

Üç Boyutlu Konsol Kirişlerde Topoloji Optimizasyonu Uygulamaları

Fatih Mehmet Özkal ve Habib Uysal

Mühendislik Fakültesi, İnşaat Müh. Bölümü, Atatürk Üniversitesi, Erzurum, 25240, Türkiye.
Mühendislik Fakültesi, İnşaat Müh. Bölümü, Atatürk Üniversitesi, Erzurum, 25240, Türkiye.
Tel: +90 (442) 231-4652; Belgegeçer: +90 (442) 236-0957, fmozkal@atauni.edu.tr, huysal@atauni.edu.tr

Özet— Sayısal tabanlı yapısal topoloji optimizasyonu problemlerinin üstesinden gelebilmek için malzemenin en etkili şekilde kullanımını gözeterek geliştirilen evrimsel yapı optimizasyonu (ESO) yönteminde mevcut ve hedeflenen koşullar dâhilinde yapı davranışına etki eden birçok kistas dikkate alınmakta ve nihayetinde yapı içerisindeki gerilmelerin düzgün dağılımı sağlanarak en uygun yani düşük değerde ağırlığa ve yüksek değerde rijitliğe sahip yapılara ulaşılmaktadır. Yapı tasarımlarını geliştirme ve en uygun hale getirme yönünden nispeten yeni bir tasarım aracı olan ESO, başlangıç tasarım alanındaki elemanların bir döngü içerisinde kademeli olarak kaldırıldığı buluşsal bir yöntemdir. Uygun bir tasarım elde edilene ya da istenilen belirli bir hacme ulaşılan dek bu işlemler devam ettirilmekte ve süreç sonunda elde edilen tasarımın uygulanabilirliği irdelenerek nihai karar verilmektedir. Bu yöntem, esasında basit bir temel üzerine oturtulmuş olmasına rağmen takip eden yıllarda farklı araştırmacılar tarafından yapılan katkılarla akademik başarı bir hayli yükseltilmiştir. Bu çalışma kapsamında boyut ve şekil optimizasyonu yöntemlerine kıyasla kullanım alanı daha geniş olan topoloji optimizasyonu temelindeki ESO yöntemi ile üç boyutlu konsol kirişler üzerinde çeşitli uygulamalar yapılmış ve elde edilen tasarımların çubuk analojisi yöntemine uyarlanabilirliği irdelenmiştir.

Anahtar Kelimeler—Topoloji optimizasyonu, evrimsel yöntem, konsol kirişler

Abstract—Evolutionary structural optimization which has been constituted to deal with numerical structural topology optimization problems by considering use of material in the most effective way and also many criterions related to present and aimed conditions, uniform distribution of interior stresses and the most optimum structure which has least weight and most stiffness are aimed to reach. It is a heuristic method where a few elements of an initial design domain of finite elements are iteratively removed. Such a process is carried out repeatedly until an optimum design is achieved, or until a desired given volume is reached and final decision is made by evaluating the applicability of the last design formed after the process. Although this method is based on a simple idea, academic success towards ESO has been raised by the contributions of various researchers in the following years. Topology optimization is a more effective method in comparison with size and shape optimization methods. Some 3D cantilever beam examples of ESO which works essentially on topology optimization are presented and adaptation of these designs to strut-and-tie model is investigated in this paper.

Index Terms—Topology optimization, evolutionary method, cantilever beams

I. GİRİŞ

Boyut, şekil ve topoloji optimizasyonu, yapısal optimizasyon teknolojisinin asıl bileşenleridir [1]. Yapılan araştırmalar sonucunda topoloji optimizasyonu sayesinde yapı performansının önemli ölçüde arttığı görülmüştür [2]. Geleneksel yöntemlerin beraberinde getirdiği karmaşık hesaplamalardan kurtulmak için Evrimsel Yapı Optimizasyonu (ESO) geliştirilmiştir [3]. Evrimsel yapı optimizasyonunun esas amacı, belirli miktarda malzemeyi tasarım alanına dağıtarak belirli tasarım kısıtlayıcılarını da karşılarken en hafif ve en rijit yapıyı elde etmektir [4]. Diğer bir deyişle ESO'nun belirli bir hedef fonksiyonu asgari hale ulaştırarak standart bir matematiksel programlama yöntemi olduğu söylenebilir [5].

Betonarme bir elemanda sürekli ortamı çubuk sistemine çevirerek yapılan tasarımlar da yeni değildir. Bundan yüz yıl kadar önce Ritter ve Mörsch tarafından önerilen “kafes kiriş analojisi”, çubuk sistemli tasarımların ilki olarak kabul edilebilir [6]. Onların görüşlerine göre bir betonarme kiriş, kesme ve eğilmeye mukavemet etmede bir paralel-yatay çubuk gibi davranmaktadır [7]. Ritter'in (1899) ilk olarak gündeme getirip Mörsch (1902) tarafından geliştirilen bu yöntem ardından betonun yapı davranışına katkısını daha fazla dikkate alan “plastik kafes kiriş analojisi”, bunu takiben beton basınç kuşaklarının eğim açısını tayin eden “basınç alan teorisi” ve daha sonra da kesme ve burulma teorilerini birleştiren “yumuşatılmış kafes model” ile yapı elemanlarında özellikle kesme gerilmelerine karşı tasarımda araştırmalar yapılmış; nihayetinde sunulan “çubuk analojisi yöntemi” ile birçok durumda elverişli sonuçlar elde edildiği görülmüştür.

Bu çalışma kapsamında ESO yöntemi üç boyutlu konsol kirişler üzerinde uygulanmış ve elde edilen sonuçlar sunulmuştur. Muhtelif yükleme ve sınır koşulları altında tercih edilebilecek en uygun topolojiler, optimizasyon yardımı ile tespit edilmiş ve elde edilen tasarımların çubuk analojisi yöntemine uyarlanabilirliği irdelenmiştir. Zira literatürde daha önceden gerçekleştirilen çalışmalarda hep iki boyutlu tasarımlar üzerinde durulmuş ve yapı elemanlarında daha sıra dışı durumlara sebebiyet veren özellikle yatay yükler altındaki yapı davranışına göre tasarım gerekliliği göz ardı edilmiştir.

II. EN UYGUN TOPOLOJİNİN BELİRLENMESİ

Topoloji optimizasyonu konusuna büyük bir yenilik getiren “Evrimsel Yapı Optimizasyonu” (ESO), genellikle kafes benzeri eşit gerilmeli ve azami rijitlikte topolojiler üretmektedir [8]. ESO yöntemi esasen iki temele dayanmaktadır. Bunlardan birisi, Michell kafes sistemleridir. Bugüne dek yapılan araştırmalara göre Michell kafesleri, ağırlık (kullanılan malzeme miktarı) ve performans (yapının tümünde oluşan gerilmeler ve yer değiştirmeler) bakımından en uygun kafeslerdir. Diğer payda ise optimizasyon boyunca yapıda mikro büyüklükte boşluklar oluşturarak en uygun yapıya ulaşmayı hedefleyen Bendsoe ve Kikuchi'nin [9] sunduğu “Homojenleştirme Yöntemi”dir.

ESO, etkili olarak kullanılmayan malzemenin tasarım alanından kademeli olarak kaldırılmasıyla en uygun yapının (azami rijitlik ve asgari ağırlığa sahip) elde edilebileceği şeklinde basit bir fikir üzerine kurulmuştur. ESO yöntemi, geleneksel tekniklerle ilişkili problemlerin çoğunun üstesinden gelen yeni bir yapısal optimizasyon yaklaşımı sunmaktadır. Etkisiz malzemenin yapıdan yavaşça kaldırılmasıyla yapının şekli, döngüler dâhilinde en uygun duruma doğru yaklaşır. Bu, evrimsel yapı optimizasyonunun basit bir tanımıdır [10].

Xie ve Steven'in [11] oluşturduğu algoritmaya göre eleman modeline dış yüklemeler ve mesnet koşulları uygulanıp, yapının sonlu elemanlar analizi gerçekleştirildikten sonra bütün elemanların gerilme (von Mises) değerleri kayıt altına alınarak en düşük gerilmeye sahip elemanlar, döngüler dâhilinde kümeler halinde yapıdan ihraç edilmektedir. Bu ihraç fikri, Homojenleştirme Yöntemi'ndeki düşük gerilmeli bölgelerde boşluk oluşturma düşüncesinden türetilmiştir.

Elemana ait gerilmenin (σ_e^{vm}) tüm yapıdaki azami gerilmeye (σ_{max}^{vm}) oranlanması ile elemanların gerilme düzeyi belirlenmektedir. Diğer bir anlamda bu oranlama ile bütün elemanların yapı davranışına katkısı derecelendirilmektedir. Her bir sonlu elemanlar analizinin ardından, mevcut ret oranı RR_i 'ye bağlı olarak aşağıdaki şartı sağlayan yani etkili olarak kullanılmayan bütün elemanlar sistemden ihraç edilmektedir.

$$\frac{\sigma_e^{vm}}{\sigma_{max}^{vm}} < RR_i \Rightarrow \sigma_e^{vm} < RR_i \cdot \sigma_{max}^{vm} \quad (1)$$

Evrimsel yapı optimizasyonu sürecinde her analizden önce yeniden ağ oluşturma zorunluluğu bulunmamaktadır ki; ESO'nun önemli bir faydası da budur. Bunun yerine reddedilen elemanların malzeme özellik numarası sıfıra eşitlenmekte ve genel rijitlik matrisi oluşturulurken bu elemanlar göz ardı edilmektedir [11]. Ayrıca eleman kaldırmanın diğer bir yolu da elastisite modülü ya da eleman kalınlığı gibi boyut özelliklerine çok düşük değerlerin atanmasıdır. Örneğin Hinton ve Sienz [12], kaldırılacak elemanların elastisite modüllerini 10^{-5} ya da 10^{-6} gibi değerlerle çarpma yolunu seçmiştir. ESO üzerine çalışan araştırmacılar tarafından da analizlerde sorun yaşamamak için en çok tercih edilen yöntem budur.

RR_i değeri sabit kalmak suretiyle kısmi uygun duruma

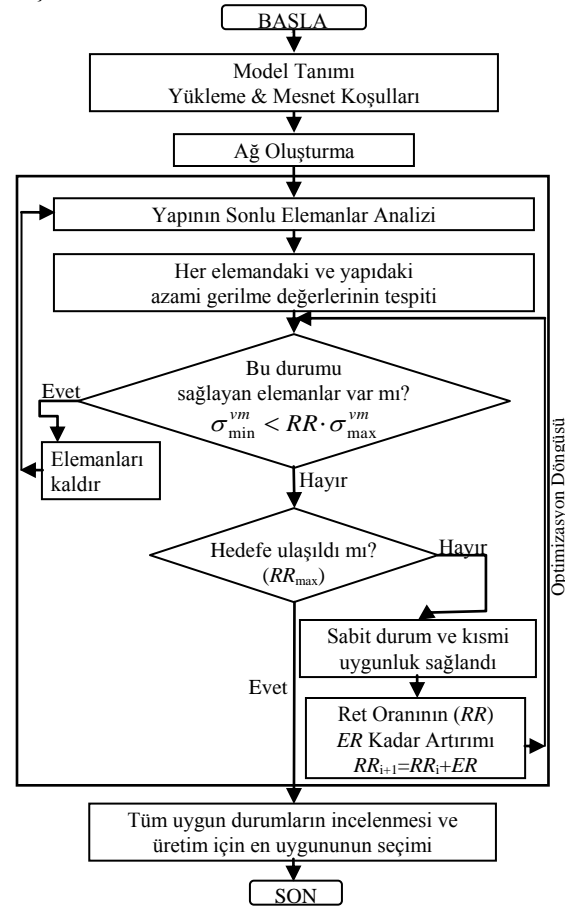
ulaşınca dek sonlu elemanlar analizi ve eleman kaldırma işlemi tekrarlanmaktadır. Kısmi uygun durumdan kasıt, mevcut alt döngü dâhilinde kaldırılacak eleman kalmadığıdır. Bu safhada da bir evrimsel oran (ER) tanımlanarak ret oranına (RR) eklenmektedir [13].

$$RR_{i+1} = RR_i + ER \quad i = 0,1,2,3,\dots \quad (2)$$

Bu işlem, belirlenen hedef duruma (yapı ağırlığı, gerilme seviyeleri, yer değiştirme değerleri, vs.) ulaşınca dek devam ettirilmektedir. İdeal olarak yapının her tarafındaki malzemenin azami dayanımına kadar gerilmeye maruz kaldığı yani tam gerilmeli tasarıma ulaşılması beklenmektedir. Bu durumun tespiti için geliştirilen muhtelif başarımlar göstergeleri literatürde mevcuttur.

Bu şekilde yapıdaki elemanlar uzaklaştırıldıkça nihayetinde kafes benzeri bir yapıya ulaşılmaktadır ve bu yapı en uygun tasarım olarak kabul edilmektedir. Bu özelliğinden dolayı ESO'nun mafsallı bağlantılara sahip yapı problemlerinde kullanılmasının daha uygun olduğu görüşü zaman zaman ileri sürülmüştür ancak özellikle son yıllarda yapılan çalışmalar göstermiştir ki; ESO, sürekli yapı problemlerinde de uygulamaya yönelik oldukça etkili sonuçlar verebilmektedir.

Uygulanan optimizasyon yönteminin akış şeması Şekil 1'de verilmiştir.



Şekil 1. ESO yönteminin akış şeması

III. ÇUBUK ANALOJİSİ YÖNTEMİ

Son yirmi yılda betonarme elemanların çubuk sistemle tasarımı üzerine yoğun araştırmalar yapılmış ve hesap yöntemleri geliştirilmiştir [6]. Çubuk analojisi yöntemi, iç gerilmelerin bir kafes sistem üzerinden yapıya dağıtıldığı bir analiz ve tasarım aracıdır. Yöntemdeki düğüm noktaları ile birleştirilen basınç ve çekme çubukları, bir kafesin elemanları gibi düşünülebilir. Oluşturulan iç kafes, eğilme momentinden ve kesmeden kaynaklanan gerilmelerin dağıtımında önemli rol oynamaktadır [14].

Betonarme yapı elemanlarının kesit boyutlarındaki ani değişiklikler, tekil yüklemeler veya mesnet tepkileri sonucu, bu bölgelerdeki iç kuvvetler akımındaki karışıklık nedeniyle süreksizlik durumları görülmektedir [15]. Yapı elemanları böylece B ve D bölgeleri olarak isimlendirilen parçalara ayrılabilirler. B bölgeleri, kiriş teorisinin (Bernoulli Hipotezi) yani kesme gerilmelerinin kesit boyunca düzgün yayılı olduğu alanlardır. B bölgeleri dışında kalan, kiriş teorisinin uygulanmadığı, süreksizlik ve karışıklıklara komşu olan alanlar da D bölgeleri yani süreksizlik bölgeleri olarak isimlendirilmektedir [16]. Betonarme elemanda çatlak oluşuktan sonra D bölgelerinde gerilmeler ve iç kuvvetler bazında büyük değişimler gerçekleşmektedir [6]. Dolayısıyla bu aşamada doğrusal-elastik davranış dışına çıkıldığından klasik hesaplamalar gerçekçi sonuçlar vermemekte ancak “çubuk analojisi yöntemi” ile oluşturulan tasarımlar çok daha başarılı çözümler üretmektedir.

Çubuk analojisi yöntemi, kiriş-kolon birleşimleri, yüksek kirişler, kısa konsollar, mesnet üzerine oturan kiriş bölgeleri gibi çok sık uygulanmayan ve her bir durum için ayrı detaylandırma gerektiren yapıların tasarımında ve boyutlandırılmasında etkili bir yöntem olarak kullanılmaktadır. Asal bir detaylandırma yöntemi olarak da nitelendirilebilen çubuk analojisi yöntemi, deneysel yöntemler, yaklaşık hesaplar ve tahmine dayalı uygulamaların yerini almaktadır. Avrupa (Eurocode) ve Amerika (ACI) yapı yönetmeliklerinde de yer alan bu yöntem, betonarme yapıların davranışını anlamak için yol göstericidir [16].

IV. PROGRAM YAPISI VE UYGULAMALAR

Söz konusu çalışmada evrimsel yapı optimizasyonunun muhtelif yapılara uygulanması için sonlu elemanlara dayalı bir optimizasyon programı geliştirilmiştir. ESO programı, süreç üzerindeki kullanıcı kontrolünü artırmak amacıyla Matlab programında hazırlanmış ve gerilme analizi için ise ANSYS kullanılmıştır.

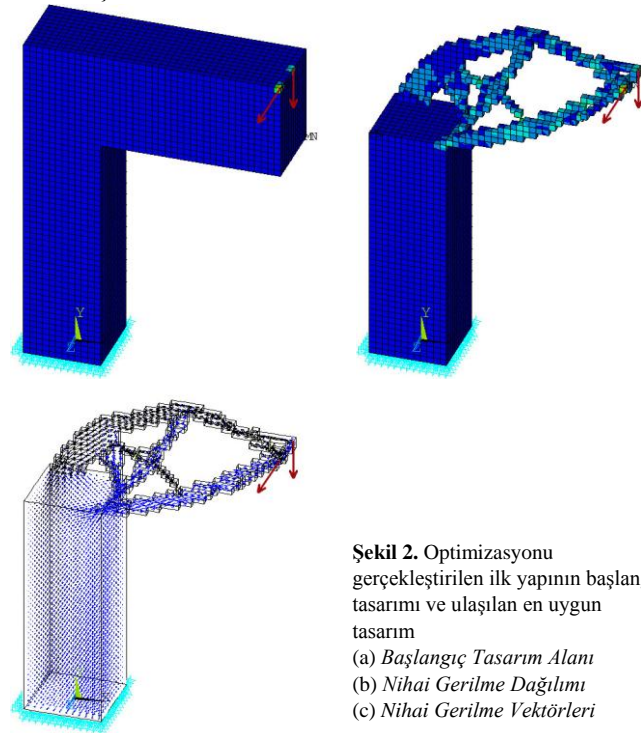
Hazırlanan programda ilk olarak optimizasyon parametreleri (RR , ER , ERR) belirlenmekte ve tasarım değişkenleri olarak sonlu elemanlar ağındaki elemanların elastisite modülleri tanımlanmaktadır. Diğer taraftan gerilme analizi için verilen yükleme ve mesnet koşullarına göre ANSYS'e gönderilmek üzere yapının modellenmesi gerçekleştirilmektedir.

Şekil 1'deki akış şemasından da görülebileceği üzere, her bir döngü dâhilinde ANSYS çalıştırılarak gerilme analizi

gerçekleştirilmekte ve yapıdaki her bir elemanın maruz kaldığı von Mises gerilmeleri bir dosyaya yazdırılarak azami ve asgari gerilme değerleri hesaplanmakta ve belirtilen parametrelere göre eleman çıkarma işlemi gerçekleştirilmektedir. Hedef duruma ulaşıldığında ise optimizasyon işlemi sona erdirilerek en uygun tasarım tespit edilmektedir.

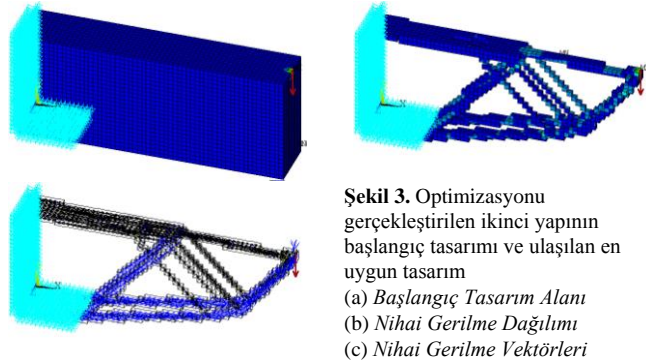
Optimizasyon uygulanacak yapıların sonlu eleman modeli için işlem doğruluğu ve zamanı dikkate alınarak kare elemanlar seçilmiş ve bu şekilde ağ oluşturulmuştur. Bu husus dikkate alınarak yapıların sonlu eleman ağına oluşturulmasında 4 düğüm noktalı, 2 boyutlu ve dolayısıyla 2 serbestlik derecesine sahip olan “Plane42” elemanı kullanılmıştır. Geometrik modelin oluşturulması, sınır koşullarının seçimi, sonlu eleman ağına teşkili, yüklerin uygulanması ve çözümün elde edilmesi için hazırlanan komutlar, ANSYS'in parametrik tasarım dili kullanılarak bir program dosyası şeklinde oluşturulmuştur. Yapılan analizler sonucunda optimizasyon için gerekli olan sonuçlar ise çözüm sonrası işlemleriyle ANSYS'in sonuç dosyalarından elde edilmiştir.

Uygulanan optimizasyon yöntemi hakkında ön fikir vermesi açısından aşağıdaki örnekler faydalı olacaktır. Çözülen ilk problemde bir kolon üzerine oturan $2,0 \times 0,6 \times 0,8$ m boyutlarındaki konsol bir kiriş seçilmiş ve optimizasyon işlemi sadece kirişe uygulanmıştır. Kirişin uç kısmında ortadan dikey ve köşeden yatay tekil yükler uygulanarak en uygun tasarım aranmıştır. Şekil 2'ye ait ilk resimde başlangıç tasarımına ait von Mises gerilmelerinin dağılımı bulunurken ikinci resimde ise 228 döngü sonucunda en uygun tasarıma ulaşılmış yapıdaki gerilme dağılımı görülmektedir. Yine en uygun tasarıma ait çekme (siyah) ve basınç (mavi) gerilmelerinin vektörel gösterimi ise üçüncü resimde sunulmuştur.



Şekil 2. Optimizasyonu gerçekleştirilen ilk yapının başlangıç tasarımı ve ulaşılan en uygun tasarım
(a) Başlangıç Tasarım Alanı
(b) Nihai Gerilme Dağılımı
(c) Nihai Gerilme Vektörleri

Çözülen ikinci problemde alttaki kolon analize dâhil edilmemiş ve 1,5x0,3x0,6m boyutlarındaki kirişin hem sol ucundan ve hem de sol alt kısmından sabit olarak mesnetlendiği varsayılarak optimizasyonu gerçekleştirilmiştir. Diğer ucunun üst orta bölgesinden tekil olarak yüklenen bu kiriş için en uygun tasarıma 168 döngüde ulaşılmış olup Şekil 3'te gösterilmektedir.



V. SONUÇ VE ÖNERİLER

İlk halinde von Mises gerilmelerini referans alarak ağırlığı azaltacak şekilde eleman kaldırma fikriyle çalışan bir topoloji optimizasyonu yöntemi olan ESO'ya sonraki yıllarda yapılan katkılar ile dinamik, çoklu yükleme ve mesnet koşulları altındaki yapıların çözümü yapılabilmekte, yapı davranışını etkileyen bütün parametreler evrimsel algoritmaya dahil edilebilmekte ve ayrıca eleman kaldırmanın yanı sıra aşırı zorlanmaya maruz bölgelere yeni eleman eklenmesi veya eleman kalınlıklarının artırılması gibi çift aşamalı algoritmalarla daha farklı sonuçlara da ulaşılabilmektedir.

Betonarme alanında ise yapısal optimizasyon araştırmaları genelde pek yer bulamamasına rağmen son birkaç yılda topoloji optimizasyonu temelli evrimsel yapı optimizasyonu kullanılarak kuramsal çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmalar göstermiştir ki ESO'nun özellikle inşaat mühendisliği alanında uygulanabilirliği açısından çubuk analojisi yöntemi çok önemli bir göstergedir. ESO'nun her yapı çeşidi için kolayca dönüştürülebilmesi, kafes benzeri yapılar oluşturma eğilimi ve literatürde mafsallı birleşimlere veya betonarme elemanlara uygulanması yönündeki tavsiyeler, bu öngörüye desteklemektedir. Ancak bu hususun sadece kuramsal çalışmalarda göz önünde tutulmuş olması, malzeme özellikleri ve gerçek yapı tepkileri gibi durumların dikkate alınıp diğer tasarım yöntemleriyle mukayese edilmemiş olması, evrimsel yapı optimizasyonu ile çubuk analojisi yöntemi arasında bir bağ kurulması konusunda deneysel bir araştırmanın gerekliliğini ortaya koymaktadır.

Çubuk analojisi yönteminde bir yapı için belirli bir detaylandırma yapılamamaktadır. Zira, mesnet ve yükleme koşullarına göre farklı sonuçlar ortaya çıkabilmektedir. Dolayısıyla bu yöntem tasarımcılara yeni uygun modeller için gerekli teknikleri ve kuralları aktarmaktadır.

Yukarıda sunulan uygulama sonuçlarından görülebileceği üzere elde edilen nihai tasarımdaki gerilme vektörleri dayanarak alınarak çekme ve basınç çubukları belirlenebilmekte ve buna göre yapı elemanındaki donatı düzenine karar verilebilmektedir. Bu yöntem sayesinde muhtelif sınır koşulları altındaki yapı elemanları için ihtiyaca göre detaylandırma yapılabilmekte ve dolayısıyla gerek ekonomi, gerekse emniyet yönünden çok daha sağlıklı sonuçlar ortaya çıkmaktadır.

Özellikle gösterilen uygulamalardaki gibi sıra dışı yükleme durumlarındaki betonarme yapı elemanlarında donatı yerleşimi büyük önem taşımaktadır. Elde edilen nihai topolojiler basınç ve çekme çubuklarına dönüştürüldüğünde, eğilme momenti ve kesmeden kaynaklanan gerilmelerin dağıtımında, oluşturulan kafes sistem önemli rol oynamaktadır.

VI. KAYNAKLAR

- [1] Zhou, M., Pagaldipti, N., Thomas, H.L., Shyy, Y.K., "An integrated approach to topology, sizing, and shape optimization" *Structural and Multidisciplinary Optimization* 26(5) 308-317, 2004.
- [2] Chu, D.N., Xie, Y.M., Hira, A., Steven, G.P., "On various aspects of evolutionary structural optimization for problems with stiffness constraints" *Finite Elements in Analysis and Design* 24(4) 197-212, 1997.
- [3] Li, Q., Steven, G.P., Xie, Y.M., "Displacement minimization of thermoelastic structures by evolutionary thickness design" *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 179(3-4) 361-378, 1999.
- [4] Guan, H., Chen, Y.J., Loo, Y.C., Xie, Y.M., Steven, G.P., "Bridge topology optimisation with stress, displacement and frequency constraints" *Computers and Structures* 81(3) 131-145, 2003.
- [5] Özkal, F.M., "Evrimsel Yapı Optimizasyonu ile Kirişlerde En Uygun Tasarımın Belirlenmesi" Yüksek Lisans Tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum, Türkiye, 2006.
- [6] Ersoy, U., Özcebe, G., "Betonarme" Evrim Yayınevi, 2001.
- [7] Kömür, M., "Betonarme kirişlerin kafes kiriş analojisinde fuzzy mantığı yaklaşımı" Y.Lisans Tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ, Türkiye, 1996.
- [8] Tanskanen, P., "The evolutionary structural optimization method: Theoretical aspects" *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 191(47-48) 5485-5498, 2002.
- [9] Bendsoe, M.P., Kikuchi, N., "Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method" *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 71(2) 197-224, 1988.
- [10] Xie, Y.M., Steven, G.P., "Evolutionary Structural Optimization" Springer-Verlag, 1997.
- [11] Xie, Y.M., Steven, G.P., "A simple evolutionary procedure for structural optimization" *Computers and Structures* 49(5) 885-896, 1993.
- [12] Hinton, E., Sienz, J., "Fully stressed topological design of structures using an evolutionary procedure" *Engineering Computations (Swansea, Wales)* 12(3) 229-244, 1995.
- [13] Steven, G.P., Li, Q., Querin, O., "Some thoughts on the physics and mechanics of the evolutionary structural optimization process" 3rd ASMO UK-ISSMO Conference on Engineering Design Optimization, Harrogate, North Yorkshire, UK, 2001.
- [14] Ahyat, A.B., "Analysis and design of hammerhead bridge pier using a strut and tie method" Y.Lisans Tezi, Malezya Teknoloji Üniversitesi İnşaat Mühendisliği Bölümü, Johor, Malezya, 2005.
- [15] Cook, W.D., Mitchell, D., "Studies of Disturbed Regions near Discontinuities in Reinforced Concrete Members" *ACI Structural Journal* 85(2) 206-216, 1988.
- [16] Yavuz, G., "Betonarme kısa konsolların davranışlarının deneysel olarak ve kafes sistem - strut and tie modellemesiyle incelenmesi" Y. Lisans Tezi, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya, Türkiye, 1999.