Soylu, S., Korkmaz Usta, E. (2024). Düzlemsel Hareket Altında Bazı Özel Eğri Tiplerine En Az Eylem İlkesinin Uygulanması. *Karadeniz Fen Bilimleri Dergisi*, 14(2), 634-654.

Karadeniz Fen Bilimleri Dergisi, 14(2), 634-654, 2024. DOI: 10.31466/kfbd.1406324

KFBD

Karadeniz Fen Bilimleri Dergisi
The Black Sea Journal of Sciences
ISSN (Online): 2564-7377 https://dergipark.org.tr/tr/pub/kfbd

Araştırma Makalesi / Research Article

Düzlemsel Hareket Altında Bazı Özel Eğri Tiplerine En Az Eylem İlkesinin Uygulanması

Serdar SOYLU[1*], Elvan KORKMAZ USTA[2]

Öz

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Çalışmanın giriş bölümünde literatür özeti verilip ikinci bölümde bazı özel sikloid tipi eğri tanımları verilmiş ve en az eylem ilkesi ifade edilmiştir. Çalışmanın orijinal kısmı üçüncü bölümdür. Bu bölümde öncelikle kapalı düzlemsel hareket altında özel sikloid tipi eğriler ifade edilmiş ve bu eğrilere en az eylem ilkesi uygulanmıştır. Eğrilerin minimal eylem noktalarının hesaplanabilmesi için hareketli düzlemin noktalarının enerjileri hesaplanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Düzlemsel Hareket, Sikloid Tipi Eğriler, En Az Eylem İlkesi, Kinetik Enerji.

The Application of the Principle of Least Action to the Some Special Curve Types Under the Planar Motion

Abstract

This study consist of four chapters. In the introduction chapter, the summary of literature is given. In the second chapter, some specific cycloid-type curve definitions are given and the principle of least action is expressed. The orginal part of the study is the third chapter. Firstly special cycloid-type curves are expressed under closed planar motion and the principle of least action is applied to these curves in this chapter. The energies of the points of the moving plane are calculated in order to calculate the minimum action point of these curves.

Keywords: Planar Motion, Cycloid Type Curves, Principle of Least Action, Kinetic Energy.

[1,2]Giresun University, Faculty of Art and Sciences, Giresun, Turkey, serdar.soylu@giresun.edu.tr elvan.korkmaz@giresun.edu.tr

[*]Sorumlu Yazar/Corresponding Author

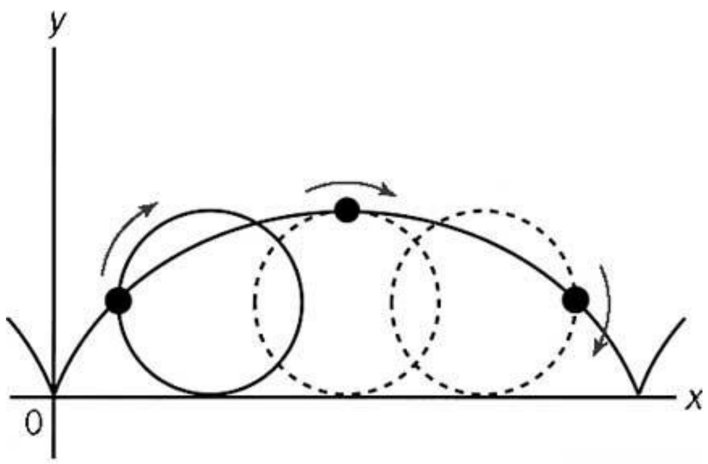
Geliş/Received: 18.12.2023 **Kabul/Accepted:** 30.05.2024 **Yayın/Published:** 18.06.2024

1. Giriş

Geometri, dönüşümler altında değişmezlerin teorisidir. Bir cismin sabit bir noktaya göre zamana karşı yer değiştirmesine hareket denir. Hareketle ilgili bilim dalları mekanik ve kinematik olarak sınıflandırılabilir. Mekanikte hareketin kuvvet ve kütle üzerinde etkisi incelenirken, kinematikte maddenin konumu, hızı gibi nitelikler incelenir. Mekaniğin bir dalı olan kinematikte hareketi doğuran sebepler göz ardı edilir ve hareketin nasıl gerçekleştiği ele alınır. Bu nedenle, kinematik, hareket geometrisi dönüşümü altında değişmezlerin teorisidir (Müller vd, 1963).

Kayakçıların inişlerini en kısa sürede bitirebilmesi için kayak pistinin eğimi nasıl olmalıdır? Buna benzer problem 1696'da Johann Bernoulli'nin aklına geldi. Bernoulli "dik bir düzlemde, iki nokta arasındaki yolun şekli nasıl olmalıydı ki bu noktalar arasındaki mesafe en kısa sürede alınabilsin?" sorusunu soruyordu. Burada, hareketin sürtünmesiz bir ortamda ve sadece yerçekimi altında gerçekleştirileceğini anlıyoruz. Bernoulli yaptığı çalışmalar ve hesaplamalar neticesinde iki nokta arasındaki mesafeyi en kısa sürede alabilecek yolun sikloid eğrisi olacağı bilgisine ulaşmıştır.

Bir doğru (veya bir çember) üzerinde kaymaksızın yuvarlanma hareketi yapan bir çemberin üzerindeki sabit bir X noktasının geometrik yerini oluşturan eğrilere sikloid tipi eğriler denir. X noktası çemberin üzerinde, içinde ya da dışında olabilir. Bu X noktasının çemberin üzerinde olması durumunda X noktasının geometrik yeri olan eğriye düzgün sikloid eğrisi denir. X noktası çemberin içinde olabilir. Bu durumda X noktasının geometrik yeri olan eğriye ilmiksiz sikloid eğrisi denir. X noktası çemberin dışında olabilir. Bu durumda X noktasının geometrik yeri olan eğriye ilmikli sikloid eğrisi denir (Şekil 1) (Blaschke ve Müller 1956).



Şekil 1. Düzgün Sikloid Eğrisi

Birbiri üzerinde hareket eden iki çemberin hareketiyle oluşan sikloid tipi eğriler de vardır. Birbiri üzerinde dıştan teğet kalacak şekilde kaymaksızın yuvarlanma hareketi yapan

r ve R , $r < R$, yarıçaplı iki çember verilsin. r yarıçaplı hareketli çember ile bu çember üzerinde bir X noktasının hareket esnasında çizdiği yörünge eğrilerine episikloid eğrileri adı verilir. Bu iki çember dıştan teğet olabilir. Bu durumda oluşan sikloid eğrisine episikloid eğrisi denir. İki çember içten teğet olması durumunda oluşan sikloid eğrisine hiposikloid eğrisi denir (Blaschke ve Müller 1956).

2. Materyal ve Metot

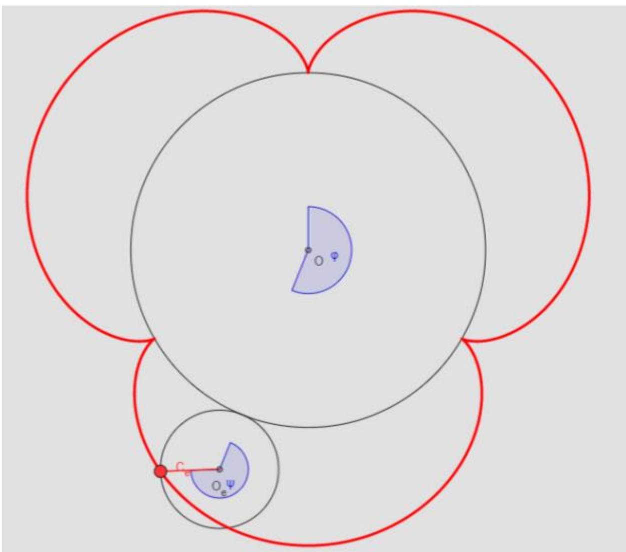
2.1. Episikloid

Birbiri üzerinde dıştan teğet kalacak şekilde kaymaksızın yuvarlanma hareketi yapan r ve $R, (r < R)$ yarıçaplı iki çember verilsin. r yarıçaplı hareketli çember ile bir P noktasının hareket esnasında çizdiği yörünge eğrisine episikloid eğri denir. $P = (x, y)$ noktalarının geometrik yeri olan eğrinin parametrik denklemi

$$x = (R + r)\cos t - r\cos\left(\frac{R + r}{r}t\right)$$

$$y = (R + r)\sin t - r\sin\left(\frac{R + r}{r}t\right)$$

biçimindedir (Şekil 2).



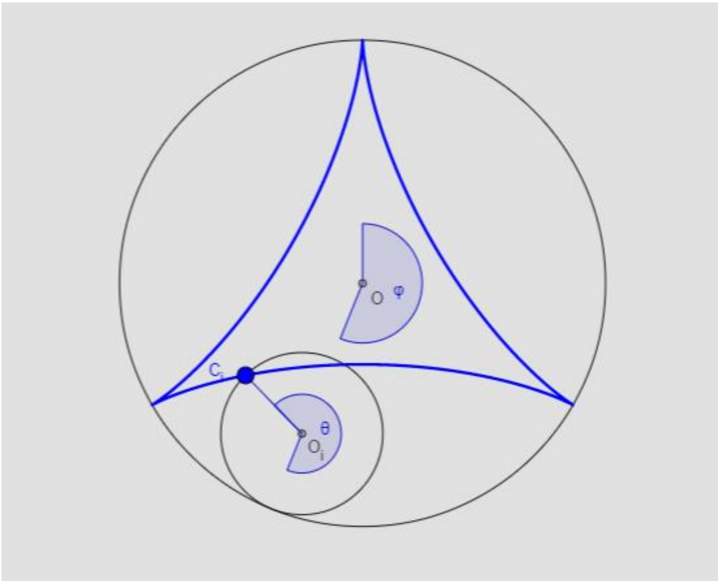
Şekil 2. Episikloid Eğrisi

2.2. Hiposikloid

Birbiri üzerinde içten teğet kalacak şekilde kaymaksızın yuvarlanma hareketi yapan r ve R, $(r < R)$ yarıçaplı iki çember verilsin. r yarıçaplı hareketli çember ile bir P noktasının hareket esnasında çizdiği yörünge eğrisine hiposikloid eğri denir. $P = (x, y)$ noktalarının geometrik yeri olan eğrinin parametrik denklemi

$$x = (R-r)\cos t - r\cos\left(\frac{R-r}{r}t\right)$$
$$y = (R-r)\sin t - r\sin\left(\frac{R-r}{r}t\right)$$

biçimindedir (Şekil 3).



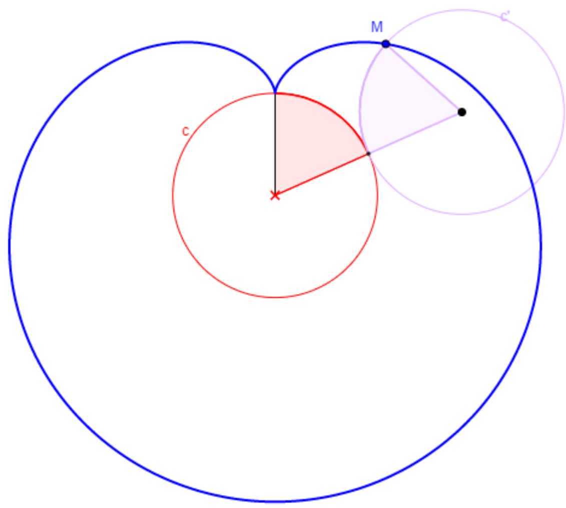
Şekil 3. Hiposikloid Eğrisi

2.3. Kardioid

r yarıçaplı sabit bir çember üzerinde kaymaksızın yuvarlanma hareketi yapan aynı yarıçaplı ikinci bir çember üzerindeki herhangi bir P noktasının hareket esnasında çizdiği yörünge eğrisine kardioid eğri denir. $P = (x, y)$ noktasının geometrik yeri olan eğrinin parametrik denklemi

$$x = 2r\cos t - r\cos 2t$$
$$y = 2r\sin t - r\sin 2t$$

biçimindedir $(0 \leq t < 2\pi)$ (Şekil 4).



Şekil 4. Kardioid Eğrisi

2.4. Düzlemsel hareket için kapalı yörüngeler

E hareketli ve E' sabit olmak üzere iki düzlemi ele alalım. Bu düzlemlerin koordinat sistemleri arasında t −parametreli $B: E/E'$ direkt hareketini ele alınsın. Sistemlerin sırasıyla orijinleri (O, O'), öteleme vektörleri $(OO' = U)$, $(O'O = U')$ ve toplam dönme açısı $\alpha(t)$ olsun. X noktasının ait olduğu E hareketli sisteminin E' sabit sistemine göre yörüngesi

$$X'(t) = h(t)R(t)X + U'(t) \tag{1}$$

şeklinde tanımlanır. Bu hareketi, sabit ve hareketli sistem arasında zamana bağlı bir dönüşüm olarak düşünülebilir. X vektörü zamanı ifade eden t parametresinden bağımsızdır.

(1) denkleminde $\alpha(t)$ toplam dönme açısı, $R(t)$ 2×2 tipinde dönme matrisi, öteleme vektörüne karşılık gelen $U'(t)$, 2×1 tipinde bir matris olmak üzere, (1) denklemi matris formunda

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(\alpha(t)) & -\sin(\alpha(t)) \\ sin(\alpha(t)) & cos(\alpha(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix}$$

ve bileşen olarak ise

$$x_1'(t) = cos(\alpha(t))\, x_1 - \sin\big(\alpha(t)\big)\, x_2 + u_1'(t)$$

$$x_2'(t) = sin(\alpha(t))\, x_1 + cos(\alpha(t))\, x_2 + u_2'(t)$$

şeklinde yazılır (Dathe vd, 2015).

2.5. Düzlemsel kinematik ve en az eylem ilkesi

E/E' düzlemsel hareketinde, E hareketli düzlemine ait bir X noktasının E' sabit düzlemindeki $X'(t)$ yörünge eğrisinin denklemi

$$X'(t) = R(t)X + U'(t)$$

olarak ifade edilebilir. Bu yörünge denklemi öteleme ve dönmeden ibarettir ve yörünge denklemindeki t zaman parametresini ifade etmektedir. Bu sisteme en az eylem ilkesi uygulanırsa; sistemde yer alan m kütleli bir noktanın $X'(t)$ yörünge eğrisi için kinetik enerji formülü

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m \left(\dot{X}'(t)\right)^2 \qquad (2)$$

şeklinde ifade edilir. (2) denklemi hareketli sistemin seçilen noktasına bağımlı olup sistemin başlangıç noktasının seçiminden bağımsızdır. Bu enerji denklemi

$$S = \int_{t_1}^{t_2} E_{kin} dt = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} m \left(\dot{X}'(t)\right)^2 dt$$

olarak ifade edilir ve bu denklem karakteristik fonksiyon veya enerji fonksiyoneli olarak adlandırılır. $m = 1$ değeri için bu fonksiyonel

$$S = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left(\dot{X}'(t)^T \dot{X}'(t)\right) dt$$

olarak ifade edilir.

En az eylem ilkesi, S nin minimum olmasını gerektirir. Bunun için $\delta S = 0$ şartı sağlanmalıdır. Burada δ varyasyonu göstermektedir. Bu eşitliği sağlayan nokta sabit nokta veya karakteristik nokta olarak adlandırılır. Hız kuadratik formda olduğu için, enerji fonksiyoneli olan S de X noktasında bir kuadratik form belirtir. Bundan dolayı X_0 noktasının minimumu tek olacaktır ve bu nokta hareketli sistemin karakteristiği olarak ifade edilir (Dathe vd, 2015).

3. Bulgular ve Tartışma

3.1. Episikloid için uygulaması

E hareketli ve E' sabit iki düzlemin olmak üzere bu düzlemlerin koordinat sistemleri arasında t −parametreli kapalı düzlemsel hareketi ele alınsın. E hareketli düzleminin E' sabit düzlemine göre $B: E/E'$ direkt hareketi, sistemlerin sırasıyla orijinleri (O, O'), öteleme vektörleri $(O'O = U)$ ve $(OO' = U')$, toplam dönme açısı $\alpha(t)$, X, E hareketli sistemine ait bir nokta olmak üzere bu noktanın E' sabit sistemine göre yörüngesi

$$X'(t) = R(t)X + U(t) \tag{3}$$

denklemiyle ifade edilir. Bu hareket sabit ve hareketli sistem üzerinde zamana bağlı dönüşüm olarak düşünülebilir.

(3) denkleminde $R(t)$ 2×2 tipinde dönme matrisini, $\alpha(t)$ toplam dönme açısını ve $U(t)$ ve $U'(t)$ öteleme vektörlerine karşılık gelen 2×1 tipinde matrisleri ifade etmektedir. Sırasıyla sabit ve hareketli düzleme ait birer nokta X' ve X olmak üzere,

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} \ , \ X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \ , \ U'(t) = \begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix} \ , \ U(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$$

$$R(t) = \begin{pmatrix} (R + r)\, cos\big(\alpha(t)\big) & r \sin\big(\alpha(t)\big) \\ (R + r)\, sin\big(\alpha(t)\big) & -rcos\big(\alpha(t)\big) \end{pmatrix}$$

ifadelerini kullanarak yörünge denklemini matris formunda

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R + r)cos(\alpha(t)) & r \sin(\alpha(t)) \\ (R + r)\, sin(\alpha(t)) & -r\, cos(\alpha(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Yörünge denkleminde $a \neq 0$ kabul edilir. Bu sayede sırf öteleme ve sırf dönme durumlarından kaçınılmış olur. Verilen sistemlerin öteleme vektörleri arasında

$$U(t) = -R(t)U'(t)$$

bağıntısı vardır. Bu bağıntı (3) eşitliğinde yerine yazarak ve yörünge denklemi

$$X'(t) = R(t)\big(X - U'(t)\big) \tag{4}$$

şeklinde yeniden ifade edilir

(4) ‘de vektörlerin ifadeleri yerine yazılıp $X(x_1, x_2)$ bileşenleri ile ifade edilirse

$$x_1'(t) = (R + r)\, cos\big(\alpha(t)\big)\big(x_1 - u_1'(t)\big) + r \sin(\alpha(t))\ \big(x_2 - u_2'(t)\big)$$

$$x_2'(t) = (R + r)\, sin\big(\alpha(t)\big)\big(x_1 - u_1'(t)\big) - rcos\big(\alpha(t)\big)\big(x_2 - u_2'(t)\big).$$

olarak bileşen denklemleri ifade edilir.

Düzlem kinematiğine en az eylem ilkesi uygulandığında, m kütleli bir nokta, ve bu noktanın yörüngesi $X'(t)$ olmak üzere kinetik enerji formülü aşağıdaki gibi elde edilir.

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m \left(\dot{X}'(t) \right)^2 \tag{5}$$

İfade edilen bu enerji fonksiyonu karakteristik fonksiyon veya enerji fonksiyonu olarak adlandırılan

$$S = \int_{t_1}^{t_2} E_{kin} dt = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} m \left(\dot{X}'(t) \right)^2 dt$$

eşitliğine karşılık gelir. $m = 1$ olması durumunda bu ifade

$$S = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left(\dot{X}'(t)^T . \dot{X}'(t) \right) dt \tag{6}$$

halini alır.

Şimdi E hareketli düzleminin noktalarının enerjileri hesaplandığında E/E' düzlemsel hareketinde en az eylem noktası elde edilir. Bu durumda

$$X'(t) = R(t)(X - U'(t))$$

denkleminin t parametresine göre türevi alınırsa

$$\dot{X}'(t) = \dot{R}(t)\big(X - U'(t)\big) + R(t) \left(X - \dot{U}'(t) \right) \tag{7}$$

elde edilir. Bu denklem bileşen formunda ifade edildiğinde

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1'(t) = &-\big(x_1 - u_1'(t)\big)(R + r) \sin\big(\alpha(t)\big) \dot{\alpha}(t) \\
&+\big(x_1 - \dot{u}_1'(t)\big)(R + r) \cos\big(\alpha(t)\big) \\
&+\big(x_2 - u_2'(t)\big)(R + r) \cos\big(\alpha(t)\big) \dot{\alpha}(t) + \big(x_2 - \dot{u}_2'(t)\big) r \sin\big(\alpha(t)\big) \\
\dot{x}_2'(t) = &\big(x_1 - u_1'(t)\big)(R + r) \cos\big(\alpha(t)\big) \dot{\alpha}(t) \\
&+\big(x_1 - \dot{u}_1'(t)\big)(R + r) \sin\big(\alpha(t)\big) \\
&+\big(x_2 - u_2'(t)\big)(R + r) \sin\big(\alpha(t)\big) \dot{\alpha}(t) - \big(x_2 - \dot{u}_2'(t)\big) r\cos\big(\alpha(t)\big)
\end{aligned}$$

olur. (7) ifadesi (6) denkleminde yerine yazılırsa

$$2S(X) = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \begin{matrix} \left[\dot{R}(t)\big(X - U'(t)\big) + R(t) \left(X - \dot{U}'(t) \right) \right]^T \\ \left[\dot{R}(t)\big(X - U'(t)\big) + R(t) \left(X - \dot{U}'(t) \right) \right] \end{matrix} \right\} dt$$

ve böylece

$$\begin{aligned}
2S(X) = \int_{t_1}^{t_2} &[(X^T X - X^T U' - U'^T X + U'^T U') I \dot{\alpha}^2 \\
&+\big(X^T X - \dot{U} X^T + \dot{U}'^T \dot{U}'\big) I \\
&+\big(X^T X - X^T \dot{U} - U'^T X + U'^T \dot{U}'\big) \dot{R}^T R \\
&+\big(X^T X - X^T U' - \dot{U}'^T U'\big) \dot{R}^T \dot{R} \big] dt
\end{aligned} \tag{8}$$

olur. Diğer taraftan

$$R(t)=\begin{pmatrix}(R+r)cos\big(\alpha(t)\big) & r\sin\big(\alpha(t)\big)\\(R+r)\,sin\big(\alpha(t)\big) & -r\,cos\big(\alpha(t)\big)\end{pmatrix}$$

$$\dot{R}(t)=\begin{pmatrix}-(R+r)\sin\big(\alpha(t)\big).\dot{\alpha}(t) & r\,cos\big(\alpha(t)\big).\dot{\alpha}(t)\\(R+r)\,cos\big(\alpha(t)\big).\dot{\alpha}(t) & r\sin\big(\alpha(t)\big).\dot{\alpha}(t)\end{pmatrix}$$

$$\big[\dot{R}(t)\big]^T=\begin{pmatrix}-(R+r)\sin\big(\alpha(t)\big)\,\dot{\alpha}(t) & (R+r)\,cos\big(\alpha(t)\big)\,\dot{\alpha}(t)\\r\,cos\big(\alpha(t)\big)\,\dot{\alpha}(t) & r\sin\big(\alpha(t)\big)\,\dot{\alpha}(t)\end{pmatrix}$$

olduğundan

$$\big[\dot{R}(t)\big]^T R(t)=\dot{\alpha}I(t)$$

ve

$$\big[\dot{R}(t)\big]^T \dot{R}(t) \quad =\dot{\alpha}I(t)$$

bulunur. Böylece

$$U(t)=\begin{pmatrix}u_1(t)\\u_2(t)\end{pmatrix}\quad,\quad [U(t)]^T=(u_1(t)\quad u_2(t))$$

$$\dot{U}(t)=\begin{pmatrix}\dot{u}_1(t)\\\dot{u}_2(t)\end{pmatrix}\quad,\quad \big[\dot{U}(t)\big]^T=(\dot{u}_1(t)\quad \dot{u}_2(t))$$

$$U'(t)=\begin{pmatrix}u_1'(t)\\u_2'(t)\end{pmatrix}\quad,\quad [U'(t)]^T=(u_1'(t)\quad u_2'(t))$$

$$\dot{U}'(t)=\begin{pmatrix}\dot{u}_1'(t)\\\dot{u}_2'(t)\end{pmatrix}\quad,\quad \big[\dot{U}'(t)\big]^T=(\dot{u}_1'(t)\quad \dot{u}_2'(t))$$

ifadeleri (8) denkleminde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}2S(X)=\int_{t_1}^{t_2}\Bigg[&\left(X^TX-X^T\begin{pmatrix}u_1'\\u_2'\end{pmatrix}-(u_1'\quad u_2')X+(u_1'\quad u_2')\begin{pmatrix}u_1'\\u_2'\end{pmatrix}\right)I\dot{\alpha}^2\\&+\left(X^TX-X^T\begin{pmatrix}\dot{u}_1\\\dot{u}_2\end{pmatrix}+(\dot{u}_1'\quad \dot{u}_2')\begin{pmatrix}\dot{u}_1'\\\dot{u}_2'\end{pmatrix}\right)I\\&+\left(X^TX-X^T\begin{pmatrix}\dot{u}_1\\\dot{u}_2\end{pmatrix}-(u_1'\quad u_2')X+(u_1'\quad u_2')\begin{pmatrix}\dot{u}_1'\\\dot{u}_2'\end{pmatrix}\right)\dot{R}^TR\\&+\left(X^TX-X^T\begin{pmatrix}u_1'\\u_2'\end{pmatrix}-(\dot{u}_1'\quad \dot{u}_2')\begin{pmatrix}u_1'\\u_2'\end{pmatrix}\right)\dot{R}^T\dot{R}\Bigg]dt\end{aligned}$$

ve buradan

$$\begin{aligned}2S(X)=\int_{t_1}^{t_2}\Bigg[&\left((x_1\quad x_2)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}-(x_1\quad x_2)\begin{pmatrix}u_1'\\u_2'\end{pmatrix}-(u_1'\quad u_2')h\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+(u_1')^2+(u_2')^2\right)I\dot{\alpha}^2\\&+\left((x_1\quad x_2)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}-(x_1\quad x_2)\begin{pmatrix}\dot{u}_1\\\dot{u}_2\end{pmatrix}+(\dot{u}_1')^2+(\dot{u}_2')^2\right)I\\&+\left((x_1\quad x_2)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}-(x_1\quad x_2)\begin{pmatrix}\dot{u}_1\\\dot{u}_2\end{pmatrix}-(u_1'\quad u_2')\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+u_1'\dot{u}_1'+u_2'\dot{u}_2'\right)\dot{R}^TR\end{aligned}$$

$$+\left(\begin{pmatrix}x_1 & x_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x_1 & x_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1'\\u_2'\end{pmatrix}-\dot{u}_1'u_1'-\dot{u}_2'u_2'\right)\dot{R}^T\dot{R}\Bigg]dt$$

elde edilir.

Bu eşitlik bileşen formunda

$$\begin{aligned}2S(x_1,x_2)&=(x_1^2+x_2^2)\int_{t_1}^{t_2}\dot{\alpha}^2dt\\&+\int_{t_1}^{t_2}\left[\left({u_1'}^2+{u_2'}^2\right)\dot{\alpha}^2+{\dot{u}_1'}^2+{\dot{u}_2'}^2\right]dt\\&+x_1\int_{t_1}^{t_2}[-2u_1'\dot{\alpha}^2-\dot{u}_1-\dot{u}_1\dot{\alpha}-2u_1'\dot{\alpha}]dt\\&+x_2\int_{t_1}^{t_2}[-2u_2'\dot{\alpha}^2-\dot{u}_2-\dot{u}_2\dot{\alpha}-2u_2'\dot{\alpha}]dt\,.\end{aligned}\tag{9}$$

şeklinde ifade edilir.

(9) denkleminde

$$H_R=\int_{t_1}^{t_2}\dot{\alpha}^2dt$$

$$H_T=\int_{t_1}^{t_2}\left[\left({u_1'}^2+{u_2'}^2\right)\dot{\alpha}^2+{\dot{u}_1'}^2+{\dot{u}_2'}^2\right]dt$$

$$H_{x_1}=\int_{t_1}^{t_2}[-2u_1'\dot{\alpha}^2-\dot{u}_1-\dot{u}_1\dot{\alpha}-2u_1'\dot{\alpha}]dt$$

$$H_{x_2}=\int_{t_1}^{t_2}[-2u_2'\dot{\alpha}^2-\dot{u}_2-\dot{u}_2\dot{\alpha}-2u_2'\dot{\alpha}]dt$$

eşitlikleri yerine yazılırsa

$$2S(x_1,x_2)=(x_1^2+x_2^2)H_R+H_T+x_1H_{x_1}+x_2H_{x_2}\tag{10}$$

şeklinde elde edilir.

t zaman parametresine bağlı olarak (10) denklemi yeniden ifade edilirse, istenilen X_0 noktasının koordinatlarını en az eylem ilkesi yardımıyla aşağıdaki gibi hesaplanır.

(10) denkleminin X e göre türevi alınır ve sıfıra eşitlenirse,

$$\left.\frac{\partial 2S}{\partial X}\right|_{X_0}=0\tag{11}$$

elde edilir. İstenilen karakteristik noktalar (11) eşitliğini sağlayan noktaları tespit ederek bulunur. (9) denkleminin x_1 ve x_2 ye göre türevleri alınır ve düzenlenirse karakteristik nokta

$$\frac{\partial 2S(x_1,x_2)}{\partial x_1}=2x_1\int_{t_1}^{t_2}\dot{\alpha}^2dt+\int_{t_1}^{t_2}[-2u_1'\dot{\alpha}^2-\dot{u}_1-\dot{u}_1\dot{\alpha}-2u_1'\dot{\alpha}]dt\tag{12}$$

ve

$$\frac{\partial 2S(x_1,x_2)}{\partial x_2} = 2x_2\int_{t_1}^{t_2}\dot{\alpha}^2 dt + \int_{t_1}^{t_2}[-2u_2'\dot{\alpha}^2 - \dot{u}_2 - \dot{u}_2\dot{\alpha} - 2u_2'\dot{\alpha}]dt \tag{13}$$

şeklinde bileşenler halinde elde edilir.

Burada X_0 noktası, hareketli düzlemde bulunan X noktasının aksine t_1 ve t_2 zamanlarının bir fonksiyonudur. Burada t_1 ve t_2 integral sınırlarını temsil eden başlangıç ve bitiş zamanlarıdır. (12) ve (13) denklemleri sıfıra eşitlenir ve karakteristik noktanın bileşenleri

$$x_1 = -\frac{\int_{t_1}^{t_2}[-2u_1'\dot{\alpha}^2 - \dot{u}_1 - \dot{u}_1\dot{\alpha} - 2u_1'\dot{\alpha}]dt}{2\int_{t_1}^{t_2}\dot{\alpha}^2 dt} = -\frac{H_{x_1}}{2H_R}$$

ve

$$x_2 = -\frac{\int_{t_1}^{t_2}[-2u_2'\dot{\alpha}^2 - \dot{u}_2 - \dot{u}_2\dot{\alpha} - 2u_2'\dot{\alpha}]dt}{2\int_{t_1}^{t_2}\dot{\alpha}^2 dt} = -\frac{H_{x_2}}{2H_R}.$$

olarak elde edilir. X_0 noktasının en az eylem noktası olması için $\frac{\partial^2 S}{\partial X^2} > 0$ olmalıdır. O halde

$$\frac{\partial^2 S}{\partial X^2} = \frac{1}{2}\mathrm{I}\int\dot{\alpha}^2 dt = \frac{1}{2}\mathrm{I}H_R$$

eşitliği her zaman 0 dan büyük bir değer alacağından X_0 bir karakteristik nokta belirtir.

(9) ifadesinde karakteristik noktanın bileşenleri yerine yazılırsa

$$2S_0(t_1,t_2) = \left[\left(-\frac{H_{x_1}}{H_R}\right)^2 + \left(-\frac{H_{x_2}}{H_R}\right)^2\right]H_R + H_T - \frac{H_{x_1}}{H_R}H_{x_1} - \frac{H_{x_2}}{H_R}H_{x_2}$$

elde edilir.

Buradan da en az eylem

$$2S_0(t_1,t_2) = H_T(t_1,t_2)$$

şeklinde ifade edilir.

3.2. Hiposikloid için uygulaması

E hareketli ve E' sabit iki düzlemin olmak üzere bu düzlemlerin koordinat sistemleri arasında t −parametreli kapalı düzlemsel hareketi ele alınsın. E hareketli düzleminin E' sabit düzlemine göre $B{:}\,E/E'$ direkt hareketi, sistemlerin sırasıyla orijinleri (O,O'), öteleme vektörleri $(O'O = U)$ ve $(OO' = U')$, toplam dönme açısı $\beta(t)$, X, E hareketli sistemine ait bir nokta olmak üzere bu noktanın E' sabit sistemine göre yörüngesi

$$X'(t) = R(t)X + U(t) \tag{14}$$

denklemiyle ifade edilir. Bu hareket sabit ve hareketli sistem üzerinde zamana bağlı dönüşüm olarak düşünülebilir.

(14) yörünge denkleminde $R(t)$ 2×2 tipinde dönme matrisi, toplam dönme açısı $\beta(t)$, $U(t)$ ve $U'(t)$ öteleme vektörlerine karşılık gelen 2×1 tipinde matrisler, sırasıyla sabit ve hareketli düzleme ait birer nokta X' ve X olmak üzere,

$$X'(t)=\begin{pmatrix}x_1'(t)\\x_2'(t)\end{pmatrix}\;,\;U(t)=\begin{pmatrix}u_1(t)\\u_2(t)\end{pmatrix}\;,\;U'(t)=\begin{pmatrix}u_1'(t)\\u_2'(t)\end{pmatrix}\;,\;X(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}$$

$$R(t)=\begin{pmatrix}(R-r)\,cos\big(\beta(t)\big) & r\sin\big(\beta(t)\big)\\(R-r)\,sin\big(\beta(t)\big) & -r\,cos\big(\beta(t)\big)\end{pmatrix}$$

ifadeleriyle matris formunda

$$\begin{pmatrix}x_1'(t)\\x_2'(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(R-r)\,cos\big(\beta(t)\big) & r\sin\big(\beta(t)\big)\\(R-r)\,sin\big(\beta(t)\big) & -rcos\big(\beta(t)\big)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}u_1(t)\\u_2(t)\end{pmatrix}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Burada $\beta\neq 0$ kabul edilir. Bu sayede hareketin sırf öteleme ve sırf dönme durumlarından kaçınılmış olur. Verilen sistemlerin öteleme vektörleri arasında

$$U(t)=-R(t)U'(t)$$

bağıntısı vardır. Bu bağıntı (14) eşitliğinde yerine yazarak yörünge denklemi

$$X'(t)=R(t)\big(X-U'(t)\big) \tag{15}$$

şeklinde yeniden ifade edilir

(15) ‘de vektörlerin ifadeleri yerine yazılıp $X(x_1,x_2)$ bileşenleri ile ifade edilirse

$$x_1'(t)=(R-r)\,cos\big(\beta(t)\big)\big(x_1-u_1'(t)\big)+r\sin\big(\beta(t)\big)\big(x_2-u_2'(t)\big)$$

$$x_2'(t)=(R-r)\,sin\big(\beta(t)\big)\big(x_1-u_1'(t)\big)-r\,cos\big(\beta(t)\big)\big(x_2-u_2'(t)\big)$$

olarak bileşen denklemleri ifade edilir.

Düzlem kinematiğine en az eylem ilkesi uygulandığında, m kütleli bir nokta, ve bu noktanın yörüngesi $X'(t)$ olmak üzere kinetik enerji formülü aşağıdaki gibi elde edilir.

$$E_{kin}=\frac{1}{2}m\left(\dot{X}'(t)\right)^2 \tag{16}$$

İfade edilen bu enerji fonksiyonu karakteristik fonksiyon veya enerji fonksiyonu olarak adlandırılan

$$S=\int_{t_1}^{t_2}E_{kin}dt=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}m\left(\dot{X}'(t)\right)^2dt$$

eşitliğine karşılık gelir. $m=1$ olması durumunda bu ifade

$$S=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left(\dot{X}'(t)^T\dot{X}'(t)\right)dt \tag{6}$$

halini alır.

E hareketli düzleminin noktalarının enerjileri hesaplandığında E/E' düzlemsel hareketinde en az eylem noktası elde edilir. Bu durumda

$$X'(t) = R(t)X - U'(t)$$

denkleminin t parametresine göre türevi alınırsa

$$\dot{X}'(t) = \dot{R}(t)\big(X - U'(t)\big) + R(t)\left(X - \dot{U}'(t)\right). \tag{18}$$

elde edilir. Bu denklem bileşen formunda ifade edildiğinde

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1'(t) = &-\big(x_1 - u_1'(t)\big)(R-r)\sin\big(\beta(t)\big)\,\dot{\beta}(t) \\
&+\big(x_1 - \dot{u}_1'(t)\big)(R-r)\,cos\big(\beta(t)\big) \\
&+\big(x_2 - u_2'(t)\big)r\,cos\big(\beta(t)\big)\,\dot{\beta}(t) - \big(x_2 - \dot{u}_2'(t)\big)r\sin\big(\beta(t)\big) \\
\dot{x}_2'(t) = &\big(x_1 - u_1'(t)\big)(R-r)\,cos\big(\beta(t)\big)\,\dot{\beta}(t) \\
&+\big(x_1 - \dot{u}_1'(t)\big)(R-r)\sin\big(\beta(t)\big) \\
&+\big(x_2 - u_2'(t)\big)r\,sin\big(\beta(t)\big)\,\dot{\beta}(t) - \big(x_2 - \dot{u}_2'(t)\big)\,rcos\big(\beta(t)\big)
\end{aligned}$$

olur. (18) ifadesi (17) denkleminde yerine yazılırsa

$$2S(X) = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \begin{matrix} \left[\dot{R}(t)\big(X - U'(t)\big) + R(t)\left(X - \dot{U}'(t)\right)\right]^T \\ \left[\dot{R}(t)\big(X - U'(t)\big) + R(t)\left(X - \dot{U}'(t)\right)\right] \end{matrix} \right\} dt$$

ve böylece

$$\begin{aligned}
2S(X) = \int_{t_1}^{t_2} &[(X^TX - X^TU' - U'^TX + U'^TU')I\dot{\alpha}^2 \\
&+\big(X^TX - \dot{U}X^T + \dot{U}'^T\dot{U}'\big)I \\
&+\big(X^TX - X^T\dot{U} - U'^TX + U'^T\dot{U}'\big)\,\dot{R}^TR \\
&+\big(X^TX - X^TU' - \dot{U}'^TU'\big)\dot{R}^T\dot{R}\big]dt
\end{aligned} \tag{19}$$

olur. Diğer taraftan

$$R(t) = \begin{pmatrix} (R-r)\,cos\big(\beta(t)\big) & r\sin\big(\beta(t)\big) \\ (R-r)\,sin\big(\beta(t)\big) & -rcos\big(\beta(t)\big) \end{pmatrix}$$

$$\dot{R}(t) = \begin{pmatrix} -(R-r)\sin\big(\beta(t)\big)\,\dot{\beta}(t) & r\,cos\big(\beta(t)\big)\,\dot{\beta}(t) \\ (R-r)\,cos\big(\beta(t)\big)\,\dot{\beta}(t) & r\sin\big(\beta(t)\big)\,\dot{\beta}(t) \end{pmatrix}$$

$$\big[\dot{R}(t)\big]^T = \begin{pmatrix} -(R-r)\sin\big(\beta(t)\big)\,\dot{\beta}(t) & (R-r)\,cos\big(\beta(t)\big)\,\dot{\beta}(t) \\ r\,cos\big(\beta(t)\big)\,\dot{\beta}(t) & r\sin\big(\beta(t)\big)\,\dot{\beta}(t) \end{pmatrix}$$

olacağından

$$\big[\dot{R}(t)\big]^T R(t) = \dot{\beta}I(t)$$

ve

$$\big[\dot{R}(t)\big]^T \dot{R}(t) = \dot{\beta}I(t)$$

bulunur. Böylece

$$U(t)=\begin{pmatrix}u_1(t)\\u_2(t)\end{pmatrix} \quad , \quad [U(t)]^T=(u_1(t) \quad u_2(t))$$

$$\dot{U}(t)=\begin{pmatrix}\dot{u}_1(t)\\\dot{u}_2(t)\end{pmatrix} \quad , \quad \left[\dot{U}(t)\right]^T=(\dot{u}_1(t) \quad \dot{u}_2(t))$$

$$U'(t)=\begin{pmatrix}u_1'(t)\\u_2'(t)\end{pmatrix} \quad , \quad [U'(t)]^T=(u_1'(t) \quad u_2'(t))$$

$$\dot{U}'(t)=\begin{pmatrix}\dot{u}_1'(t)\\\dot{u}_2'(t)\end{pmatrix} \quad , \quad \left[\dot{U}'(t)\right]^T=(\dot{u}_1'(t) \quad \dot{u}_2'(t))$$

ifadeleri 19 ifadesinde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}2S(X)=\int_{t_1}^{t_2}\Bigg[&\left(X^TX-X^T\begin{pmatrix}u_1'\\u_2'\end{pmatrix}-(u_1' \quad u_2')X+(u_1' \quad u_2')\begin{pmatrix}u_1'\\u_2'\end{pmatrix}\right)I\dot{\beta}^2\\&+\left(X^TX-X^T\begin{pmatrix}\dot{u}_1\\\dot{u}_2\end{pmatrix}+(\dot{u}_1' \quad \dot{u}_2')\begin{pmatrix}\dot{u}_1'\\\dot{u}_2'\end{pmatrix}\right)I\\&+\left(X^TX-X^T\begin{pmatrix}\dot{u}_1\\\dot{u}_2\end{pmatrix}-(u_1' \quad u_2')X+(u_1' \quad u_2')\begin{pmatrix}\dot{u}_1'\\\dot{u}_2'\end{pmatrix}\right)\dot{R}^TR\\&+\left(X^TX-X^T\begin{pmatrix}u_1'\\u_2'\end{pmatrix}-(\dot{u}_1' \quad \dot{u}_2')\begin{pmatrix}u_1'\\u_2'\end{pmatrix}\right)\dot{R}^T\dot{R}\Bigg]dt\end{aligned}$$

ve buradan

$$\begin{aligned}2S(X)=\int_{t_1}^{t_2}\Bigg[&\left((x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}-(x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix}u_1'\\u_2'\end{pmatrix}-(u_1' \quad u_2')\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+(u_1')^2+(u_2')^2\right)I\dot{\beta}^2\\&+\left((x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}-(x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix}\dot{u}_1\\\dot{u}_2\end{pmatrix}+(\dot{u}_1')^2+(\dot{u}_2')^2\right)I\\&+\left((x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}-(x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix}\dot{u}_1\\\dot{u}_2\end{pmatrix}-(u_1' \quad u_2')\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+u_1'\dot{u}_1'+u_2'\dot{u}_2'\right)\dot{R}^TR\\&+\left((x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}-(x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix}u_1'\\u_2'\end{pmatrix}-\dot{u}_1'u_1'-\dot{u}_2'u_2'\right)\dot{R}^T\dot{R}\Bigg]dt\end{aligned}$$

elde edilir.

Bu eşitlik bileşen formunda

$$\begin{aligned}2S(x_1,x_2)=(x_1^2+x_2^2)\int_{t_1}^{t_2}\dot{\beta}^2dt&\\&+\int_{t_1}^{t_2}\left[\left({u_1'}^2+{u_2'}^2\right)\dot{\beta}^2+{\dot{u}_1'}^2+{\dot{u}_2'}^2\right]dt\\&+x_1\int_{t_1}^{t_2}\left[-2u_1'\dot{\beta}^2-\dot{u}_1-\dot{u}_1\dot{\beta}-2u_1'\dot{\beta}\right]dt\\&+x_2\int_{t_1}^{t_2}\left[-2u_2'\dot{\beta}^2-\dot{u}_2-\dot{u}_2\dot{\beta}-2u_2'\dot{\beta}\right]dt\end{aligned} \tag{20}$$

şeklinde ifade edilir.

(20) denkleminde

$$H_R = \int_{t_1}^{t_2} \dot{\beta}^2 dt$$

$$H_T = \int_{t_1}^{t_2} \left[\left({u'_1}^2 + {u'_2}^2\right)\dot{\beta}^2 + {\dot{u}'_1}^2 + {\dot{u}'_2}^2\right] dt$$

$$H_{x_1} = \int_{t_1}^{t_2} \left[-2u'_1\dot{\beta}^2 - \dot{u}_1 - \dot{u}_1\dot{\beta} - 2u'_1\dot{\beta}\right] dt$$

$$H_{x_2} = \int_{t_1}^{t_2} \left[-2u'_2\dot{\beta}^2 - \dot{u}_2 - \dot{u}_2\dot{\beta} - 2u'_2\dot{\beta}\right] dt$$

eşitlikleri yerine yazılırsa

$$2S(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2)H_R + H_T + x_1 H_{x_1} + x_2 H_{x_2} \tag{21}$$

şeklinde elde edilir.

t zaman parametresine bağlı olarak (21) denklemi yeniden ifade edilirse, istenilen X_0 noktasının koordinatlarını en az eylem ilkesi yardımıyla aşağıdaki gibi hesaplanır.

(21) denkleminin X e göre türevi alınır ve sıfıra eşitlenirse,

$$\left.\frac{\partial 2S}{\partial X}\right|_{X_0} = 0 \tag{22}$$

elde edilir. İstenilen karakteristik noktalar (22) eşitliğini sağlayan noktaları tespit ederek bulunur. (20) denkleminin x_1 ve x_2 ye göre türevleri alınır ve düzenlenirse karakteristik nokta

$$\frac{\partial 2S(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 2x_1 \int_{t_1}^{t_2} \dot{\beta}^2 dt + \int_{t_1}^{t_2} \left[-2u'_1\dot{\beta}^2 - \dot{u}_1 - \dot{u}_1\dot{\beta} - 2u'_1\dot{\beta}\right] dt \tag{23}$$

ve

$$\frac{\partial 2S(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 2x_2 \int_{t_1}^{t_2} \dot{\beta}^2 dt + \int_{t_1}^{t_2} \left[-2u'_2\dot{\beta}^2 - \dot{u}_2 - \dot{u}_2\dot{\beta} - 2u'_2\dot{\beta}\right] dt \tag{24}$$

şeklinde bileşenler halinde elde edilir.

Burada X_0 noktası, hareketli düzlemde bulunan X noktasının aksine t_1 ve t_2 zamanlarının bir fonksiyonudur. Burada t_1 ve t_2 integral sınırlarını temsil eden başlangıç ve bitiş zamanlarıdır. (23) ve (24) denklemleri sıfıra eşitlenir ve karakteristik noktanın bileşenleri

$$x_1 = -\frac{\int_{t_1}^{t_2} \left[-2u'_1\dot{\beta}^2 - \dot{u}_1 - \dot{u}_1\dot{\beta} - 2u'_1\dot{\beta}\right] dt}{2\int_{t_1}^{t_2} \dot{\beta}^2 dt} = -\frac{H_{x_1}}{2H_R}$$

ve

$$x_2 = -\frac{\int_{t_1}^{t_2} \left[-2u'_2\dot{\beta}^2 - \dot{u}_2 - \dot{u}_2\dot{\beta} - 2u'_2\dot{\beta}\right] dt}{2\int_{t_1}^{t_2} \dot{\beta}^2 dt} = -\frac{H_{x_2}}{2H_R}$$

şeklinde elde edilir. X_0 noktasının en az eylem noktası olması için $\frac{\partial^2 S}{\partial X^2} > 0$ olmalıdır. O halde

$$\frac{\partial^2 S}{\partial X^2} = \frac{1}{2}\mathrm{I}\int \dot{\beta}^2 dt = \frac{1}{2}\mathrm{I}H_R$$

eşitliği her zaman 0 dan büyük bir değer alacağından X_0 bir karakteristik nokta belirtir.

(20) ifadesinde karakteristik noktanın bileşenleri yerine yazılırsa

$$2S_0(t_1,t_2) = \left[\left(-\frac{H_{x_1}}{H_R}\right)^2 + \left(-\frac{H_{x_2}}{H_R}\right)^2\right]H_R + H_T - \frac{H_{x_1}}{H_R}H_{x_1} - \frac{H_{x_2}}{H_R}H_{x_2}$$

bulunur.

Buradan da en az eylem

$$2S_0(t_1,t_2) = H_T(t_1,t_2)$$

şeklinde ifade edilir.

3.3. Kardioid için uygulaması

E hareketli ve E' sabit iki düzlemin olmak üzere bu düzlemlerin koordinat sistemleri arasında t −parametreli kapalı düzlemsel hareketi ele alınsın. E hareketli düzleminin E' sabit düzlemine göre $B{:}\,E/E'$ direkt hareketi, sistemlerin sırasıyla orijinleri (O,O'), öteleme vektörleri $(O'O = U)$ ve $(OO' = U')$; toplam dönme açısı $\theta(t)$; X, E hareketli sistemine ait bir nokta olmak üzere bu noktanın E' sabit sistemine göre yörüngesi

$$X'(t) = R(t)X + U(t) \tag{25}$$

denklemiyle ifade edilir. Bu hareket sabit ve hareketli sistem üzerinde zamana bağlı dönüşüm olarak düşünülebilir.

(25) denkleminde $R(t)$ 2×2 tipinde dönme matrisini, $\theta(t)$ toplam dönme açısını ve $U(t)$ ve $U'(t)$ öteleme vektörlerine karşılık gelen 2×1 tipinde matrisleri ifade etmektedir. Sırasıyla sabit ve hareketli düzleme ait birer nokta X' ve X olmak üzere,

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix}, \quad U(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}, \quad U'(t) = \begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

$$R(t) = \begin{pmatrix} 2r\,cos(\theta(t)) & r\sin(\theta(t)) \\ 2r\,sin(\theta(t)) & -rcos(\theta(t)) \end{pmatrix}$$

ifadelerini kullanarak yörünge denklemini matris formunda

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2r\,cos(\theta(t)) & r\sin(\theta(t)) \\ 2r\,sin(\theta(t)) & -rcos(\theta(t)) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$$

şeklinde ifade edebilir.

Yörünge denkleminde $\theta \neq 0$ kabul edilir. Bu sayede sırf öteleme ve sırf dönme durumlarından kaçınılmış olur. Verilen sistemlerin öteleme vektörleri arasında

$$U(t) = -R(t)U'(t)$$

bağıntısı vardır. Bu bağıntı (25) eşitliğinde yerine yazarak yörünge denklemi

$$X'(t) = R(t)\big(X - U'(t)\big) \tag{26}$$

şeklinde yeniden ifade edilir

(26) 'de vektörlerin ifadeleri yerine yazılıp $X(x_1, x_2)$ bileşenleri ile ifade edilirse

$$x_1'(t) = 2r\,cos\big(\theta(t)\big)\left(x_1 - u_1'(t)\right) + r\sin\big(\theta(t)\big)\left(x_2 - u_2'(t)\right)$$
$$x_2'(t) = 2r\,sin\big(\theta(t)\big)\left(x_1 - u_1'(t)\right) - r\,cos\big(\theta(t)\big)\left(x_2 - u_2'(t)\right)$$

olarak bileşen denklemleri ifade edilir.

Düzlem kinematiğine en az eylem ilkesi uygulandığında, m kütleli bir nokta, ve bu noktanın yörüngesi $X'(t)$ olmak üzere kinetik enerji formülü aşağıdaki gibi elde edilir.

$$E_{kin} = \frac{1}{2}m\left(\dot{X}'(t)\right)^2 \tag{27}$$

İfade edilen bu enerji fonksiyonu karakteristik fonksiyon veya enerji fonksiyonu olarak adlandırılan

$$S = \int_{t_1}^{t_2} E_{kin}dt = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} m\left(\dot{X}'(t)\right)^2 dt$$

eşitliğine karşılık gelir. $m = 1$ olması durumunda bu ifade

$$S = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} \left(\dot{X}'(t)^T\dot{X}'(t)\right)dt \tag{28}$$

halini alır.

E hareketli düzleminin noktalarının enerjileri hesaplandığında E/E' düzlemsel hareketinde en az eylem noktası elde edilir. Bu durumda

$$X'(t) = R(t)X - U'(t)$$

denkleminin t parametresine göre türevi alınırsa

$$\dot{X}'(t) = \dot{R}(t)\big(X - U'(t)\big) + R(t)\left(X - \dot{U}'(t)\right) \tag{29}$$

elde edilir. Bu denklem bileşen formunda ifade edildiğinde

$$\dot{x}_1'(t) = -\big(x_1 - u_1'(t)\big)2r\sin(\theta(t))\,\dot{\theta}(t) + \big(x_1 - \dot{u}_1'(t)\big)2r\,cos\big(\theta(t)\big)$$
$$+\big(x_2 - u_2'(t)\big)r\,cos\big(\theta(t)\big)\,\dot{\theta}(t) + \big(x_2 - \dot{u}_2'(t)\big)r\sin\big(\theta(t)\big)$$
$$\dot{x}_2'(t) = \big(x_1 - u_1'(t)\big)2r\,cos\big(\theta(t)\big)\,\dot{\theta}(t) + \big(x_1 - \dot{u}_1'(t)\big)2r\,sin\big(\theta(t)\big)$$
$$+\big(x_2 - u_2'(t)\big)r\sin\big(\theta(t)\big)\,\dot{\theta}(t) - \big(x_2 - \dot{u}_2'(t)\big)\,rcos\big(\theta(t)\big)$$

olur. (29) ifadesi (28) denkleminde yerine yazılırsa

$$2S(X) = \int_{t_1}^{t_2} \begin{Bmatrix} \left[\dot{R}(t)\big(X - U'(t)\big) + R(t)\left(X - \dot{U}'(t)\right)\right]^T \\ \left[\dot{R}(t)\big(X - U'(t)\big) + R(t)\left(X - \dot{U}'(t)\right)\right] \end{Bmatrix} dt$$

ve böylece

$$\begin{aligned} 2S(X) = \int_{t_1}^{t_2} & \left[(X^T X - X^T U' - U'^T hX + U'^T U')I\dot{\theta}^2 \right. \\ & + \left(X^T X - \dot{U}X^T + \dot{U}'^T \dot{U}'\right)I \\ & + \left(X^T X - X^T \dot{U} - U'^T X + U'^T \dot{U}'\right) \dot{R}^T R \\ & \left. + \left(X^T X - X^T U' - \dot{U}'^T U'\right)\dot{R}^T \dot{R}\right] dt \end{aligned} \tag{30}$$

olur. Diğer taraftan

$$R(t) = \begin{pmatrix} 2r\,cos\big(\theta(t)\big) & r\sin\big(\theta(t)\big) \\ 2r\,sin\big(\theta(t)\big) & -rcos\big(\theta(t)\big) \end{pmatrix}$$

$$\dot{R}(t) = \begin{pmatrix} -2r\sin(\theta(t))\,\dot{\theta}(t) & r\,cos\big(\theta(t)\big)\,\dot{\theta}(t) \\ 2r\,cos\big(\theta(t)\big)\,\dot{\theta}(t) & r\sin(\theta(t))\,\dot{\theta}(t) \end{pmatrix}$$

$$\left[\dot{R}(t)\right]^T = \begin{pmatrix} -2r\sin(\theta(t))\,\dot{\theta}(t) & 2r\,cos\big(\theta(t)\big)\,\dot{\theta}(t) \\ r\,cos\big(\theta(t)\big)\,\dot{\theta}(t) & r\sin(\theta(t))\,\dot{\theta}(t) \end{pmatrix}$$

olduğundan

$$\left[\dot{R}(t)\right]^T R(t) = \dot{\theta}I(t)$$

ve

$$\left[\dot{R}(t)\right]^T \dot{R}(t) = \dot{\theta}I(t)$$

bulunur. Böylece

$$U(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} \quad , \quad [U(t)]^T = (u_1(t) \quad u_2(t))$$

$$\dot{U}(t) = \begin{pmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \end{pmatrix} \quad , \quad \left[\dot{U}(t)\right]^T = (\dot{u}_1(t) \quad \dot{u}_2(t))$$

$$U'(t) = \begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix} \quad , \quad [U'(t)]^T = (u_1'(t) \quad u_2'(t))$$

$$\dot{U}'(t) = \begin{pmatrix} \dot{u}_1'(t) \\ \dot{u}_2'(t) \end{pmatrix} \quad , \quad \left[\dot{U}'(t)\right]^T = (\dot{u}_1'(t) \quad \dot{u}_2'(t))$$

ifadeleri (30) denkleminde yerine yazıldığında

$$2S(X) = \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(X^T X - X^T \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} - (u_1' \quad u_2')X + (u_1' \quad u_2')\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix}\right)I\dot{\theta}^2\right.$$

$$+\left(X^TX-X^T\begin{pmatrix}\dot{u}_1\\ \dot{u}_2\end{pmatrix}+(\dot{u}_1' \quad \dot{u}_2')\begin{pmatrix}\dot{u}_1'\\ \dot{u}_2'\end{pmatrix}\right)I$$
$$+\left(X^TX-X^T\begin{pmatrix}\dot{u}_1\\ \dot{u}_2\end{pmatrix}-(u_1' \quad u_2')X+(u_1' \quad u_2')\begin{pmatrix}\dot{u}_1'\\ \dot{u}_2'\end{pmatrix}\right)\dot{R}^TR$$
$$+\left(X^TX-X^T\begin{pmatrix}u_1'\\ u_2'\end{pmatrix}-(\dot{u}_1' \quad \dot{u}_2')\begin{pmatrix}u_1'\\ u_2'\end{pmatrix}\right)\dot{R}^T\dot{R}\Bigg]dt$$

ve buradan

$$2S(X)=\int_{t_1}^{t_2}\left[\left((x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}-(x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix}u_1'\\ u_2'\end{pmatrix}-(u_1' \quad u_2')\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+(u_1')^2+(u_2')^2\right)I\dot{\theta}^2\right.$$
$$+\left((x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}-(x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix}\dot{u}_1\\ \dot{u}_2\end{pmatrix}+(\dot{u}_1')^2+(\dot{u}_2')^2\right)I$$
$$+\left((x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}-(x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix}\dot{u}_1\\ \dot{u}_2\end{pmatrix}-(u_1' \quad u_2')\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+u_1'\dot{u}_1'+u_2'\dot{u}_2'\right)\dot{R}^TR$$
$$\left.+\left((x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}-(x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix}u_1'\\ u_2'\end{pmatrix}-\dot{u}_1'u_1'-\dot{u}_2'u_2'\right)\dot{R}^T\dot{R}\right]dt$$

elde edilir.

Bu eşitlik bileşen formunda

$$\begin{aligned}2S(x_1,x_2)=(x_1^2+x_2^2)&\int_{t_1}^{t_2}\dot{\theta}^2dt\\ &+\int_{t_1}^{t_2}\left[\left({u_1'}^2+{u_2'}^2\right)\dot{\theta}^2+{\dot{u}_1'}^2+{\dot{u}_2'}^2\right]dt\\ &+x_1\int_{t_1}^{t_2}\left[-2u_1'\dot{\theta}^2-\dot{u}_1-\dot{u}_1\dot{\theta}-2u_1'\dot{\theta}\right]dt\\ &+x_2\int_{t_1}^{t_2}\left[-2u_2'\dot{\theta}^2-\dot{u}_2-\dot{u}_2\dot{\theta}-2u_2'\dot{\theta}\right]dt\end{aligned} \tag{31}$$

şeklinde ifade edilir.

(21) denkleminde

$$H_R=\int_{t_1}^{t_2}\dot{\theta}^2dt$$
$$H_T=\int_{t_1}^{t_2}\left[\left({u_1'}^2+{u_2'}^2\right)\dot{\theta}^2+{\dot{u}_1'}^2+{\dot{u}_2'}^2\right]dt$$
$$H_{x_1}=\int_{t_1}^{t_2}\left[-2u_1'\dot{\theta}^2-\dot{u}_1-\dot{u}_1\dot{\theta}-2u_1'\dot{\theta}\right]dt$$
$$H_{x_2}=\int_{t_1}^{t_2}\left[-2u_2'\dot{\theta}^2-\dot{u}_2-\dot{u}_2\dot{\theta}-2u_2'\dot{\theta}\right]dt$$

eşitlikleri yerine yazılırsa

$$2S(x_1,x_2) = (x_1^2 + x_2^2)H_R + H_T + x_1 H_{x_1} + x_2 H_{x_2} \tag{32}$$

şeklinde elde edilir.

t zaman parametresine bağlı olarak (32) denklemi yeniden ifade edilirse, istenilen X_0 noktasının koordinatlarını en az eylem ilkesi yardımıyla aşağıdaki gibi hesaplanır.

(32) denkleminin X e göre türevi alınır ve sıfıra eşitlenirse,

$$\left.\frac{\partial 2S}{\partial X}\right|_{X_0} = 0 \tag{33}$$

elde edilir. İstenilen karakteristik noktalar (33) eşitliğini sağlayan noktaları tespit ederek bulunur. (20) denkleminin x_1 ve x_2 ye göre türevleri alınır ve düzenlenirse karakteristik nokta

$$\frac{\partial 2S(x_1,x_2)}{\partial x_1} = 2x_1 \int_{t_1}^{t_2} \dot{\theta}^2 dt + \int_{t_1}^{t_2} \left[-2u_1'\dot{\theta}^2 - \dot{u}_1 - \dot{u}_1\dot{\theta} - 2u_1'\dot{\theta}\right] dt \tag{34}$$

ve

$$\frac{\partial 2S(x_1,x_2)}{\partial x_2} = 2x_2 \int_{t_1}^{t_2} \dot{\theta}^2 dt + \int_{t_1}^{t_2} \left[-2u_2'\dot{\theta}^2 - \dot{u}_2 - \dot{u}_2\dot{\theta} - 2u_2'\dot{\theta}\right] dt \tag{35}$$

şeklinde bileşenler halinde elde edilir.

Burada X_0 noktası, hareketli düzlemde bulunan X noktasının aksine t_1 ve t_2 zamanlarının bir fonksiyonudur. Burada t_1 ve t_2 integral sınırlarını temsil eden başlangıç ve bitiş zamanlarıdır. (34) ve (35) denklemleri sıfıra eşitlenir ve karakteristik noktanın bileşenleri

$$x_1 = -\frac{\int_{t_1}^{t_2} \left[-2u_1'\dot{\theta}^2 - \dot{u}_1 - \dot{u}_1\dot{\theta} - 2u_1'\dot{\theta}\right] dt}{2\int_{t_1}^{t_2} \dot{\theta}^2 dt} = -\frac{H_{x_1}}{2H_R}$$

ve

$$x_2 = -\frac{\int_{t_1}^{t_2} \left[-2u_2'\dot{\theta}^2 - \dot{u}_2 - \dot{u}_2\dot{\theta} - 2u_2'\dot{\theta}\right] dt}{2\int_{t_1}^{t_2} \dot{\theta}^2 dt} = -\frac{H_{x_2}}{2H_R}$$

olarak elde edilir. X_0 noktasının en az eylem noktası olması için $\frac{\partial^2 S}{\partial X^2} > 0$ olmalıdır. O halde

$$\frac{\partial^2 S}{\partial X^2} = \frac{1}{2}\mathrm{I}\int \dot{\theta}^2 dt = \frac{1}{2}\mathrm{I}H_R$$

eşitliği her zaman 0 dan büyük bir değer alacağından X_0 bir karakteristik nokta belirtir.

(31) ifadesinde karakteristik noktanın bileşenleri yerine yazılırsa

$$2S_0(t_1,t_2) = \left[\left(-\frac{H_{x_1}}{H_R}\right)^2 + \left(-\frac{H_{x_2}}{H_R}\right)^2\right] H_R + H_T - \frac{H_{x_1}}{H_R}H_{x_1} - \frac{H_{x_2}}{H_R}H_{x_2}$$

elde edilir.

Buradan da en az eylem

$$2S_0(t_1,t_2) = H_T(t_1,t_2)$$

şeklinde ifade edilir.

4. Sonuçlar ve Öneriler

Dathe ve Gezzi tarafından ifade edilen düzlemsel hareketler için en az eylem ilkesi, bu çalışmada 1 −parametreli düzlemsel hareket altında bazı özel sikloid tipi eğrileri için ifade edilmiştir. Çalışmadan elde edilen sonuçlar ters hareket ve diğer hareket türleri altında farklı eğriler için incelenebilir.

Yazarların Katkısı

Tüm yazarlar çalışmaya eşit katkıda bulunmuştur.

Çıkar Çatışması Beyanı

Yazarlar arasında herhangi bir çıkar çatışması bulunmamaktadır.

Araştırma ve Yayın Etiği Beyanı

Yapılan çalışmada araştırma ve yayın etiğine uyulmuştur.

Kaynaklar

Müller, H. R., Egesoy, E. ve Oruç, M. (1963). *Kinematik dersleri*. Ankara Üniversitesi.

Whitman, E. A. (1943). Some Historical Notes on the Cycloid. The American Mathematical Monthly. *50*(5), 309-31.

Blaschke, W., & Müller, H. R. (1956). *Ebene Kinematik*. München.

Dathe, H., Gezzi R., Kubein-Meesenburd D. and Nagerl, H. (2015). Characteristic Point and Cycles in Planar Kinematics with Applcations to Human Gait. Acta Bioengineering and Biomechanics. 17, No.1.