Volume: 08 Number: 02 Category: 01 Page: 21-26 ISSN No: 1303-6319 Cilt: 08 Sayı: 02 Kategori: 01 Sayfa: 21-26

HİSSE SENETLERİNİN FİYATLANDIRILMASI İÇİN YENİ BİR STOKASTİK MODEL ÖNERİSİ

Aladdin ŞAMİLOV* **Batuhan BOZDAĞ***

ÖZET

Bu makalede genel olarak hisse senetlerinin modellenmesi için kullanılan Samuelson modeline alternatif bir stokastik diferansiyel denklem modeli ele alınmıştır. İlk olarak, her iki model için parametrelerin tahmin formülleri verilmiş ve New York Stock Exchange (NYSE)'de işlem gören Motorola hisse senedinin 20.03.09-11.05.09 tarihleri arası günlük kapanış fiyatları veri seti için parametre değerleri elde edilerek Euler şemaları kurulmuştur. Daha sonra her iki modelden elde edilen fiyat tahminleri tablolar ve şekiller halinde verilmiştir. Son olarak, modeller Euclid metriği kriterine göre karşılaştırılmış ve alternatif modelin bu veri seti için Euclid metriği kriterine göre Samuelson modelinden biraz daha iyi sonuçlar ortaya koyduğu görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Stokastik diferansiyel denklem, Samuelson modeli, Hisse senedi, Euler şeması.

1. GİRİŞ

Bilindiği gibi hisse senedi fiyatlarının tahmin edilmesi problemi önemli bir problem olarak her zaman dikkate alınmıştır. İlk olarak L. Bachelier hisse senedi fiyatlarını

$$X(t,\omega) = X(0,\omega) + \mu\, t + \sigma W(t,\omega) \qquad (1)$$

stokastik süreci ile modellemiştir (Cootner, 1967). Burada $\Re$, $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ olasılık uzayı üzerinde tanımlanmış $E(|X|^2) < \infty$ koşulunu sağlayan rassal değişkenlerin $||X|| = \left(E(|X|^2)\right)^{1/2}$ normuyla birlikte bir Banach uzayı ve $\mathfrak{S}$, $(\Omega,\mathfrak{F},P)\times[0,T]$ üzerinde tanımlanmış $\int_0^T E|X(t)|^2 dt < \infty$ koşulunu sağlayan stokastik süreçlerin $||X(t)|| = (\int_0^T E|X(t)|^2 dt)^{1/2}$ normuyla birlikte bir Banach uzayı olmak üzere, $W(\cdot\,,\cdot) \in \mathfrak{S}$ Wiener süreci, $X(0,\cdot) \in \Re$ ise hisse senedinin başlangıç değeridir. Ancak bu model negatif değerler alabildiğinden ve hisse senedi fiyatları hiç bir zaman negatif olamayacağından günümüzde geçerli bir model değildir. P.A. Samuelson (1965) ise hisse senedi fiyatları için

$$X(t,\omega) = X(0,\omega)e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t,\omega)} \qquad (2)$$

modelini önermiştir. Daha sonra bu modelin

[*]Prof. Dr. Anadolu Üniveristesi, Fen Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü, Eskişehir, e-posta: asamilov@anadolu.edu.tr
[**]Yüksek Lisans Öğrencisi, Anadolu Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü, Eskişehir, e-posta: bbozdag@anadolu.edu.tr

$$X(t,\omega) = X(0,\omega) + \mu \int_0^t X(s,\omega) \; ds + \sigma \int_0^t X(s,\omega) dW(s,\omega) \tag{3}$$

integral denkleminin bir çözümü olduğu görülmüştür. Burada birinci integral bir Lebesgue integrali (Şamilov, 2007) ikinci integral ise Itô integralidir (Allen, 2007). Bu integral denklem sembolik olarak

$$dX(t,\omega) = \mu \, X(t,\omega)dt + \sigma X(t,\omega)dW(t,\omega) \tag{4}$$

şeklinde gösterilir ve bu denkleme ise Itô stokastik diferansiyel denklemi (ISDD) denir. Bu model günümüzde hisse senetlerinin modellenmesi için sıklıkla kullanılan bir modeldir. Biz ise bu makalede Allen (2007)'de iki hisse senedi için verilen modelin tek hisse senedi için özel bir halinin geliştirilmesi ve bu model ile (3) modelinin aynı veri seti üzerinde karşılaştırması üzerine çalıştık.

2. MODELİN GELİŞTİRİLMESİ

$H(t,x)$ hisse senedinin t anındaki fiyatını göstermek üzere, küçük bir Δt zaman değişimi içindeki hisse senedi fiyatındaki değişimi ΔH ile gösterelim. Bu durumda ΔH değişimi için üç durum söz konusu olur. Bu değişimleri $\Delta H = 1$, $\Delta H = -1$ ve $\Delta H = 0$ ile gösterelim. Burada küçük Δt değişimi için $\Delta H = 1$ hisse senedi fiyatındaki bir birimlik artışı, $\Delta H = -1$ bir birimlik azalışı ve $\Delta H = 0$ise hisse senedi fiyatında herhangi bir değişim olmadığını gösterir. Hisse senedi fiyatlarındaki değişim olasılıklarının hisse senedi fiyatlarıyla doğru orantılı olduğu varsayılır (Allen, 2007). Bu kabulle birlikte fiyatlardaki değişimler ve bu değişimlere karşılık gelen olasılıklar Tablo 1'de verilmiştir.

Tablo 1. Değişimler ve değişimlere karşılık gelen olasılıklar

ΔH	Olasılık
$\Delta H_1 = 1$	$p_1 = b(t,x)H\Delta t$
$\Delta H_2 = -1$	$p_2 = d(t,x)H\Delta t$
$\Delta H_3 = 0$	$p_3 = 1 - (p_1 + p_2)$

Burada $b(t,x)$ ve $d(t,x)$ hisse senedinin kazanç ve kayıp oranlarını göstermektedir. $P(t,x)$ hisse senedi fiyatının t anındaki olasılık yoğunluğu olmak üzere toplam olasılık kuralından

$$P(t+\Delta t, x) = P(t,x)[1 - (p_1 + p_2)] \tag{5}$$

$$+b(t,x-1)HP(t,x-1)\Delta t$$
$$+d(t,x+1)HP(t,x+1)\Delta t$$

yazılabilir. İkinci ve üçüncü toplananların (t,x) noktası civarında ikinci mertebeden Taylor açılım polinomları

$$b(t,x-1)P(t,x-1)H \approx PbH - \frac{\partial(PbH)}{\partial x} + \frac{\partial^2(PbH)}{\partial x^2} \tag{6}$$

$$d(t,x+1)P(t,x+1)H \approx PdH + \frac{\partial(PdH)}{\partial x} + \frac{\partial^2(PdH)}{\partial x^2} \tag{7}$$

şeklinde yazılabilir. (6) ve (7)'yi (5)'te yerine yazarsak

$$\begin{aligned} P(t+\Delta t,x) &= P(t,x) - P(t,x)bH\Delta t - P(t,x)dH\Delta t \\ &+PbH\Delta t - \frac{\partial(PbH)}{\partial x}\Delta t + \frac{\partial^2(PbH)}{\partial x^2}\Delta t \\ &+PdH\Delta t + \frac{\partial(PdH)}{\partial x}\Delta t + \frac{\partial^2(PdH)}{\partial x^2}\Delta t \end{aligned} \tag{8}$$

elde edilir. Buradan da ilgili düzenlemeler yapıldıktan sonra $\Delta t \to 0$ için $P(t,x)$'in yaklaşık olarak

$$\frac{\partial P}{\partial t}(t,x) = -\frac{\partial\big((b-d)PH\big)}{\partial x}(t,x) + \frac{\partial^2(b+d)PH}{\partial x^2}(t,x) \tag{9}$$

Fokker-Plank (ileri Kolmogorov denklemi) kısmi türevli diferansiyel denklemini sağladığı görülür. Burada (t,x) ile (9) denklemine ait kısmi türevlerin değer aldığı noktalar gösterilmektedir.

Diğer yandan

$$dH(t,\omega) = (b-d)H(t,\omega)dt + \sqrt{(b+d)H(t,\omega)}dW(t,\omega) \tag{10}$$

$$H(t_0,\omega) = H_0$$

ISDD'nin çözümü olan stokastik sürecin olasılık yoğunluk fonksyonunun da (9) denklemini sağladığı Itô lemması (Allen, 2007) ve varyasyon hesabın du Bois-Reymond lemması (du Bois-Reymond, 1879) yardımıyla ispatlanabilir. Bu nedenle (10) denklemi hisse senedi fiyatları için uygun bir model olarak alınabilir. Bu modelde parametreler birer değişken olmalarına karşın biz bu parametreleri, parametre tahmin işlemlerini basitleştirmek amacıyla $(b-d) = \varphi$ ve $(b+d) = \psi$ olarak kabul ettik.

3. MODEL PARAMETRELERİNİN TAHMİNİ

Denklem (10) ve (3)'ten fiyat tahminleri yapılabilmesi için model parametrelerinin tahmin edilmesi gerekmektedir. Model parametrelerinin tahmin edilebilmesi için ise Allen (2007)'de verilen parametrik olmayan yöntem kullanılabilir . Buna göre (10) denkleminin φ ve ψ parametrelerinin $\hat{\varphi}$ ve $\hat{\psi}$ tahminleri için

$$\hat{\varphi} = \frac{1}{\Delta h}\,\frac{\sum_{i=0}^{N-1}(x_{i+1}-x_i)}{\sum_{i=0}^{N-1}x_i} \qquad \hat{\psi} = \frac{1}{\Delta h}\,\frac{\sum_{i=0}^{N-1}(x_{i+1}-x_i)^2}{\sum_{i=0}^{N-1}x_i} \tag{11}$$

formülleri, (3) denkleminin μ ve σ parametrelerinin $\hat{\mu}$ ve $\hat{\sigma}$ tahminleri için ise

$$\hat{\mu} = \frac{1}{\Delta h} \frac{\sum_{i=0}^{N-1}(x_{i+1} - x_i)}{\sum_{i=0}^{N-1} x_i} \qquad \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{\Delta h} \frac{\sum_{i=0}^{N-1}(x_{i+1} - x_i)^2}{\sum_{i=0}^{N-1} x_i^2}} \tag{12}$$

formülleri geçerli olur. Burada x_i, $i = 0,1,\dots,N$ veri değerleridir. Görüldüğü gibi $\hat{\mu} = \hat{\varphi}$, $\hat{\sigma} \neq \hat{\psi}$ dir.

3.1 Nümerik Çözüm

Ele alınan stokastik diferansiyel denklem (SDD)'leri nümerik olarak çözmek için Euler-Maruyama (EM) yöntemi kullanılmıştır. Genel anlamda

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dW(t)$$

şeklindeki bir SDD'nin EM şeması $i = 0,1,\dots,N-1$ için aşağıdaki gibidir:

$$Y_{i+1}(\omega) = Y_i(\omega) + f(t_i, Y_i(\omega))\Delta t + g(t_i, Y_i(\omega))\Delta W_i(\omega),$$
$$Y_0(\omega) = X(0,\omega)$$

Burada $Y_i(\omega) \approx X(t_i,\omega)$, $t_i = i\,\Delta t$, $\Delta t = T/N$, ve

$\Delta W_i(\omega) = (W(t_{i+1},\omega) - W(t_i\omega)) \sim N(0,\Delta t)$' dir (Kloeden ve Platen, 1999).

Genel EM şemasına göre denklem (10)'un $i = 0,1,\dots,N-1$ için EM şeması

$$Y_{i+1}(\omega) = Y_i(\omega) + \varphi, Y_i(\omega)\Delta t + \sqrt{\psi\, Y_i(\omega)\Delta t}\,\eta_i(\omega) \tag{13}$$

$Y_0(\omega) = X(0,\omega)$
olmakta, denklem (3) için ise;

$$Y_{i+1}(\omega) = Y_i(\omega) + \mu\, Y_i(\omega)\Delta t + \sigma\, Y_i(\omega)\sqrt{\Delta t}\,\eta_i(\omega) \tag{14}$$

$Y_0(\omega) = X(0,\omega)$
olmaktadır. Burada $\eta_i \sim N(0,1)$ rassal değişkenler olup EM şeması uygulandıktan sonra tahminler elde edilen gerçekleşmelerin ortalamaları olarak alınır.

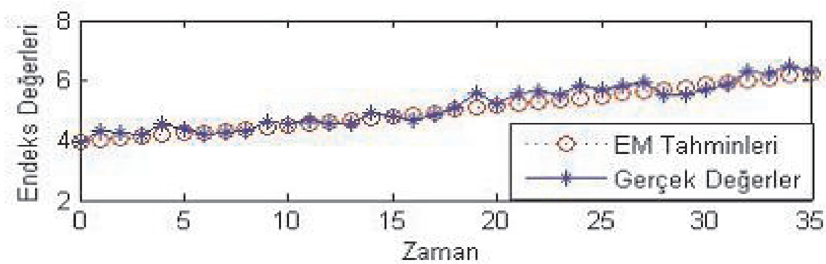
4. BULGULAR

Model parametrelerinin elde edilebilmesi ve modellerin karşılaştırılabilmesi için New York Stock Exchange (NYSE)'de işlem gören MOTOROLA hisse senedinin 20.03.09-11.05.09 tarihleri arası günlük kapanış fiyatları veri seti ele alınmıştır (NYSE, 2010). Bu verilere göre $\Delta h = 1$ olmak üzere (11) ve (12) formüllerinden elde edilen parametre tahminleri $\hat{\varphi} = 0.01296$, $\hat{\psi} = 0.01044$, $\hat{\mu} = 0.01296$ ve $\hat{\sigma} = 0.04486$, (13) ve (14)'te yerlerine konulduktan sonra (13) ve (14) şemaları 50000 gerçekleşme ve $\Delta t = 1/128$ için uygulanmış ve sonuçlar Tablo 2'de gerçek değerlerle birlikte verilmiştir.

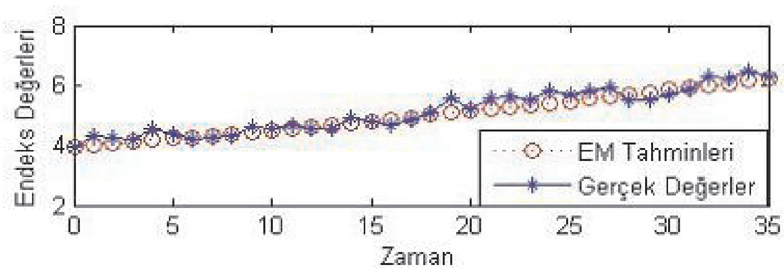
Tablo 2. Gerçek endeks değerleri ve EM tahminleri

	Gerçek Fiyat	(13) ile Tahmin	(14) ile Tahmin		Gerçek Fiyat	(13) ile Tahmin	(14) ile Tahmin		Gerçek Fiyat	(13) ile Tahmin	(14) ile Tahmin
1	3.96	3,9600	3,9600	13	4.54	4,6299	4,6294	25	5.81	5,4140	5,4137
2	4.31	4,0107	4,0109	14	4.54	4,6896	4,6895	26	5.71	5,4800	5,4797
3	4.23	4,0613	4,0616	15	4.9	4,7511	4,7505	27	5.81	5,5507	5,5503
4	4.20	4,1187	4,1185	16	4.81	4,8109	4,8112	28	5.96	5,6241	5,6242
5	4.55	4,1719	4,1718	17	4.68	4,8681	4,8688	29	5.53	5,6839	5,6837
6	4.37	4,2222	4,2225	18	4.87	4,9334	4,9337	30	5.54	5,7545	5,7536
7	4.20	4,2783	4,2785	19	5.10	5,0101	5,0093	31	5.71	5,8544	5,8538
8	4.23	4,3302	4,3306	20	5.56	5,0697	5,0698	32	5.87	5,9161	5,9153
9	4.33	4,3864	4,3871	21	5.24	5,1336	5,1340	33	6.31	5,9990	5,9977
10	4.63	4,4480	4,4482	22	5.57	5,1866	5,1876	34	6.22	6,0711	6,0711
11	4.56	4,5112	4,5108	23	5.66	5,2660	5,2659	35	6.50	6,1431	6,1426
12	4.69	4,5612	4,5616	24	5.51	5,3383	5,3381	36	6.27	6,2335	6,2329

Ayrıca sırasıyla Şekil 1 ve Şekil 2'de (13) ve (14) ile yapılan tahminler ve gerçek değerler grafiklendirilmiştir.



Şekil 1. Alternatif model tahminleri ve gerçek değerler



Şekil 2. Samuelson modeli tahminleri ve gerçek değerler

Bu çalışmada model karşılaştırma kriteri olarak $\mathbb{R}^{36}$'nın Euclid metriği, yani $i = 0,1,\dots,35$ için $x = (x_0, x_1, \dots, x_{35})$ vektörü gerçek değerleri, $\hat{x} = (\hat{x}_0, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{35})$ vektörü ise tahmin değerleri göstermek üzere, $d(x,\hat{x}) = \left(\sum_{i=0}^{35} (x_i - \hat{x}_i)^2 \right)^{1/2}$ kullanılmıştır. Bu formülde $\hat{x}^{(1)}$ ile (13) tahmini ve $\hat{x}^{(2)}$ ile (14) tahmini gösterilmiştir. Tablo 2'de verilen değerler yardımıyla hesaplanan uzaklıklar ise (10) ve (3) için $d(x,\hat{x}^{(1)}) = 1.33211564190$ ve $d(x,\hat{x}^{(2)})$ = 1.33230877749 olarak elde edilmişlerdir.

Bu sonuç ise alternatif modelin Samuelson modelinden ele alınan veri seti için biraz daha iyi sonuçlar verdiğini göstermektedir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada, hisse senetlerinin modellenmesi için kullanılan Samuelson modeline alternatif bir stokastik diferansiyel denklem modeli ele alınmıştır (bkz denklem (10)). İlk olarak, her iki model için parametrelerin tahmin formülleri verilmiş ve bir uygulama yapılmıştır. Son olarak, modeller Euclid metriği kriterine göre karşılaştırılmış ve alternatif modelin bu veri seti için Samuelson modelinden biraz daha iyi sonuçlar ortaya koyduğu görülmüştür. Bu çalışmada yalnız bir veri seti üzerinden tek bir tahminle sonuçlar elde edilmiştir. Kapsamlı bir simülasyon çalışması ile modelin istatistiksel anlamlılığına bakılabilir.

6. KAYNAKLAR

Cootner, P.H., 1967. The Random Character of Stock Market Prices. Sayfa: 17-78, MIT Press, Cambridge.

Kloeden P.E., Platen, E., 1999. Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. Springer, Germany.

Allen, E. 2007. Modeling with Itô Stochastic Differential Equations. Springer, Netherlands.

Bobrowski, A., 2005. Functional Analysis for Probability and Stochastic Processes. Cambridge University Press, New York, USA.

Samuelson, P.A., 1965. Rational theory of warrant pricing. Ind. Mngt. Rev., Sayı: 6, Sayfa: 13-31.

http://au.finance.yahoo.com/q/hp?s=MOT adresinden 04.03.2010 tarihinde erişilmiştir.

Şamilov, A., 2007. Ölçüm Teorisi. Olasılık ve Lebesgue İntegrali, Anadolu Üniversitesi Yay., No:1734(30), Eskişehir.

Du Bois-Reymond, E., 1879. Erläuterungen zu der Anfangsgründen der Variationsrechnung. Sayfa: 283-314, Math. Ann., 15.

A NEW STOCHASTIC MODEL FOR STOCK PRICES

ABSTRACT

As an alternative to the widely used Samuelson model, a stochastic differential equation model for modeling the stock prices is investigated. Firstly, the formulas for estimating the parameters are given for both models. Then Euler schemes are constructed via estimating the values of parameters for daily closing prices of Motorola stock, which is traded in New York Stock Exchange (NYSE), between the dates of 03.20.09-05.11.09. Estimated prices from both models are illustrated in figures and tables. Finally, both models are compared through Euclidean metric criteria and it has been shown that alternative model suggests slightly better results when compared to Samuelson model.

Keywords: Stochastic differential equation, Samuelson model, Stock, Euler scheme.