MÜHENDİS BEYİNLER DERGİSİ | JOURNAL OF ENGINEER BRAINS

YIL | YEAR 2018

Bilim, Mühendislik ve Teknoloji Yayınları

ISSN: 2528 - 9802

Sayı | No: 3
Cilt | Volume: 1

Gramian Matrislerinin Lyapunov Denklemine Uygulaması

Mushab Bedirhan ANDIZ
Bahcesehir College – Kahramanmaraş Campus, Kahramanmaraş, Turkey
Center for Mathematics, Mathematics Researcher, Ankara, Turkey
bedirhanandiz94@gmail.com

Özet: *Bu çalışmada Gramians teoreminin matrisler üzerindeki uygulamasını ve yeni bir tanımını üzerinde durulmuştur. Vektörlerin matrisler üzerindeki uygulamalarının pozitif değerli bileşenlerinin hangi biçimde tanımlanacağı kurallar dahilinde bahsedildi. C^4 üzerinde çalışılan bu vektörlerin adi toplama üzerinde 2×2 ve 4×4 biçimindeki matrislerde tanımlı olması gerekmektedir.*

Anahtar Kelime: *Gramian Fonksiyonları, Lyapunov denklemleri, Hurwitz Matrisi*

The Application of Gramian Matrices to Lyapunov Equation

Abstract: *In this study, it is given a new definition of the application of the Gramians theorem on matrices. Noticed on how the positive-valued components of the vectors' applications on the matrices can be defined. To study on C^4 so that these vectors are defined on 2x2 and 4x4 matrices on the ordinary collection.*

Keywords: *Gramians Function, Lyapunov Equations, Hurwitz Matrix*

1. GİRİŞ

Teorem: $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3, \mathrm{x}_4 \in \mathbb{C}^4$ olmak üzere tanımlanan vektörler için $A = (a_i, a_j)$ şeklinde gösterilsin. İç çarpımlarının eliptik değeri için (x_i, x_j) şeklinde gösterilsin. Bu değeri iç çarpım olarak kabul edildi.

İspat: v_1, v_2, v_3, v_4 olsun. $(Av, v) \geqq 0$ olmasının temel koşulunu

$$\mathrm{Au} = \mathrm{v} = (\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3, \mathrm{v}_4)$$

Oluşturur. Eğer $Au = v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ şeklindeyse,

$$v_j = \sum_i (x_i, x_j) u_i$$

Olacaktır. Bu durumda tanımlanan vektörler için sınır değer teoremi ile,

$$(Au, u) = (u, v) = \sum_j \sum_i (x_i\, , x_j) u_i u_j$$

Bu durumda eşitliği dağıtarak, yeni bir dağılım yapabilir. Herhangi bir baza sahip singüler matrislerin dönüşümleri için bu güzel bir yöntem olacaktır.

Sayı | No: 3
Cilt | Volume: 1
ISSN: 2528 - 9802

$$\sum_j \left(\sum_i (x_i u_i, x_j) \right) u_j = (\sum_i x_i u_i, \sum_j x_j, u_j)$$

Şeklinde yazılacaktır. Bu ise $(Av, v) \geqq 0$ olduğunun göstergesidir. Hatta yukarıdaki ifade daha net şekilde,

$$\left\| \sum_i x_i u_i \right\|^2 \geqq 0$$

Olacaktır.

Teorem: $\mathrm{x}(0) = 0$ olmak üzere, $u(t)$ bir Gramian fonksiyondur. Burada $x(\tilde{t}) = \tilde{x}$ ve $\tilde{t} > 0$ değerli bir sabittir.

İspat: $\bar{x} = x(\tilde{t}) = \int_0^{\tilde{t}} e^{A(\tilde{t}-T)} B.u.(T)dT$ olduğunu açıktır. Burada "u" noktasının limit ile yaklaşımı ile,

$$u(t) = B^T e^{A^T(\tilde{t}-t)} \bar{z}$$

Yerine koyarsak,

$$\tilde{x} = \int_0^{\tilde{t}} e^{A(\tilde{t}-T)} B B^T e^{A^T(\tilde{t}-t)} \bar{z} dT$$

Şeklini alacaktır. Sabitin yerinin değişmesi ile,

$$\bar{x} = (\int_0^{\tilde{t}} e^{A(\tilde{t}-T)} B B^T e^{A^T(\tilde{t}-T)} dT) \bar{z}$$

Olacaktır. Bu karmaşıklıktan kurtulmak adına $\xi = \bar{t} - T$ dönüşümü yapılırsa denklem,

$$\bar{x} = (\int_0^{\bar{t}} e^{A\xi} B B^T e^{A^T \xi} d\xi) \bar{z}$$

Ve

$$\bar{z} = (\int_0^{\bar{t}} (e^{A\xi} B B^T e^{A^T \xi} d\xi)^{-1}$$

Haline gelecektir. Simetrik matris dönüşümünde önce ilk yöntem olmasına karşın ilk olarak $\bar{z}$ 'den yola çıkarak $u(t)$'yi bulunması gereklidir.

$$\bar{z} = (\int_0^{\bar{t}} (e^{A\xi} B B^T e^{A^T \xi} d\xi)^{-1} \rightarrow u(t) = B^T e^{A^T(\bar{t}-t)} (\int_0^{t} (e^{A\xi} B B^T e^{A^T \xi} d\xi)^{-1} \bar{x}$$

Oldu. Şimdi hemen simetrik matrisleri kullanarak, Gramian kontrol edilebilirlik formülünü elde edilir.

$$X(t) \coloneqq \int_0^{t} e^{A\xi} B B^T e^{A^T \xi} d\xi$$

Sayı | No: 3
Cilt | Volume: 1
ISSN: 2528 - 9802

Gramian teoreminin temek kanıtından sonra henüz (1991, P.Kall) çok yeni denilebilecek bir çalışmayı daha farklı bir şekilde gösterelim.

Teorem: Gramian Kontrol Teoremi, $X(t) \coloneqq \int_0^t e^{A\xi}BB^T e^{A^T\xi}d\xi$ ile gösteriliyordu. Yukarıda bulduğumuz, $\frac{d}{dt}X(t) = AX(t) + X(t)A^T + BB^T$ diferansiyel denkleminin çözümüdür. Eğer, $\mathrm{X} = \lim_{t\to\infty} X(t)$ ise, bu durumda da,

$$AX + XA^T + BB^T = 0$$

Olacaktır.

Teorem: Yukarıdaki teoremden yola çıkarak,

$$\frac{d}{dt}Y(t) = A^T Y(t) + Y(t)A + C^T C$$

Diferansiyel denkleminin çözümü, matris dönüşümü ile

$$A^T Y + YA + C^T C = 0$$

Olacaktır. Fakat bu çözümün olması için gerek koşul, $\lim_{t\to\infty} X(t)$'nin var olmasıdır.

Kanıt/Kontrol Edilebilirlik: ilk olarak birinci kısmı hesaplamak gerekmektedir.

$$\frac{d}{dt}X(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t e^{A\xi}BB^T e^{A^T\xi}d\xi = \frac{d}{dt}\int_0^t e^{A(t-T)}BB^T e^{A^T(t-T)}dT$$

$$= \int_0^t \frac{d}{dt}e^{A(t-T)}BB^T e^{A^T(t-T)} + e^{A(t-T)}BB^T e^{A^T(t-T)}dT$$

Olacaktır. $T = t$ noktasında

$$A\left(\int_0^t e^{A(t-T)}BB^t e^{A^t(t-T)}dT\right) + (\int_0^t e^{A(t-T)}BB^T e^{A^T(t-T)}dT)A^T + BB^T$$

Olacaktır. Bu da zaten,

$$AX(t) + X(t)A^T + BB^T$$

Halini alacaktır. İkinci kısmın kanıtı ise $X(t)'nin$ düzgün ve

$$\lim_{n\to\infty} X(t) = X \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{d}{dt}X(t) = 0$$

Olduğu ile gösterilebilir.

Lemma: $\mathrm{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ve $\mathrm{C} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ olmak üzere Lyapunov denklemi, $A^T X + XA + C^T C = 0$ olarak bilinir. Bu özel denklem için 4 tane farklı durum vardır.

1-) $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ çözümünün olması için $\lambda_J(A) + \lambda_{\mathrm{i}^*} \neq 0$ olması gerekir. Bu durumda da X simetriktir. $(\, i, j = 1, \dots\dots, n\,)$

2-) Eğer A Hurwitz matrisi ise X yarıkesin (semidefinite) matristir.

Sayı | No: 3
Cilt | Volume: 1
ISSN: 2528 - 9802

3-) Eğer A Hurwitz matrisi ve X ise pozitif semidefinite ise (A, C) keşfedilebilirdir.

4-) Şayet ilk adımda A Hurwitz ve X pozitif semidefinite ise bu durumda da (A, C) gözlenebilirdir.

İspat: Bu lemmada ispatlanması gereken ve farklı bir teori ile gösterilecek olan (2) Hurwitz matrisinin özel bir halini oluşturmaktadır. Şayet A Hurwitz ise,

$$\lim_{n\to\infty} e^{At} = 0$$

olur. Bu ise,

$$X = \int_0^\infty e^{A^T t} C^T C e^{At} dt \succcurlyeq 0$$

Doğrudan ilişkilidir. Bu durumda da,

$$A^T X + XA = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{d}{dt} e^{A^T t} C^T C e^{At} dt = e^{A^T t} C^T C e^{At} \Big|_0^\infty = -C^T C$$

Olacaktır.

2. SONUÇ

Lyapunov denklemleri matrislerin özel bir halini meydana getirmektedir. Bir diferansiyel denklem kullanılarak matrislerin özel dönüşümleri incelendi. 2×2 matrisler (1965) çözüme kavuşturulmuştur. Fakat $\mathbb{C}^4$ üzerinde birtakım eksiklikler oluştu. $x(t)$ çözümünü diferansiyel denklemin bir çözümü kabul ederek yeni bir çözüm arayışına girdik. Fakat çözümümüz sınırlı kaldı.

$$\lim_{n\to\infty} X(t) = X \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{d}{dt} X(t) = 0$$

için belirli bir çözüm hesaplanabildi. Diğer katsayıların eksikliği ve

$$X = \int_0^\infty e^{A^T t} C^T C e^{At} dt \succcurlyeq 0$$

olmasından sınır değeri $\mathbb{C}^{n\times n}$'den seçmemiz gerekmektedir.

REFERANSLAR

[1] B.Cain, L. M. DeAlba, L. Hogben, C. R. Johnson, Multiplicative perturbations of stable and convergent operators, Linear Algebra and its Applications, 268:151–169, 1998.

[2] Sewell, G., The Numerical Solutions of Ordinary & Partial Differential Equations, Academic Press, 1997.

[3]www.ru.ac.za/media/rhodesuniversity/content/mathematics/documents/thirdyear/linearcontrol /AM32LC4%20Stability.pdf

[4] http://www.cems.uvm.edu/~tlakoba/08_fall/EE_295/Routh_Hurwitz_Criterion.pdf

[5] http://www.ece.mcmaster.ca/~davidson/EE3CL4/slides/Routh_Hurwitz_handout.pdf