındığında gerçek faktör fiyatları egzojendir ve firmanın kâr maksimizasyonu yerine masrafları minimize ettiği farzedilmektedir, Bütün bu varsayımlar kontrol altında bulunan endüstrilere ait çalışmalarda bir modelin uygulanmasına imkân vermektedir(1). Bu durumda arz fonksiyonundan vaz geçilmekte, sistem (1') nolu üretim fonksiyonu ile üretim faktörlerinin türev talep fonksiyonundan meydana gelmektedir. Buradaki faktör talep fonksiyonun faktörlere ait denge seviyesi, (5) nolu fonksiyonda belirtildiği gibi output seviyesine bağlıdır. Bu ilişkileri açıklıyan eşitliklerin de bazı parametreleri vardır ve denklem içi ve denklemler arası kısıtlamaların yapılması gerekmektedir. Bunu yapmanın eu basit yolu üç ayrı fonksiyon yerine bir masraf fonkfsiyonu kurmaktır. Masraf fonksiyonu (17). denk lemdeki p= γ nin (16). denklemde yerine konmasıyla elde edilebilir;

$$C = p^{1/1+p}\left[a^{-1} w^{p/1+p} + b^{-1} r^{p/1+p}\right] V^{(\mu+p)/\mu(1+p)}$$

$$(21) \quad = \left[\frac{C}{V}\,\frac{\mu+p}{\mu(1+p)}\right]^{1/1+p}\left[a^{-1} w^{p/1+p} + b^{-1} r^{p/1+p}\right] V^{(\mu+p)/\mu(1+p)}$$

$$= \frac{\mu(1+p)}{\mu+p}\left[\alpha\, w^{p/1+p}\; \beta r^{p/1+p}\right]^{1+p/p} V^{(1-\mu)/\mu}$$

(1) Cf. Nerlove (1963)

Görüldüğü gibi, fonksiyon doğrusallıktan bir hayli uzaktır. Çözümünde direkt iterativ yöntem uygulanmalı yahut Kmenta'nın (1964) CES fonksiyonu ile ilgili açıklamaları doğrultusunda bir yaklaşıma gidilmelidir. Eldeki Fonksiyon,

$$(22) \qquad \log C = A^* + \left(\frac{1-\mu}{\mu}\right) \log V + \left(\frac{1+p}{p}\right) f(p) + V^*$$

dir ve bu fonksiyonda

$$A^* = \log \frac{\mu(1+p)}{\mu+p} + \frac{1+p}{p} \log \left[ \frac{\mu+p}{\mu(1+p)} \mu^{1/1+p} \gamma^{-p/\mu(1+p)} \right]$$

$$f(p) = \log \left[ \sigma^{1/1+p} w^{p/1+p} + (1-\sigma)^{1/1+p} \gamma^{p/1+p} \right]$$

p = O etrafında Taylor serisine göre f (p) açılırsa;

$$(23) \quad f(p) = p \left[ \sigma \log w + (1-\sigma) \log r - \sigma \log \sigma - (1-\sigma) \log (1-\sigma) \right]$$

$$+ \frac{p^2}{2} \Big( \sigma(1-\sigma) \left[ \log w - \log r \right]^2 + \sigma \left[ 1 + 2\sigma \log \sigma \right.$$

$$\left. + 2(1-\sigma) \log (1-\sigma) \right] \log w + (1-\sigma) \left[ 1 + 2\sigma \log \sigma \right.$$

$$\left. + 2(1-\sigma) \log (1-\sigma) \right] \log r - \left[ (\sigma \log \sigma + (1-\sigma) \log (1-\sigma) \right]^2$$

$$- \left[ (1-\sigma) \log (1-\sigma) \left[ (1 - \log (1-\sigma) \right] + \sigma \log \sigma \left[ (1 - \log \sigma) \right] \right]$$

$$+ \text{(yüksek mertebeden terimler)}$$

Neticede,

$$(24) \quad \log C = A + \left(\frac{1-\mu}{\mu}\right) \log V + (1+p)\sigma \left[ 1+p \left[ 1 + 2\sigma \log \sigma \right.\right.$$

$$\left. + 2(1-\sigma) \log (1-\sigma) \right] \log W + (1+p)(1-z\sigma) \left[ 1+p \left[ 1 \right.\right.$$

$$\left. + 2\sigma \log \sigma + 2(1-\sigma) \log (1-\sigma) \right] \log r$$

$$+ \frac{(1+p)\, p\sigma\, (1-\sigma)}{2} \left[ \log w - \log r \right]^2 + v$$

olur. Bu eşitlikte A terimi $A^k$ ve buna eklenen σ ile p fonksiyonudur. V ise $V^{\times}$ altı Taylor serisi açılımının yüksek mertebeden terimleridir. Tahmin yönünden (24) nolu denklem kadar basit değildir. p ve σ den ibaret iki katsayıyı belirlemek için elde üç katsayı bulunmaktadır (log w, log r ve $[\log w - \log r]^2$ «nin katsayıları). Bu durumda (24). denklemden üretim fonksiyonunun parametleri aşırı belirlenmektedir (over indenfies). Emsalsiz (unique) tahminler elde etmek, (2). denklemden iterativ metodla tahmin de bulunmak kadar güçtür.

Buraya kadar yaptığımız açıklamalarda, (a) bütün fiyatlar egzojen alınmış output ve faktör input seviyeleri endojen olarak verildiği durumlarla, (b) faktör fiyatları ve output egzojen alındığında, arzın sabit tutulduğu varsayımı altında faktör inputlarının en endojen olarak tayin edildiği durumlar incelenmiştir. Bir diğer cazip durum da, iş gücü inputu, sermeayenin getiri oranı ve uotput fiyatı egzojen olduğunda görülmektedir. Ülke içi karşılaştırmalarda muhtemelen bu durum geçerli olabilir ve belki iş gücünün seyyal olamadığı, sermayenin ise rahatça yer değiştirebildiği ve ticaretin hiç bir tahdide tabi tutulmadığı farzedilebilir. (Birden fazla sanayi dalının varlığı kabul edilirse iş gücünün seyyaliyetsizliği varsayımı geçerliliğini kaybeder, çünkü ülkeler arasında iş gücünün hareketsizliği mümkündür, ancak bir ülke içinde endüstriler arasında iş gücü akımının var olmadığını kabul etmek bir hayli güçtür). Bu durumda (1') ve (3). denklemleri V,K,L cinsinden w ve r ile p için çözülmelidir. İkame elastikiyeti, ölçeğe sabit getiri farzedildiğinde log V/K nın log r/p'ye görregresyonundan kolayca hesaplanabilir. Ölçeğe sabit getiri varsayımı yapılmadığında ve sermaye stoku ile sermayenin getiri oranı bilinmediğinde hesaplamalar çok karmaşık bir şekil almaktadır. Bu durumda maksimum olasılık veya diğer tahmin yöntemlerein gitmek gerekir. Ancak burada en ciddi sorun verilerin noksanlığıdır. Ölçeğe sabit getiri halinde bile, sermaye stoku ve sermayenin getiri oranlarına ait verilerin noksanlığı veya bulunmaması (egzojenlik varsayımları durumu hariç) güvenilir bir ikame elastikiyetinin tahmin edilmesini engellemektedir.

Yeterli veri bulunduğunda mesele doğru bir tahmin metodunun ne olması gerektiğini sormaktan çok, hatalı tahmin yöntemi kullanıldığında ortaya ne derecede farklılık çıktığını araştırmaktadır. Böylece bir yaklaşım Maddala ve Kadane (1965) tarafından benimsenmiştir. Bu araştırmacılar ölçeğe sabit getiriyi ve output fiyat seviyesini sabit farzediyorlar. Ayrıca, üretim fonksiyonunu tahminde doğrusallığı esas alıyorlar. Diğer bir ifadeyle, ele aldıkları sistemde CES fonksiyonuna erişmek için bir Cobb-Douglas fonksiyonu kullanılarak simültane eşitliklerin tesirlerini analiz etmeyi amaçlıyorlar. Bunların sisteminde yalnız üç eşitlik bulunmaktadır.

$$\log V = \log \gamma + \sigma \log K + (1-\sigma) \log L + V_0$$

$$(25)\quad \log \frac{V}{L} = -\frac{1}{1-p} \log \gamma^p (1-\sigma) + \frac{1}{1+p} \log \frac{w}{p} + V_1$$

$$\log \frac{V}{K} = -\frac{1}{1+p} \log \gamma^p \sigma + \frac{1}{1+p} \log \frac{r}{p} + V_2$$

$\frac{W}{p}$, ele alınan şartlarda endojen olduğundan (25). denklem sisteminin ikinci eşitliğinden ikame elastikiyetinin tahminden simültane eşitlikler sapması (bias) söz konusudur.

Analitik olarak simültane eşitlikler sapması tesirlerini belirlemek için W/p ve V/L terimleri L ve r/p'ye göre ifadelendirilebilir, ve bu iki değişken egzojen farzedilebilir. Sonra, (25). denklem sisteminin ikinci eşitliğinden $\sigma = 1/(1+p)$ nin en küçük karelerle tahmini aşağıdaki şekilde yapılabilir;

$$(26)\ \hat{\sigma} = \frac{\mathrm{Cov}\left(\log \frac{V}{L}, \log \frac{w}{P}\right)}{\mathrm{var}\left(\log \frac{W}{P}\right)}$$

burada kovaryanslar örnekleme değerleridir. Bunların yerine anakitle değerleri konulduğunda asımtotik olarak en küçük karelerle bulunan değerlerin ne olduğunu ve bu değerlerin gerçek ile mukayesesi asıtmtotik sapmanın ş(asymtotic bias) ne olduğunu da ortaya çıkaracaktır. Nihayet, (26). denklem sistemine tekabül eden anakitle varyansını ve kovaryansını problemdeki bakiyelerin ve egzojen değişkenlerin varyans ve kovaryanslarıyla gerçek prametreler şeklinde ifade ediyoruz. Ancak, bu yolla meseleye net bir eevap vermiş olmuyoruz üstelik, bakiyelerin ve egjozen değişkenlerin anakitle momentlerindeki simülatane eşitliklerine ait sapmaların (bias) bağımlılığı meseleye genel bir cevap bulmanın mümkün olmadığını gösteriyor. Alternatif bir yaklaşım, bazı stokastik plâna göre bakiyelerin ve egzojen değişkenlerin değerleri ve parametreleri için muhtemel değer tahmin etmektir. Maddala ve Kadane (1965) üç durumda bu yöntemi uyguluyorlar;

(i) L ve r/p egzojen
(ii) K ve L egzojen
(iü) r/p ve $\chi$ egzojen

ve (25). denklemde bakiyelerin varyans-kovaryans matriksi üzerinde de bir çok varsayımlar yapılır. Bu araştırıcılar değişkenlerin seri halinde bağımsızlıklarını var sayıyorlar. (i). durumda L'nin (0; 1,000) ve r/p (0,5) aralıkları ile uniform şekilde dağıldığını farzediyorlar ve logaritmik dönüşümü gerektiren durumlarda negatif değerler ortaya çıkınca bu değerleri de kale almıyorlar.

Bakiyelerin varyans-kovaryans makmaktiksi içinde aşağıdaki varsayımlar yapılıyor ;

A. Tüm saptırmalar (rdisterbunces) aralarında bağıntılı değildir.

B. A'daki varsayımın ayni kabul ediliyor, ancak ekonomik ve teknik saptırmaların nisbi varyansları ters. çevrilmiştir.

C. Bütün saptırmalar pozitif korelasyonludur ve teknik saptırmaların varyansı ekonomik olanınkinden büyüktür.

D. C'deki varsayımlar aynen kabul ediliyor, ancak teknik ve ekonomik saptırmaların nisbi varyansları ters çevrilmiştir.

E. Ekonomik saptırmalar bir hayli korelasyonludurlar fakat teknik saptırmalardan bağımsızdırlar. Ekonomik sapsaptırmalar teknik saptırmalardan daha yüksek varyansa sahitptirler.

Diğer taraftan, bütün bakiyelerin çok değişmkenli normal dağılım gösterdiği kabulediliyor. İkame elastikiyetinin üç gerçek değerinin her biri, $\sigma =$ 0,4, $\sigma = 0,9$, $\sigma = 1,6$ ile $\gamma = 1$ ve $\sigma$ = .3 için örneklemeer yapılmıştır (ancak örneklemenin miktarı verilmiyor). İkame elastikiyetini hesaplamada iki ayrı tahmin yöntemi kullanılıyor. Birinci tahmin log V/L nin log w/p üzerinden regresyonuna, diğeri de log w/p nin log V/L üzerinden hesaplanan regrasyonuna dayanmaktadır. Araştırmacıların L ve r/p egzojenleri için elde ettikleri neticeler tablo 12 de verilmiştir.

Tablo 12 deki gerçek ikame elastikiyetlerinin ACSM metoduyla, $\sigma$ 'nın 1'e yakın olduğu durumlar hariç, açık bir şekilde düşük tahmin edildiği söylenebilir. Çeşitli eşitliklerde bakiyeler arasında bağımlılığın bulunması simültane eşitlik güçlüğünü ağırlaştırmaktadır. Bu güçlüklerden ötürü Maddala ve Kadane log w/p nin V/L'ye göre regresyonunu önermektedirler.

Sonuç olarak, elde yeterli sayıda ve güvenilir veri bulunmadıkça tahmin güçlüklerini gidermek için çok az şey yapılabilir. Diğer taraftan, elde yetirli veri bulunsa bile gene simülatane eşitlikler roblemi, dorusallık güçlükleri ortaya çıkmaktadır. Genellikle bu durumlarda tahmin problemini çözmede en uygun metod maksimum olasılık yaklaşımıdır denilebilir. Üstelik bu metodla çözüm yapmak için bilgisayarlar bulunmaktadır. Kısaca, CES üretim fonksiyonun simültane eşitlikler sisteminden hareketle çözülmesiyle yapılan tahminler için ekonometrik metodlar gelişmekte ve bilgisayar devrimleri de gerçekleşmek üzeredir.

Tablo 12

İkame elastikiyetinin Ortalama Tahminleri ve Tahminlerin Ortalama Varyansı (gerçek ikame elastikiyetinin değişik değerleri ve bakiye varyans-kovvaryanks matriksi var sayılıyor)

| Gerçek ikame elestikiyeti ve regresyon tipi | Bakiye Varyans - Kovaryan Matriksine ait Varsayım A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sigma = 0.4$ | | | | | |
| (i) log $\frac{V}{L}$ bağımlı | | | | | |
| Ortalama tahmin $\hat{\sigma}$ | 0.32 | 0.10 | 0.31 | 0.15 | 0.11 |
| Tahminin ortalama varyansı | (.0018) | (.0034) | (.0027) | (.0038) | (.0009) |
| (ii) log $\frac{w}{p}$ bağımlı | | | | | |
| Ortalam Tahmin $\hat{\sigma}$ | 0.41 | 0.43 | 0.51 | 0.63 | 0.38 |
| Tahmini ortalama varyansı | (.0040) | (.0061) | (.0018) | (.0462) | (.0363) |
| $\sigma = 0.9$ | | | | | |
| (i) log $\frac{V}{L}$ bağımlı | | | | | |
| Ortalama tahmin $\hat{\sigma}$ | 0.88 | 0.83 | 0.86 | 0.77 | 0.76 |
| Tahminin ortalama varyansı | (.0012) | (.0040) | (.0015) | (.0026) | (.0023) |
| (ii) log $\frac{w}{p}$ bağımlı | | | | | |
| Ortalama tahmin $\hat{\sigma}$ | 0.89 | 0.91 | 0.89 | 0.82 | 0.80 |
| Tahminin ortalama varyansı | (.0010) | (.0050) | (.0035) | (.0028) | (.0030) |
| $\sigma = 1.6$ | | | | | |

Tablo 12 'nin devamı

(i) log $\frac{V}{L}$ bağımlı

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Ortalama tahminin $\hat{\sigma}$ | 1.36 | 0.60 | 1.29 | 0.76 | 0.58 |
| Tahminin ortalama varyansı | (.0243) | (.1037) | (.0357) | (.0711) | (.0947) |

(ii) log $\frac{w}{p}$ bağımlı

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Ortalama tahmin $\hat{\sigma}$ | 1.62 | 1.81 | 1.81 | 2.12 | 1.53 |
| Tahminin ortalama varlansı | (.283) | (.2025) | (.0930) | (.2442) | (.1982) |

a/ Maddala ve Kadene (1965) tarafından Montecarlo çalışmalarında elde edilmiştir. İşgücü ve sermayenin getiri oranı egzojen kabul edilmiştir.

## LİTERATÜR


Arrow, K.J., H.B. Chenery, B.S. Minhas, and R.M. Solow (1961), "Capital-Labor Substitution and Economic Efficiencey", Review of Economics and Statistics, Agust, pp. 225-250.

Brown, M. (1962), "The Constant Elasticity of Substitution Production Function", Report No. 6219, Econometric Institute, Rotterdam, Holland, June.

Brown, M., and J. S. de Cani (1963). "Technological Change and the Distribution of Income", International Economic Reiew, Septemer, pp. 289- 309.

Bruno, M. (1962), "A Note on the Implications of an Empirical Relationship between Output per Unit of Labour, the Wage Rate, and the Capital-Labour Ratio", Stanford University, July (mimeo).

David, P.A., and Th. van de Klundert (1965), "Non-Neutral Effficiency Growth and Substituon between Capital and Labor in the U.S.Economy, 1899-1960," American Economic Review, June, pp. 356-394.

Dhrymes, P.J. (1965), "Some Extensions and Tests for the CES Class of Production Functions", Review of Economics and Statistics, November, pp. 357 - 366.

——,and M. Kurs (1964, "Technology and Scale in Elevtricity Generation", Econometrica, July, pp. 286-315.

Diamond, P.A., and D. Mcfadden (1965), "Identification of the Elasticity of Substituion and the Bias of Technical Change : An Impossibility Theorem", unpublished.

Diwan, R.K. (1963), "An Empirical Estimate of the Constand Elasticity of Substitution Production Function", paper presented at mecting of Econometric Society, Copenhagen, July 1963; abstract in Econometrica, October 1964, pp. 662-663.

Ferguson,C.E. (1965a), "Substitution, Technical Progress, and Returns to Scale", American Economic Review, Proceedings, May, pp.296-305.

——,(1965b), "Time-Series Production Functions and Technological P-rogress in American Manufacturing Industry", Journal of Political Economy, April, pp. 135 - 147

Fuchs, V. R. (1963), "Capital Labor Substitution, A Note", Review of Economics and Statistics, Novem-November, pp. 436-438.

Gordon, R.A. (1961), Business Fluctuations, Nev York.

Hilhorst, J.G.M. (1961), "Production Functions for Manufacturing Industry", Statistische en Econometrische Onderzoekingen, Central B-ureau of Statistick, J.W. (1964), Den Haag, pp. 180-204.

Kendrick, J.W. (1964), Comment on Slow (19964), in The Behavior of Income Shares, Princeton for N-BER, pp. 140 - 142.

Kendrick, J. W., and R. Sato (1963), "Factor Prices, Productivity, an Economic Growth", American E-conomic Review, December, PP. pp. 974-1003.

Klein, L.R. (1953), A Textbook of E-conometrics, Evanston, III.

Kmenta, J. (1964), "On Estimation of the CES Production Function", Social Systems Research Insti- tu te, University of Wisconsin, Paper No. 6410, October.

Kravis, I. (1959), "Relative Income S-hares in Fact and Theory," American Economic Review, December, pp. 917 - 949.

Leontief, W. (1964). "An Interrational Comparison of Factor Costs and Factor Use" review of Minhas (1960-63), American Economic R-eview June. pp. 335-345.

Liu, T.C., and G. H. itildebrand (1965) Manufacturing Production Functions in the United States, 1957, Ithaca, N. Y.

Lucas, R.E. (1963), "Substitution Between Labor and Capital in U.S. Manufacturing, 1929-58", on- p-ublished Ph. D. dissertation) U-niversity of Chicago.

McFadden, D. (1964), "Notes on Estimation of the Elasticity of Substitution", Institute of Business and Economic Research, University of California, Berkeley, November (mimeo).

McKinnon, R.I. (1962). "Wages, Capital Costes, and Employment in Manufacturing: A Model Applied to 1947-58 U.S. Date", Econometrica, July, pp. 501-521.

——(1963a), "The CES Production Function Applied to Two-Digit Manufacturing and Three Mining Industries for the United States", unpublished.

——(1963b), "Factor Price Changes and Production Function Estimation", Stanford University (mimeo).

Maddala, G.S. (1963), "Technological Change in the Bituminous Coal Industry, 1919-54, unpublished Ph. D. disserettation, University of Chicago.

——(1965), "Differential Insdustry E-fects and Differential Factor Effects of Technological Change", Meno. 36, Research Center in E-conomic Growth, Stanford University, Macrh.

Maddala, G.S., and J.B. Kadane (1965) Specification Errors in the Context of the CES Production Function", paper presented at meeting of the Econometric Society, New York, December.

Minasian, J.R. (1961), "Elasticities of Substitution and Constant-Output Demand Curves for Labor", Journal of Political Economy, June, pp. 261-270.

Minhas, B.S. (1962), "The Homohypallagic Production, Factor- intensity Reversals, and the Heckscher-Ohlin Theorem", Journal of Political Economy, April, pp. 138-156.

——(1960-63,) "An International Comparison of Factor Costs and Factor Use". (Ph. D. dissertation, Stanford University, Novemher 1960), Contributions to Economic Analysis No. 31, Amsterdam: North-Holland, 1963.

Murata, Y., ahr K.J. Arrow (1965), unpublished results of estimation of elasticitses of substitution for two-diğit industries from inter-country data for two periods, June.

Nelson, R.R. (1965), "The CES Production Function and Economic Growth Projections" (mimeo).

Nerlove, M. (1963). "Returns to Scale in Electricity Supply", pp. 167-198. in C. Christ et al. (id), Measurement in Economics: Studies in Mathematical Economics and Econometrics in Memory of Yehuda Grunfeld, Stanford.

——(1965), "Notes on the Production Relations İncluded in Macro-Econometric", Stanford University, June (mimeo).

Oi, W.Y. (1962), "Labor as a Quasi-Fixed Factor", Journal of Political Economy, December, pp. 538-555.

Okun, A.M. (1962), "Potential GNP: Its Measurement and Significance Proceedings of the Business and Economic Statistics Section of the American Statistical Assisociation

Smith, V. (1963), "On Production Functions of Constant Elasticity of Substitution", Purdue University (memio).

Solow, R.M. (1956), "A Contribution to the Theory of Economic. Growth". Quarterly Journal of Economics, pp. 65 - 94.

——(1957), "Technical Change and the Aggregate Production Function", Review of Economics and Statistics, pp. 312 - 320.

——(1964), "Capital, Labor and Income in Manufacturing", in The Behavior of Income Shares, Princeton for NEBER, pp. 101-128.

Swon, T.W. (1956), "Economic Growth and Capital Accumulation', Economic Record, pp. 334-361.

Traub, J.L. (1964), I terative Methods for the Solution of Equations, Englewood Cliffs, N. J.

Whitaker, J. K. (1964), "A Note on the CES Production Function", Review of Economic Studies, April, pp. 166-167