T.C. Marmara Üniversitesi
I.I.B.F. Dergisi
YIL 2003, CILT XVIII, SAYI 1

FİNANSAL RİSK YÖNETİMİNDE EKSTREM DEĞER TEORİSİ

Yrd. Doç. Dr. Ömer ÖNALAN*

ÖZET

Bu çalışmada, ekstrem riskin modellenmesi ve ölçümü için bir metot olarak, ekstrem değer teorisinin finansal risk yönetimindeki rolünü araştırıyoruz. Çünkü risk yönetimi günümüz finans dünyasında önemli bir konudur. Ekstrem değer teorisinin risk yönetiminde önemli bir analiz aracı olması gerektiği kanaatindeyiz. Konuyu kısaca sunuyoruz ve potansiyel kullanımlarını göstermek için İMKB endeksi üzerinde bir örnek veriyoruz.

Anahtar Kelimeler: Ekstrem Değer Teorisi, Genelleştirilmiş Pareto Dağılımı, Genelleştirilmiş Ekstrem Değer Dağılımı, Kuantil Tahmini, Risk Ölçümleri, Riskin Değeri, Kuyruk Koşullu Beklenti.

EXTREME VALUE THEORY FINANCIAL RISK MANAGEMENT

Abstract

In this study, we research of the role of Extreme Value Theory (EVT) in risk management, as a method for modelling and measuring extreme risk. Because risk management is currently a cricial topic in the world of finance. We argue that an important analytic tool in risk management should be extreme value theory. We briefly what this subject has to offer and illustrate the potential uses through an example on imkb index.

Keywords: Extreme Value Theory, Generalized Pareto Distribitution, Generalized Extreme Value Distribution, Quantite Estimation, Risk Measures, Value - at Risk, Expected Shortfall, Multivariate Extremes.

* Marmara Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi, İşletme Bölümü, Sayısal Yöntemler Anabilin Dalı e-mail: omeronalan@marmara.edu.tr

1. GİRİŞ

Ekstrem olay riski, günümüzde risk yönetimiyle ilgili tüm alanlarda mevcuttur. Risk yönetimi modelleri, nadir olarak ortaya çıkan fakat sonuçta, büyük kayıplara yol açan olayları modellememize ve onların sonuçlarını ölçmemize imkan verir. Bu nedenle, risk yöneticileri esas olarak, düşük olasılıklı olayların riski ile ilgilenirler.

Ekstrem piyasa riskinin yönetilmesi, bireysel veya kurumsal yatırımcının temel amaçlarından biridir. Finansal düzenleyiciler, ödeme gücünü sağlamlaştırmak için, finansal kurumların rezervinde, minimum seviyede sermayenin bulunmasını isterler. BESLE komitenin bu minimum sermaye seviyesi VaR (Value - at Risk)'e dayanır. VaR bir olasılık dağılımının kuantilini ifade eder. Standart metod, şu şekilde ifade edilebilir; en az 1 yıllık (220 işlem gücü) gözlemlere dayanarak, p = %1 (veya p= %5) ile gelecek 10 gün için, kazanç / kayıp dağılımının p-kuantili tahmin edilmesi ile hesaplanır. Standart model, getirilerin normal veya log normal dağılmış olduğunu varsayar. Getirilerin ekstrem dağılımlarına dikkat etmez. Elde edilen sayı 3 ile çarpılarak VaR elde edilir. Bu modele göre,

$$\text{VaR}(10\text{ günlük}) = \sqrt{10}\ \text{VaR}(1\text{ günlük})$$

i, malının portföydeki ağırlığı w_i ve, i ve j malları arasındaki korelasyon (i, j = 1, 2,....n) ρ_{ij} olmak üzere portföyün VaR'ı aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$\text{VaR(Portföy)} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} \rho_{ij} w_i w_j \text{VaR}_i \text{VaR}_j}$$

Bununla birlikte, normal dağılım ekstrem getirilere dikkat etmediğinden, piyasada çok büyük yükselmeler ve düşmeler olduğunda, yatırımcı büyük kayıplara katlanmak zorunda kalacaktır.

Bu sorunu yenmek için dayanıklılık testleri (stres testleri) ve senaryo analizlerinden faydalanılabilir. Ekstrem piyasa koşulları hipotez olarak alınarak, portföyün değerindeki değişimler canlandırılabilir. Fakat tüm mümkün durumları keşfedemeyeceğimiz için bu yöntemler sınırlı kalır.

Bu çalışmada bu tür problemlerin üstesinden gelmek için, Ekstrem Değer Teorisi'ni kullanacağız. Bu teori, ekstrem olayları tanımlayan istatistiksel modelleri kurabilmek için teorik bir yapı sunar. Ekstrem değer teorisinin kökeni su bilimine dayanmaktadır. Bununla birlikte son yıllarda finans alanında da çeşitli uygulamaları görülmektedir. Embrechts, Klüppelberg ve Mikosch (1997), finansal serilerin kuyruk davranışı üzerine, Koedijik et al. (1990), Docorogna et al. (1995), Loteran ve Phillips (1994), Longin (1996), McNeil (1999), Neftci (2000) ve McNeil ve Frey (2000). Bu çalışmalardan bir kaçıdır.

Bu çalışmada, finansal serilerin kuyruk davranışı ile ilgileniyoruz. Özel olarak, ekstrem değer teorisinin, kayıpların dağılımının kuyruğuna değer atanması amacıyla kullanımı üzerinde yoğunlaşıyoruz. Bu şekilde, modern risk yönetimi için bir modelleme aracı elde etmeyi amaçlıyoruz.

Çalışma aşağıdaki şekilde organize edilmiştir. 2.kısımda, pratik uygulamalara temel oluşturması için genel risk ölçümlerinin tanımları sunulmaktadır. 3.kısımda, ekstrem değer teorisinin temel sonuçları sunulmakta.

2. RİSK ÖLÇÜMLERİ VE MODELLEME

Risk modellemede standart yaklaşım, olasılık teorisini kullanmaktır. Riskler, "ilgilenilen evrenin öngörülemeyen gelecek durumlarını, kazançları ve kayıpları gösteren değerlere tasvir eden rassal değişkenlerdir." Bu riskin potansiyel değerleri bir "olasılık dağılımı"na sahiptir. Ekstrem olaylar, bir risk onun dağılımının kuyruğundaki değerleri aldığı zaman ortaya çıkar. Bir olasılık dağılımı seçerek risk için bir model oluşturabiliriz. Bu dağılımı deneysel verilerin istatistiksel analizi yardımı ile tahmin edebiliriz. Bu durumda, ekstrem değer teorisi, bu kuyruk alanı için iyi bir tahmin verir.

2.1. RİSK ÖLÇÜMLERİ

Risk ölçümünün anlamı; riskin dağılımının, risk ölçümü olarak adlandırılan bir sayı ile özetlenmesidir. Finanst, risk yönetimiyle ilgili soruların büyük çoğunluğu, ekstrem kuantillerin tahmin edilmesini gerektirir. Bu ise verilmiş olan bir değerin düşük bir olasılıkla geçilmesine karşılık gelir.

VaR (Riskin Değeri, Riske Maruz Değer)

VaR bir finansal pozisyonun, α zaman aralığı üzerinde; küçük bir $1-\alpha$ olasılığı ile potansiyel kaybı olarak tanımlanır.

$$P(\text{Kayıp} > \text{VaR}) \leq 1 - \alpha \tag{1}$$

α güven seviyesi 0.95 ile 1 arasındaki bir sayıdır.

X, riskli finansal pozisyonun kazanç / kayıp dağılımını tanımlayan F_x kümülatif dağılım fonksiyonu ile bir rassal değişken olsun. X'in negatif değerleri kazançlara ve pozitif değerleri de kayıplara karşılık gelsin. Şu halde VaR, F_x dağılımının α kuantili olarak tanımlanabilir.

$$\text{VaR}_\alpha(X) = F_x^{-1}(\alpha) \tag{2}$$

F_x^{-1}, Fx dağılım fonksiyonun tersi olup, "kuantil fonksiyonu" olarak adlandırılır. Böylece, ρ - zaman periyodunda VaR_α her 100ρ periyotta, ortalama olarak, $100\ (1-\alpha)$ defa geçilecektir.

Kazanç / kayıp dağılımının simetrik ve sonlu bir σ^2 varyansa sahip olduğunu kabul edelim. O zaman gerçek dağılımın ne olduğuna bakılmaksızın, eğer X, sıfır ortalama ile, belirli bir zaman periyodundaki rassal kaybı gösteriyorsa, Chebyshev eşitsizliğinden,

$$P[X > c\sigma] \leq \frac{1}{2c^2}$$

olur. Eğer $\alpha = 0{,}99$ için VaR sınırları ile ilgileniyorsak, $\frac{1}{2c^2} = 0{,}01$ olur ve $c = 7{,}071$ bulunur. Bu ise $\text{VaR}_{0,99}^{mak}(X) = 7{,}071\sigma$ olduğunu gösterir. VaR hesabı, normallik varsayımı altında yapılmış olsa idi. $\text{VaR}_{0,99}(X) = 2{,}326\sigma$ elde edilirdi. Böylece, eğer gerçek dağılım sonlu varyans ile kalın - kuyruklu ise o zaman $\text{VaR}_{0,99}$'ü 3 sayısı ile düzeltmek makul bir yaklaşım olacaktır.

Çünkü, $3 \times 2.326\sigma = 6{,}978\sigma$ olur.

Kuyruk Koşullu Beklenti (Beklenen Shortfall)

Bir diğer risk ölçümü kuyruk koşullu beklentiler (ES) dir. Bu VaR'ı geçen kaybın potansiyel büyüklüğünü tahmin eder. Beklenen shortfall, VaR'ı geçen bir kaybın beklenen büyüklüğü olarak tanımlanır ve aşağıdaki şekilde gösterilir.

$$ES_{\alpha} = E(X|X > VaR_{\alpha}(X)) \tag{3}$$

Beklenen shortfall alt toplamsal olup, standart sapma ile yer değiştirerek portföy teorisinde kullanılabilir. (Bertsimas et al. (2000)).

Getiri Seviyesi

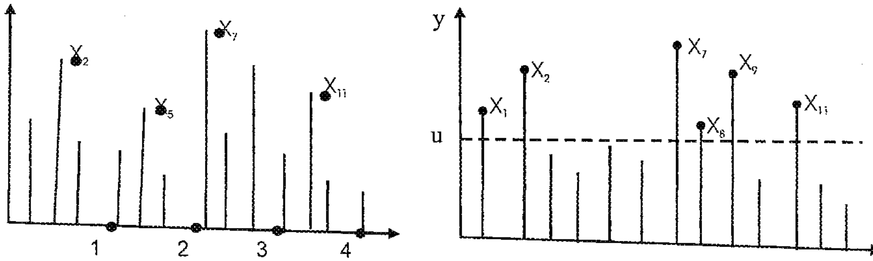
Eğer H, ardışık birbirini kesmeyen, eşit uzunluktaki periyotta gözlenmiş olan maksima'nın dağılımı ise "Getiri seviyesi" $R_n^k = H^{-1}(1 - \frac{1}{k})$, n uzunluğundaki k - tane periyodun en az birinde geçilmiş olması beklenen seviyesidir.

3. EKSTREM DEĞER TEORİSİ

Rassal değişkenlerin toplamının modellendiği zaman, merkezi limit teoreminin oynadığı rolün aynısı, rassal değişkenlerin ekstrem değerlerinin modellendiği zaman, ekstrem değer teorisi tarafından oynanır. Her iki durumda da, teori bize limit dağılımlarının ne olması gerektiğini söyler.

Reel verilerdeki ekstremlerin modellenmesi genelde iki farklı şekilde yapılır:

X rassal değişkeni günlük kayıpları veya getirileri göstersin. İlk olarak, rassal değişkenin aylar, yıllar gibi ardışık periyotlarda aldığı maksimum (veya minimum) değerleri düşünelim. Bu seçilmiş olan gözlemler, blok (veya periyot - periyot) maksima olarak adlandırılır ve ekstrem olayları oluşturur. Aşağıdaki şekil 1'in sol kısmında, her bir periyotta 3 gözlemden oluşan, 4 periyot için X_2, X_5, X_7 ve X_{11} bu blok maksima'yı göstermektedir.



Şekil 1. Blok maksima (sol kısım), u eşiğini aşmalar (sağ kısım)

İkinci yaklaşım, verilmiş olan (yüksek) bir u eşiğini aşan gözlemler üzerinde yoğunlaşır. Şekil 1'in sağ tarafındaki X_1, X_2, X_7, X_8, X_9 ve X_{11} gözlemlerinin tümü u eşiğini geçer ve ekstrem olayları oluşturur.

3.1. MAKSİMANIN DAĞILIMI (GEV)

n çapındaki alt örnek (blok) ile M_n ile gösterilen blok maksima için limit kanunu aşağıdaki teoremle verilir.

Teorem 1 (Fisher - Tippett (1928)).

(X_n), F dağılımı ile bağımsız aynı dağılmış, rassal değişkenlerin bir dizisi ve $M_n = \text{mak}\,(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ olsun. Eğer

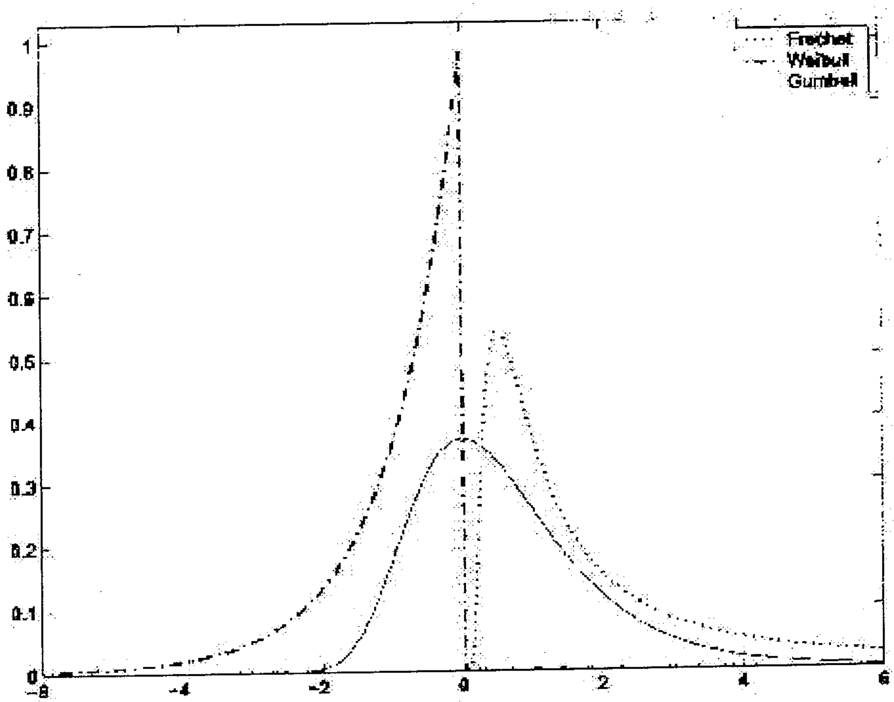
$$\frac{M_n - d_n}{c_n} \xrightarrow{d} H$$

olacak şekilde. $c_n > 0$, $d_n \in \mathbb{R}$ sabitleri ve bir dejenere olmayan H dağılım fonksiyonu varsa, o zaman H, aşağıdaki üç standart ekstrem dağılımından birine aittir:

Frechet $\quad \Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ e^{-x^{-\alpha}}, & x > 0 \end{cases} \qquad \alpha > 0$

Weibull $\quad \psi_\alpha(x) = \begin{cases} e^{-(-x)^{\alpha}}, & x \le 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \qquad \alpha < 0$

Gumbel $\quad \Lambda(x) = e^{-e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}$



Şekil 2. Ekstrem değer dağılımları

Yukarıda verilmiş olan ifadeler kümülatif dağılım fonksiyonlarıdır. Bu dağılımlar birbirleriyle ilişkilidirler:

$$X \sim \Phi_\alpha \Leftrightarrow \ln X^\alpha \sim \Lambda \Leftrightarrow -1/X \sim \psi_\alpha$$

Bu dağılımlar için Jenkinson ve Von Mises tarafından önerilmiş olan aşağıdaki tek parametreli gösterim kullanışlıdır.

$$H_\xi(x) = \begin{cases} e^{-(1+\xi x)^{-1/\xi}}, & \xi \neq 0 \\ e^{-e^{-x}}, & \xi = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Burada $1 + \xi x > 0$'dır. Bu yeniden parametrikleştirilmiş versiyon *Genelleştirilmiş Ekstrem Değer Dağılımı* (GED) olarak adlandırılır.

$\xi = \alpha^{-1} > 0$ alınırsa, Frechet dağılımı

$\xi = -\alpha^{-1} < 0$ alınırsa, Weibull dağılımı

$\xi = 0$ alınırsa , Gumbel dağılımı elde edilir.

"ξ şekil parametresi" olarak adlandırılır ve H_ξ'nın kuyruk davranışını belirler.

"$\alpha = 1/\xi$ kuyruk indeksi" olarak adlandırılır ($\xi > 0$ ise).

Şu halde, gözlem verilerinin F dağılımının kuyruk davranışı genelleştirilmiş ekstrem değer dağılımının ξ şekil parametresini belirler.

• Eğer F üstel olarak azalıyorsa, H_ξ Gumbel tipindedir ve $\xi = 0$'dır. Gumbel tipinin hareket alanındaki dağılımlar, Normal, Log-normal, üstel ve Gamma gibi *"İnce kuyruklu"* dağılımlardır. Bu dağılımların tüm momentleri genelde mevcuttur.

• Eğer F'nin kuyruğu bir kuvvet fonksiyonuna göre azalıyorsa (yani, $1-F(x) = c \cdot x^{-1/\xi} = x^{-\alpha}$), sabit bir c için H_ξ Frechet tipindedir ve $\xi > 0$'dır. Frechet tipinin hareket alanındaki dağılımlar, Pareto, Cauchy Student-t ve $0 < \alpha < 2$ karakteristik üssü ile α - kararlı dağılımlar gibi *"kalın kuyruklu"* dağılımları içerir. Bu dağılımlar için; $k \geq \alpha = 1/\xi$ için $E[X^k] = \infty$ dur.

• F dağılımının kuyruğu sonlu ise Hx Weibull tipindedir ve $\xi < 0$ dır. Weibull tipinin hareket alanında ise düzgün dağılım ve beta dağılımı yer alır. Bu dağılımlar için tüm momentler mevcuttur.

Herhangi bir $X \sim F_x$ ve $\mu \in R$, $\sigma > 0$ için $\widetilde{X} = \mu + \sigma X$ in dağılım fonksiyonu

$F_{\widetilde{X}}(x) = F_x\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)$ olduğundan ,

$$H_{\xi,\mu,\sigma}(x) = H_\xi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

olur. O zaman,

$$P(M_n \leq x) \approx H_{\xi,\mu,\sigma}\left(\frac{x-\mu_n}{\sigma_n}\right) = H_{\xi,\mu_n,\sigma_n}(x)$$

ile verilir.

$M_n^{(j)}$: $j = 1,2,...m$ bloğundaki, X_i değerlerinin maksimumu olmak üzere $\xi \neq 0$ için log olabilirlik fonksiyonu, $L(\mu,\sigma,\xi) = -m\ln(\sigma)$

$$-(1+1/\xi)\sum_{i=1}^{m}\ln\left[1+\xi\left(\frac{M_n^{(i)}-\mu}{\sigma}\right)\right]$$

$$-\sum_{i=1}^{m}\left[1+\xi\left(\frac{M_n^{(i)}-\mu}{\sigma}\right)\right]$$

$1+\xi\left(\frac{M_n^{(i)}-\mu}{\sigma}\right) > 0$, kısıtı üzerinden maksimum yapılır.

Not : Maksimum olabilirlik takdircisinin yanlılığı blok büyüklüğü olan n arttırılarak azaltılır. Takdircinin varyansı ise blokların sayısı m arttırılarak azaltılır.

Bir yılda $n = 261$ işgünü olduğunu kabul edelim.

Her k yılda bir geçilmesini beklediğimiz günlük kayıp $R_{261,k}$'yi bulmak isteyelim.

$$\hat{R}_{261,k} = \mu^{-1}_{\xi,\mu,\sigma}\left(1-\frac{1}{k}\right)$$

$$= \hat{\mu} + \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}}\left[\left(-\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)\right)^{-\hat{\xi}} - 1\right], \qquad \xi \neq 0$$

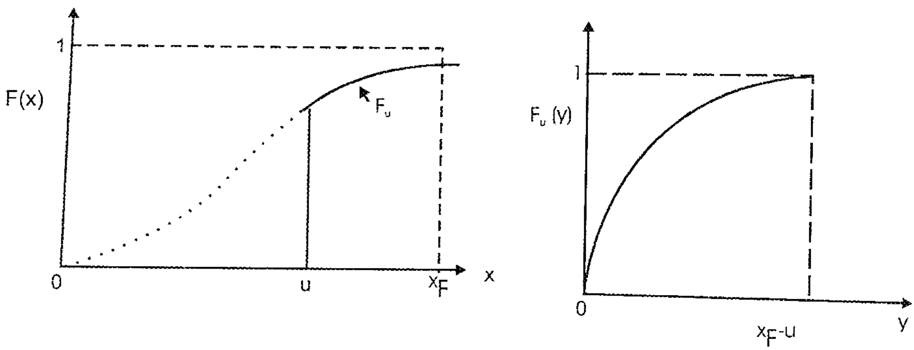
$\hat{\xi} = 0{,}319$, $\hat{\mu} = 2{,}80$ *ve* $\hat{\sigma} = 1{,}38$ olmak üzere k=20 seçilirse.

$\hat{R}_{261,20} = \%9{,}62$ bulunur.

3.2. EŞİĞİ AŞAN DEĞERLER METODU

Ekstrem değerlerin modellenmesinde modern yaklaşım, yüksek bir eşiği aşan ekstrem değerlerin davranışının modellenmesidir. Bu metod "eşiği aşan değerler metodu" olarak adlandırılır.

Problemimiz aşağıdaki şekil 3'de gösterilmektedir.Burada X rassal değişkenin (bilinmeyen) bir F dağılım fonksiyonunu düşünüyoruz. Belirli bir u eşiğinin üzerindeki x değerlerinin F_u dağılım fonksiyonun tahmin edilmesiyle ilgileniyoruz.



Şekil 3. F dağılım fonksiyonu ve Fu koşullu dağılım fonksiyonu

F_u dağılım fonksiyonu "koşullu aşma dağılım fonksiyonu" olarak adlandırılır ve aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$F_u(y) = P(X - u \leq y \mid x > u), \qquad 0 \leq y \leq x_F - u \qquad (4)$$

Burada X bir rassal değişken, u verilmiş olan bir eşik, $y = x - u$, aşmalar ve $x_F \leq \infty$, F'nin sağ bitiş noktasıdır. F_u, F'nin terimleriyle aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$F_u(y) = \frac{F(u+y) - F(u)}{1 - F(u)} = \frac{F(x) - F(u)}{1 - F(u)} \qquad (5)$$

Teorem 2. (Pickand (1975), Belkema ve Haan (1974) Temel dağılım fonksiyonları F'nin büyük bir sınıfı için büyük bir u ile F(y) dağılım fonksiyonuna iyi bir şekilde yaklaşılabilinir.

$$F_y(u) \approx G_{\xi,\sigma}(y), \qquad u \to \infty$$

burada,

$$G_{\xi,\sigma}(y) = \begin{cases} 1-(1+\dfrac{\xi}{\sigma}y)^{-1/\xi}, & \xi \neq 0 \\ 1-e^{-y/\sigma} \quad , & \xi = 0 \end{cases} \tag{6}$$

$$\xi \geq 0 \ \text{ ise } \ y \in [0,(x_F\text{-}u)], \qquad \xi < 0 \text{ ise } \quad y \in [0, -\frac{\sigma}{\xi}]$$

$G_{\xi,\sigma}$ *"Genelleştirilmiş Pareto dağılımı"* olarak adlandırılır. Eğer $x = u+y$ olarak tanımlanıyorsa, Genelleştirilmiş Parete Dağılımı (GPD) x'in bir fonksiyonu olarak da ifade edilebilir. Yani

$$G_{\xi,\sigma}(x) = 1-(1+\xi\,(x-u)\,/\sigma)^{-1/\xi}$$

Bu teorem bize, F_u aşma dağılımının, u büyük olduğu zaman GPD ile yer değiştirebileceğini söyler.

$$F(x) = (1-F(u))\,F_u(y) + F(u)$$

F(u) için deneysel takdirci,

$$\hat{F}(u) = \frac{(n-N_u)}{n} \qquad \text{burada ,} \qquad N_u = \sum_{i=1}^{n} 1_{\{X_i>u\}}$$

n: Toplam gözlem sayısı

N_u : u eşiğinin aşan gözlemlerin sayısı

Bu durumda F(x)'in kuyruğu aşağıdaki şekilde tahmin edilebilir.

$$\hat{F}(x)=\frac{N_u}{u}\left(1-(1+\frac{\xi}{\sigma}(x-u))^{-1/\xi}\right)+\left(1-\frac{N_u}{u}\right)$$

basitleştirilirse,

$$\hat{F}(x)=1-\frac{N_u}{u}\left(1+\frac{\hat{\xi}}{\hat{\sigma}}(x-u)^{-1/\hat{\xi}}\right),\ \text{tüm } x>u \text{ için} \qquad (7)$$

Verilmiş alan bir p olasılığı için (7) denkleminin tersi alınırsa, aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\hat{VaR}_p=u+\frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}}\left((\frac{n}{N_u}p)^{-\hat{\xi}}-1\right) \qquad (8)$$

Beklenen shortfall'ı aşağıdaki şekilde tekrar yazalım.

$$ES_p=VaR_p+E(X-VaR_p\,|\,X>VaR_p) \qquad (9)$$

Sağ taraftaki ikinci terim VaR_p eşiğinin üzerindeki asmanın $F_{VaR_p}(y)$ dağılımının ortalamasıdır. O, GPD için $\xi<1$ parametresi ile *"Ortalama Aşma Fonksiyonu"* olarak bilinir.

$$e(u)=E(X-u\,|\,X>u)=\frac{\sigma+\xi u}{1-\xi},\qquad \sigma+\xi u>0 \qquad (10)$$

Bu fonksiyon, u'nun değişen değerleri üzerinden X'in aşmalarının ortalamasını verir.

$$\hat{ES}_p=\hat{VaR}_p+\frac{\hat{\sigma}+\hat{\xi}(\hat{VaR}_p-u)}{1-\hat{\xi}}=\frac{\hat{VaR}_p}{1-\hat{\xi}}+\frac{\hat{\sigma}-\hat{\xi}u}{1-\hat{\xi}} \qquad (11)$$

u eşiğinin değerini seçmek için, *"Ortalama Aşma Grafiği"* olarak bilinen bir grafik aracı kullanılır. Burada mümkün u eşiği ve ortalama aşma fonksiyonu e(u) arasındaki ilişki incelenir.

Deneysel ortalama aşma fonksiyonu,

$$e_n(u) = \frac{1}{N_u}\sum_{i=1}^{Nu}(x_{(i)} - u) \tag{12}$$

$x_{(i)} = (i = 1, 2,...N_u) : x_i > u$ olacak şekildeki xi değerlerini göstermektedir.

$(u,e_n(u))$'nun grafiği, u'ya göre lineer olmalıdır.

Maksimum Olabilirlik Tahmini

$X_1, X_2,...X_n$ bilinmeyen F dağılım fonksiyonu ile kayıpların bağımsız aynı dağılmış bir örneği olsun. Verilmiş olan bir u eşiği için ekstrem değerler, $X_i - u > 0$ olmak üzere $x_{(1)}, x_{(2)},...x_{(k)}$ değerleridir.

Eşiği aşan bu değerleri $\{y_1, y_2,...y_k\}$ ile gösterelim.

Bir $y = \{y_1, y_2,...y_k\}$ örneklemi için GPD'nın log-olabilirlik fonksiyonu $L(\xi, \sigma \mid y)$, k tane gözlemin bileşik yoğunluğunun logaritmasıdır.

$$L(\xi,\sigma \mid y) = \begin{cases} -k\log\sigma - \left(\frac{1}{\xi}+1\right)\sum_{i=1}^{k}\log\left(1+\frac{\xi}{\sigma}y_i\right), & \xi \neq 0 \\ -k\log\sigma - \frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{k} y_i \end{cases} \tag{13}$$

Ekstrem değer teorisinin risk yönetimindeki kullanılışlığını göstermek için aşağıdaki örneği gözönüne alalım.

Risk yöneticisinin, yüksek bir kuantil üzerinden endeks getirisi için riskin değeri ve beklenen shortfall tahminlerini elde etmek istediğini kabul edelim. Yukarıda verilen yöntemleri kullanarak $u = 1.56$ % olarak seçelim. Bu durumda GPD'ın parametreleri $\hat{\xi} = 0.189$ ve $\hat{\sigma} = 0.915$ olarak bulunmuş olsun. $p = 0{,}01$ güven seviyesinde, normal model altında, $V\hat{a}R_{0,01} = 6.59$ % bulunur. GPD modeli altında,

$V\hat{a}R_{0,01} = 8.19$ % bulunur.

Beklenen shortfall için fark daha dramatiktir.

Normal model için

$$\hat{ES}_p = \mu + \sigma \frac{\Phi(z)}{1 - \Phi(z)}$$

$$z = (VaR_p - \mu) / \sigma \qquad (14)$$

formülü kullanılarak $\hat{ES}_{0,01} = 7.09$ % bulunur. GPD modeli altında $\hat{ES}_{0,01} =$ 10.8 % elde edilir.

SONUÇ

Çalışmada, ekstrem değer teorisinin, riskin değeri, kuyruk koşullu beklenti ve getiri seviyesi gibi kuyrukla ilişkili risk ölçümlerinin modellenmesinde nasıl kullanılabileceği gösterilmiştir.

Riskin değeri ve kuyruk koşullu beklentinin, normal varsayım ve eşiği aşan değerler yöntemi ile hesaplanan değerleri arasında anlamlı farklar görülmektedir. Blok maksima için genelleştirilmiş ekstrem değer dağılımı ve eşiği aşan değerler için genelleştirilmiş Pareto dağılımı arasında yakın bir bağlantı vardır. Genelleştirilmiş ekstrem değer dağılımının şekil parametresi ξ, genelleştirilmiş Pareto dağılımının şekil parametresi ξ ile aynıdır; ve u, eşik değerinden bağımsızdır.

YARARLANILAN KAYNAKLAR

Belkema,A.A. ve Haan,L.(1974)."Residual life time at great age." *Annals of Probability*, 2: 792-804.

Castillo,E. ve Hadi,A.(1997). "Fitting the Generalized Pareto Distribution to Data" *Journal of American Statistical Association*, 92 (440) : 1609-1620.

Dacorogna,M.M., Müller,U.A.,Pictel,O.V. ve deVries,C.G. (1995). "The Distribution of Extremal Foreing Exchange Rate Returns in Extremely Large Data Sets." Preprint, *O and A Reseach Group.*

Embrechts, P. , Klüppelberg, C., Mikosch, T. (1999). *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance.* Applications of Mathematics, Springer, 2nd ed.

Fisher, R., Tippett, L.H.C. (1928). "Limiting Forms of the Frequency Distribution of Largest or Smallest Member of a Sample." *Proceeding of the Cambridge Philosophical Society*, 24 : 180-190.

Koedijk, K.G., Schafgans, M. ve de Vries, C. (1990). "The Tail Index of Exchange Rate Returns." *Journal of Internation Economics*, 29 : 93-108.

Longin, F.M.(1996) "The Asymptotic Distribution of Extreme Stock Market Returns." *Journal of Business*, 69: 383-408.

Loreton, M. ve Phillips, P. (1994). "Testing the Covariance Stationarity of Heavy - tailed Time Series." *Journal of Emprical Finance*, 1(2) : 211-248.

McNeil, A.J. (1999). "Extreme Value Theory for Risk Managers." *In Internal Modelling and CAD II* : 93-113. Risk Books.

McNeil, A.J. ve Frey, R. (2000). "Estimation of Tail - Related Risk Measures for Heteroscedastic Financial Time Series : An Extreme Value Approach." *Journal of Emprical Finance*, 7(3-4) : 271 - 300.

Neftci,S.N.(2000)."Value at Risk Calculations, Extreme Events, and Tail Estimation." *Journal of Derivatives* : 23-27.

Pickands, J. I. (1975). "Statistical Inference Using Extreme Value Order Statistics." *Annals of Statistics*, 3: 119-131.