Volume: 09 Number: 02 Category: 02 Page: 41-47 ISSN No: 1303-6319 Cilt: 09 Sayı: 02 Kategori: 02

NEYMAN, PÓLYA-AEPPLI VE THOMAS DAĞILIMLARININ MOMENTLERİ ÜZERİNE BİR İNCELEME

Gamze ÖZEL*

ÖZET

Neyman A, B tipi dağılımlar, Pólya-Aeppli ve Thomas dağılımları, hem olasılık kuramında hem de biyoloji, sismoloji, risk kuramı, meteoroloji gibi birçok uygulama alanında önem taşımaktadır. Bu dağılımlar üzerine birçok çalışma yapılmasına karşın, olasılık fonksiyonlarının kapalı biçimlerine ulaşılamaması kullanımlarını da kısıtlamaktadır. Bu nedenle dağılımlara ait merkezsel, merkezsel olmayan, faktöriyel momentler ve kümülantlar gibi moment karakteristikleri önem kazanmaktadır. Bu çalışmada Neyman tipi dağılımlar, Pólya-Aeppli dağılımı ve Thomas dağılımı açıklanmış; dağılımlara ait merkezsel, merkezsel olmayan, faktöriyel momentler ve kümülantlar elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: B tipi dağılımlar, Kümülantlar, Momentler, Neyman A, Pólya-Aeppli dağılımı, Thomas dağılımı.

1. GİRİŞ

Neyman A, B tipi dağılımlar, (Neyman, 1939) tarafından belirli bir alandaki organizmaların dağılımını araştırmak; Pólya-Aeppli (geometrik-Poisson) dağılımı bir DNA ipliğindeki hasarların dağılımı incelemek (Gudowska vd., 2007) ve Thomas dağılımı (Thomas, 1949) tarafından belirli bir bölgedeki bitkilerin yayılmasını belirlemek amacıyla tanımlanmıştır. Bu dağılımlar genellikle trafik kazaları, çevrebilimi, nöropsikoloji, radyobiyoloji, kalite kontrolü ve telekomünikasyonda kullanılmaktadır (Chen vd., 2005), (Gudowska vd., 2007), (Meintanis, 2007), (Özel vd., 2010), (Randolph vd., 1995), (Robin, 2002). N, λ parametresi ile Poisson dağılımına sahip bir raslantı değişkeni olsun ve ortaya çıkan her olaya Y_i, $i=1,2,\ldots,N$ ile gösterilen aynı dağılımlı, bağımsız ve pozitif değerler alan raslantı değişkenleri bağlansın. Bu raslantı değişkenleri N raslantı değişkeninden de bağımsız olsunlar. Buna göre,

$$X=\sum_{i=1}^{N} Y_i \qquad (1)$$

biçimindeki X raslantı değişkeni birleşik Poisson dağılımına sahiptir.

Özel olarak, (1) eşitliğinde Y_i, $i=1,2,3\ldots$, raslantı değişkenleri Poisson dağılımlı ise, X raslantı değişkeni Neyman A tipi dağılıma; Y_i, $i=1,2,3,\ldots$, raslantı değişkenleri ikiterimli (binom) dağılımlı ise, X raslantı değişkeni Neyman B tipi dağılıma sahiptir. Benzer biçimde, Y_i, $i=1,2,\ldots$, raslantı değişkenleri geometrik dağılımlı ise, X raslantı değişkeni Pólya-Aeppli dağılımına ve Y_i, $i=1,2,\ldots$, raslantı değişkenleri kaydırılmış (shifted) Poisson dağılımına sahip ise, X raslantı değişkeni Thomas dağılımına sahip olur. Neyman A, B tipi dağılımlar, Pólya-Aeppli ve Thomas dağılımı üzerine birçok çalışma yapılmasına karşın, bu dağılımların olasılık fonksiyonlarının kapalı biçimlerine

*Doç. Dr., Hacettepe Üniversitesi, Fen Fakültesi, İstatistik Bölümü, Ankara, e-posta: gamzeozl@hacettepe.edu.tr

ulaşılamamıştır (Özel, 2012). Bu nedenle, dağılımların merkezsel, merkezsel olmayan, faktöriyel momentlerinin ve kümülantlarının kullanılması önem kazanmaktadır. Bu çalışmada Neyman tipi dağılımlar, Pólya-Aeppli dağılımı ve Thomas dağılımı açıklanmış; dağılımlara ait merkezsel, merkezsel olmayan, faktöriyel momentler ve kümülantlar elde edilmiştir.

2. NEYMAN, PÓLYA-AEPPLI VE THOMAS DAĞILIMLARI

N raslantı değişkeni λ $(\lambda > 0)$ parametresi ile Poisson dağılımına sahip olsun. $Y_i^{(1)}$, $i = 1,2,3,...$, raslantı değişkenleri ν $(\nu > 0)$ parametresi ile Poisson dağılımlı ise, Neyman A tipi dağılımlı $X_{(1)}$'in olasılık fonksiyonu için,

$$p_{X_{(1)}}(k) = P(X_{(1)} = k) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-n\nu} \frac{(n\nu)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, ... \tag{2}$$

eşitliği; $Y_i^{(2)}$, $i = 1,2,3,...$, raslantı değişkenleri m ve p parametreleri ile ikiterimli dağılımlı ise, Neyman B tipi dağılımlı $X_{(2)}$'nin olasılık fonksiyonu için,

$$p_{X_{(2)}}(k) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \binom{nm}{k} p^k (1-p)^{nm-k}, \quad k = 0, 1, 2, ... \tag{3}$$

eşitliği ve $Y_i^{(3)}$, $i = 1,2,3,...$, raslantı değişkenleri θ parametresi ile geometrik dağılıma sahip ise, Pólya-Aeppli dağılımlı $X_{(3)}$'ün olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$p_{X_{(3)}}(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{k+n-1}{k} \theta^n (1-\theta)^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}, \quad k = 0, 1, 2, ... \tag{4}$$

$\alpha > 0$ için $Y_i^{(4)}$, $i = 1,2,3...$, raslantı değişkenleri $p_{Y_i^{(4)}}(j) = e^{-\alpha} \alpha^{j-1} / (j-1)!$, $j = 1, 2, 3,...$ biçiminde verilen kaydırılmış Poisson dağılımlı ise, Thomas dağılımlı $X_{(4)}$'ün olasılık fonksiyonu için,

$$p_{X_{(4)}}(k) = \sum_{n=0}^{k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\alpha n} \frac{(\alpha n)^{k-n}}{(k-n)!}, \quad k = n, n+1, n+2, ... \tag{5}$$

eşitliği yazılabilir. Ancak, (2), (3), (4) ve (5) eşitliklerinden olasılıklara ulaşmak güçtür. Panjer [8] tarafından (1) eşitliğindeki N raslantı değişkeninin olasılık fonksiyonunun $p_N(n) = \frac{\lambda}{n} p_N(n-1)$, $n = 1, 2, 3...$ ilişkisini sağlaması durumunda birleşik Poisson dağılımı için $p_X(0) = e^{-\lambda(1-p_Y(0))}$ ve $p_X(k) = \lambda \sum_{i=1}^{k} \frac{i}{k} p_Y(i) p_X(k-i)$, $k = 1, 2, 3,...$ eşitliği elde edilmiştir. Burada, $p_Y(y)$, Y_i, $i = 1,2,3...$, raslantı değişkenlerinin olasılık fonksiyonunu göstermektedir. Neyman tipi dağılımlar, Pólya-Aeppli dağılımı ve Thomas dağılımı için Panjer eşitlikleri de kullanılabilir. Ayrıca $p_X(k) = P(X = k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, olasılıkları, yinelemeli olasılıklara dayanmadan Özel ve İnal (Özel vd., 2008) tarafından ve Neyman A, B tipi dağılımlar, Pólya-Aeppli dağılımı ve Thomas dağılımının olasılık fonksiyonları Özel ve İnal (Özel vd., 2012) tarafından elde edilmiştir.

3. NEYMAN, PÓLYA-AEPPLI VE THOMAS DAĞILIMLARININ MOMENT KARAKTERİSTİKLERİ

Y_i, $i = 1, 2, \ldots$, aynı dağılımlı, bağımsız, kesikli raslantı değişkenleri $j = 0, 1, 2, \ldots$, değerlerini $P(Y_i = j) = p_j$ olasılıkları ile alsın ve $\lambda_j = \lambda p_j$ olsun. Buna göre, Y_i, $i = 1, 2, \ldots$, raslantı değişkenlerinin moment çıkaran fonksiyonu $M_Y(s) = p_0 + p_1 e^s + \ldots + p_m e^{s^m}$ biçimindedir. (1) eşitliğindeki birleşik Poisson dağılımlı X r.d.'nin moment çıkaran fonksiyonu,

$$\begin{aligned} M_X(s) &= e^{\lambda[M_Y(s)-1]} \\ &= e^{\lambda\left[(p_0+p_1e^s+\ldots+p_m e^{s^m})-1\right]} \\ &= e^{\lambda p_0+\lambda p_1 e^s+\ldots+\lambda p_m e^{s^m}}\, e^{-\lambda} \\ &= e^{-\lambda(1-p_0)}\, e^{\lambda_1 e^s+\lambda_2 (e^s)^2+\ldots+\lambda_m (e^s)^m} \end{aligned} \tag{6}$$

olur (Özel vd., 2008). Burada, $p_0 = P(Y_i = 0)$ olarak tanımlıdır.

Özel olarak, $Y_i^{(r)}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, $r = 1, 2, 3, 4$, raslantı değişkenleri sırasıyla Neyman A, B, Pólya-Aeppli ve Thomas dağılımına sahip olsun. (1) eşitliğindeki birleşik Poisson dağılımının merkezsel olmayan momentlerine ulaşmak için $M_X(s)$'nin k. türevi alınırsa, $\mu'_k = E[X^k] = \left.\dfrac{\partial^k M_X(s)}{\partial s^k}\right|_{s=0}$, $k = 1, 2, \ldots$ elde edilir. Buna göre, X raslantı değişkeninin merkezsel olmayan momentleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \mu'_1 &= \lambda\mu'_Y(1), \\ \mu'_2 &= \left(\lambda\mu'_Y(1)\right)^2 + \left(\lambda\mu'_Y(2)\right), \\ \mu'_3 &= \left(\lambda\mu'_Y(1)\right)^3 + 3\left(\lambda\mu'_Y(2)\right)\left(\lambda\mu'_Y(1)\right) + \left(\lambda\mu'_Y(3)\right), \\ &\vdots \end{aligned} \tag{7}$$

Burada, $\mu'_Y(k) = E[Y^k]$, Y_i, $i = 1, 2, \ldots$, raslantı değişkenlerinin merkezsel olmayan momentleridir. Neyman A, B, Pólya-Aeppli ve Thomas dağılımlarına ait bazı merkezsel olmayan momentler Tablo 1'de verilmiştir:

Tablo 1. Neyman A, B, Pólya-Aeppli ve Thomas Dağılımına ait bazı merkezsel olmayan momentler

	Neyman A	Neyman B	Pólya-Aeppli	Thomas
μ'_1	$\lambda\nu$	λmp	$\lambda(1-\theta)/\theta$	$\lambda(1+\alpha)$
μ'_2	$(\lambda\nu)^2+\lambda(\nu+\nu^2)$	$(\lambda mp)^2+(\lambda mp)$ $+[\lambda m(m-1)p^2]$	$[\lambda(1-\theta)/\theta]^2$ $+[\lambda(1-\theta)(2-\theta)/\theta^2]$	$[\lambda(1+\alpha)]^2+\lambda\alpha(2+\alpha)$
μ'_3	$(\lambda\nu)^3+3(\lambda\nu)[\lambda(\nu+\nu^2)]$ $+\lambda(\nu+3\nu^2+\nu^3)$	$(\lambda mp)^3+3(\lambda mp)^2+(\lambda mp)$ $+3[\lambda m(m-1)p^2](1+\lambda mp)$ $+[\lambda m(m-1)(m-2)p^3]$	$[\lambda(1-\theta)/\theta]^3+3[\lambda(1-\theta)/\theta]$ $[\lambda(1-\theta)(2-\theta)/\theta^2]$ $+[\lambda(1-\theta)[6+\theta(\theta-6)]/\theta^3]$	$\lambda\alpha(1+\alpha)+[\alpha+2\lambda(2+\alpha)]$

(1) eşitliğindeki birleşik Poisson dağılımının merkezsel momentlerine ulaşmak için (6) eşitliğinden yararlanarak elde edilen merkezsel moment çıkaran fonksiyon $M_{X-\mu}(t)=e^{-\mu t}M_X(t)$ 'nin k. türevi alınırsa, $\mu_k=E[(X-\mu)^k]=\left.\dfrac{\partial^k M_{X-\mu}(s)}{\partial s^k}\right|_{s=0}$, $k=1,2,\ldots$ olur. Buna göre, X raslantı değişkeninin merkezsel momentleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= [\mu+\lambda\mu'_Y(1)],\\
\mu_2 &= [\mu+\lambda\mu'_Y(1)]^2+\lambda\mu'_Y(2),\\
\mu_3 &= [\mu+\lambda\mu'_Y(1)]^3+3\lambda\mu'_Y(2)[\mu+\lambda\mu'_Y(1)]+\lambda\mu'_Y(3),\\
&\vdots
\end{aligned} \tag{8}$$

Neyman A, B, Pólya-Aeppli ve Thomas dağılımlarına ait bazı merkezsel momentler Tablo 2'de verilmiştir:

Tablo 2. Neyman A, B, Pólya-Aeppli ve Thomas Dağılımına ait bazı merkezsel momentler

	Neyman A	Neyman B	Pólya-Aeppli	Thomas
μ_1	$(\mu+\lambda\nu)$	$(\mu+\lambda mp)$	$[\mu+\lambda(1-\theta)/\theta]$	$[\mu+\lambda(1+\alpha)]$
μ_2	$(\mu+\lambda\nu)^2+\lambda(\nu+\nu^2)$	$(\mu+\lambda mp)^2$ $+\lambda(mp+m(m-1)p^2)$	$[\mu+\lambda(1-\theta)/\theta]^2$ $+[\lambda(1-\theta)(2-\theta)/\theta^2]$	$[\mu+\lambda(1+\alpha)]^2+\lambda\alpha(2+\alpha)$
μ_3	$(\mu+\lambda\nu)^3+\lambda(\nu+3\nu^2+\nu^3)$ $+3\lambda(\mu+\lambda\nu)(\nu+\nu^2)$	$(\mu+\lambda mp)^3+3\lambda(\mu+\lambda mp)$ $(mp+m(m-1)p^2)$ $+\lambda(mp+3m(m-1)p^2$ $+m(m-1)(m-2)p^3)$	$[\mu+\lambda(1-\theta)/\theta]^3$ $+3[\mu+\lambda(1-\theta)/\theta]$ $[\lambda(1-\theta)(2-\theta)/\theta^2]$ $+[\lambda(1-\theta)[6+\theta(\theta-6)]/\theta^3]$	$[\mu+\lambda(1+\alpha)]^3+3[\mu+\lambda(1+\alpha)$ $\lambda(\alpha^2+\alpha-1)+\lambda(\alpha^3+5\alpha^2$ $+3\alpha-2)$

Y_i, $i=1,2,\ldots$, raslantı değişkenlerinin olasılık çıkaran fonksiyonu $g_Y(s)$ ise, (1) eşitliğindeki birleşik Poisson dağılımı için kümülant çıkaran fonksiyon aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$C_X(s)=\lambda[(p_0-1)(p_1e^s+p_2e^{2s}+\ldots+p_m e^{ms})] \tag{9}$$

Buradan $\mu'_r = \mu'_r(Y) = E[Y^r]$, Y_i, $i = 1, 2, ...,$ raslantı değişkenlerinin merkezsel olmayan momentleri olmak üzere, birleşik Poisson dağılımı için kümülantlar aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$\kappa_r = \lambda\mu'_r \tag{10}$$

Neyman A, B dağılımları, Pólya-Aeppli ve Thomas dağılımına ait bazı kümülantlar Tablo 3'te yer almaktadır:

Tablo 3. Neyman A, B, Pólya-Aeppli ve Thomas Dağılımına ait bazı kümülantlar

	Neyman A	Neyman B	Pólya-Aeppli	Thomas
κ_1	$\lambda\nu$	λmp	$\lambda(1-\theta)/\theta$	$\lambda(\alpha-1)$
κ_2	$\lambda[\nu+\nu^2]$	$\lambda[mp+m(m-1)p^2]$	$\lambda(2-\theta)(1-\theta)/\theta^2$	$\lambda(\alpha^2+\alpha-1)$
κ_3	$\lambda[\nu+3\nu^2+\nu^3]$	$\lambda[mp+3m(m-1)p^2+ m(m-1)(m-2)p^3]$	$\lambda(1-\theta)[6+(\theta-6)\theta]/\theta^3$	$\lambda(\alpha^3+5\alpha^2+3\alpha-2)$

(1) eşitliğindeki birleşik Poisson dağılımının faktöriyel momentlerine ulaşmak için $g_X(s)$'nin k. türevi alınırsa, $\mu'_X[k] = E[X(X-1)...(X-(k-1))] = \left.\dfrac{\partial^k g_X(s)}{\partial s^k}\right|_{s=1}$, $k = 1, 2, ...$ elde edilir. Buna göre, X raslantı değişkeninin faktöriyel momentleri aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$\begin{aligned} &\mu'_X[1] = \lambda\mu'_Y[1], \\ &\mu'_X[2] = (\lambda\mu'_Y[1])^2 + (\lambda\mu'_Y[2]), \\ &\mu'_X[3] = (\lambda\mu'_Y[1])^3 + 3(\lambda\mu'_Y[2])(\lambda\mu'_Y[1]) + (\lambda\mu'_Y[3]), \\ &\vdots \end{aligned} \tag{11}$$

Burada, $\mu'_Y[r] = E[Y(Y-1)...(Y-(r-1))]$, Y_i, $i = 1, 2, ...,$ raslantı değişkenlerinin faktöriyel momentleridir. Neyman A, B dağılımları, Pólya-Aeppli ve Thomas dağılımına ait bazı faktöriyel momentler Tablo 4'te yer almaktadır:

Tablo 4. Neyman A, B, Pólya-Aeppli ve Thomas Dağılımına ait bazı faktöriyel momentler

	Neyman A	Neyman B	Pólya-Aeppli	Thomas
$\mu'_X[1]$	$\lambda\nu$	λmp	$\lambda(1-\theta)/\theta$	$\lambda(1+\alpha)$
$\mu'_X[2]$	$(\lambda\nu)^2+\lambda\nu$	$(\lambda mp)^2+[\lambda m(m-1)p^2]$	$[\lambda(1-\theta)/\theta]^2+[\lambda(1-\theta)/\theta^2]$	$[\lambda(1+\alpha)]^2 + \lambda(1+\alpha)(2+\alpha)$
$\mu'_X[3]$	$(\lambda\nu)^3+3(\lambda\nu)^2+\lambda\nu$	$(\lambda mp)^3+3[\lambda m(m-1)p^2] (\lambda mp)+[\lambda m(m-1) (m-2)p^3]$	$[\lambda(1-\theta)/\theta]^3+3[\lambda(1-\theta)/\theta^2] [\lambda(1-\theta)/\theta]+[\lambda(1-\theta)+\lambda(1-\theta)^2]/\theta^4$	$[\lambda(1+\alpha)]^2 +[\lambda(1+\alpha)(2+\alpha)] +[\lambda(1+\alpha)(2+\alpha)^2 (3+\alpha)]$

4. SONUÇ

Neyman A, B tipi dağılımların, Pólya-Aeppli ve Thomas dağılımının istatistiksel önemi gerçek hayatta kullanılabilmelerinden kaynaklanmaktadır. Neyman A, B tipi dağılımlar, Pólya-Aeppli ve Thomas dağılımı kullanılarak birçok çalışma yapılmasına karşın, bu dağılımların momentleri üzerine yapılan çalışmalar sınırlıdır. Bu çalışmada Neyman tipi dağılımlar, açıklanmış; dağılımlara ait merkezsel, merkezsel olmayan, faktöriyel momentler ve kümülantlar elde edilmiştir. Böylece bu dağılımların çevrebilimi, sismoloji, risk kuramı, biyoloji vb. birçok alanda etkin biçimde kullanılabilmeleri sağlanabilir.

5. KAYNAKLAR

Chen, C. W., Randolph, P., Tian-Shy, L., 2005. Using CUSUM Control Schemes for Monitoring Quality Levels in Compound Poisson Production Environment: the Geometric Poisson Process. Quality Engineering, 17. 2. 207-217.

Gudowska-Nowak, E., Lee, R., Nasonova, E., Ritter, S., Scholz, M., 2007. Effect of LET and Track Structure on the Statistical Distribution of Chromosome Aberrations. Advances in Space Research. 39. 1070–1075.

Meintanis, S. G., 2007. A New Goodness of Fit Test for Certain Bivariate Distributions Applicable to Traffic Accidents. Statistical Methodology. 4. 22-34.

Neyman, J., 1939. On a New Class of Contagious Distributions Applicable in Entomology and Bacteriology, Annals of Mathematical Statistics. 10. 35-57.

Özel G., İnal C., 2008. The Probability Function of the Compound Poisson Process and an Application to Aftershock Sequences. Environmetrics. 19. 79–85.

Özel, G., İnal, C., 2010. The Probability Function of a Geometric Poisson Distribution. Journal of Statistical Computation and Simulation, 80. 5. 479-487.

Özel, G., İnal, C., 2012. On the Probability Function of the First Exit Time for Generalized Poisson Processes, Pakistan Journal of Statistics. 28. 4. Basımda.

Panjer, H., 1981. Recursive Evaluation of a Family of Compound Distributions. ASTIN Bulletin. 12. 22-26.

Randolph, P., Sahinoglu, M., 1995. A Stopping Rule for a Compound Poisson Random Variable, Applied Stochastic Models and Data Analysis. 11. 2. 135-143.

Robin, S., 2002. A Compound Poisson Model for Word Occurrences in DNA Sequences, Applied Statistics. 51. 4. 437-451.

Thomas, M., 1949. A Generalization of Poisson's Binomial Limit for Use in Ecology, Biometrika, 36. 18-25.

AN INVESTIGATION ON THE MOMENTS OF NEYMAN, PÓLYA-AEPPLI AND THOMAS DISTRIBUTIONS

ABSTRACT

Neyman type A, B distributions, Pólya-Aeppli and Thomas distributions play important roles both in probability theory itself and its applications in such as biology, seismology, risk theory, and meteorology. Although there have been many studies on these distributions, the non-existence of closed forms for their probability functions restrict their usage. Hence, the moment characteristics of these distributions, such as central, non-central, factorial moments and cumulants, play an important role. In this study, Neyman type distributions, Pólya-Aeppli distribution and Thomas distribution are explained; their central, non-central, factorial moments and cumulants are derived.

Keywords: B distributions, Cumulants, Moments, Neyman type A, Pólya-Aeppli distribution, Thomas distribution.