



Faiz Oranının Anüite Fiyatları Üzerindeki Etkisine İlişkin Bir Çalışma



*Makale Bilgisi / Article Info

Alındı/Received: 22.12.2023

Kabul/Accepted: 07.05.2024

Yayımlandı/Published: 27.06.2024

Importance of Interest Rate on Annuity Prices: A Case Study

Çiğdem LAZOĞLU * , Müge YELDAN , Uğur KARABEY 

Hacettepe Üniversitesi, Fen Fakültesi, Aktüerya Bilimleri Bölümü, Ankara.

© Afyon Kocatepe Üniversitesi

Öz

Sigortacılıkta, uzun dönemli anüiteler için doğru iskonto faktörünün belirlenmesi son derece önemlidir. Aktüeryal çalışmalarda iskonto faktörü genellikle sabit olarak ele alınmaktadır; ancak yüksek volatiliteli faiz oranına sahip ülkelerde sabit faiz oranı kullanmak, doğru olmayan hesaplamalara neden olmaktadır. Bu çalışmada farklı ekonomik ve demografik yapıya sahip ülkeler için Monte Carlo Simülasyonu oluşturulmuş, simülasyonda ölümlülük için Lee-Carter modeli, faiz için Vasicek modeli tercih edilerek, sabit ve stokastik faiz ile hayat anüitesi fiyatlarının ampirik olarak dağılımı elde edilmiştir. Risk ölçütleri kullanılarak hem ölümlülükteki hem de faizdeki oynaklığın anüite fiyatları üzerindeki etkisi incelenmiştir. Sonuç olarak faiz oranındaki değişkenlik arttıkça, anüite fiyatlarındaki volatilitenin de yükseldiği belirlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Hayat Anüitesi; Lee-Carter ölümlülük Modeli; Vasicek faiz modeli; Risk ölçütleri

Abstract

Determination of the accurate discount factor for long-term annuities is crucial in insurance sector. In actuarial studies, the discount factor is typically assumed to be fixed. However using a fixed interest rate in countries with highly fluctuating interest rates can lead to unreliable calculations. In this paper, a Monte Carlo Simulation is constructed for countries with different economic and demographic structures where the Lee-Carter and Vasicek model is used for mortality and interest rate, respectively. Thanks to this scenario the empirical distribution of annuities with both fixed and variable interest rates are established. Risk measures are employed to analyze the impact of mortality volatility and interest rate volatility on the annuity prices. The findings indicate that annuities valued with high interest rate volatility exhibit greater overall volatility. As a result, as the variability of interest rates increases, the volatility of the annuity prices also rises.

Keywords: Life annuity; Lee-Carter Mortality Model; Vasicek short rate model; Risk Measures

1. Giriş

Aktüerler, geleneksel olarak sabit ölüm ve sabit faiz oranları kullanarak anüite ödemelerinin aktüeryal bugünkü değerini hesaplarlar. Değişen yaşam koşulları, ekonomik şartlar, teknolojik gelişmeler ya da yaşanabilecek bir felaket gelecekteki hem ölümlülük hem de faiz oranlarını belirsiz hale getirmektedir. Anüite ürünleri doğası gereği uzun vadeli yapıya sahiptir ve bu belirsizlikler anüite fiyatı üzerinde oldukça etkilidir.

Son yıllarda stokastik ölümlülük ve faiz oranları kullanılarak hayat anüitelerinin fiyatlamasına ilişkin yapılan çalışmalar popüler hale gelmiştir. Literatürde, ölümlülüğün anüite fiyatı üzerindeki etkisini Lee-Carter modeli ile ele alan çalışmalara Denuit (2008), Richards ve Currie (2009), Biffis ve Denuit (2011) örnek gösterilebilir.

Anüite ürünlerinde faiz belirsizliği için stokastik faiz modelleri ilk olarak Pollard (1971) ve Boyle (1976)

tarafından kullanılmıştır. Beekman ve Fuelling (1990) hem faiz oranlarının hem de gelecekteki yaşam sürelerinin rastgele olduğu anüiteler için bir model oluşturmuştur. Wang vd. (2004), Vasicek ve CIR modellerini kullanarak faiz oranı dalgalanmalarının hayat poliçesi primi ve riski üzerindeki etkisini incelemiştir. Hoedemakers vd. (2005) stokastik faizlerin sırasıyla Brownian hareketi ve Ornstein-Uhlenbeck süreci ile modellendiği hayat anüitesi dağılımı için yaklaşım önermiştir. Dufresne (2007) getirilerin Geometrik Brown hareketine uygun olduğu varsayımı altında stokastik bir hayat anüitesinin dağılımı için analitik yaklaşımlar önermiştir.

Dowd vd. (2011), faiz oranı riski ve uzun ömürlülük riskinin gelecek yıllardaki anüite fiyatlarının dağılımı üzerindeki etkisini ölçen bir algoritma önermiştir. Çalışmada ölümlülük riski için Cairns-Blake-Dowd model, faiz oranı için CIR model kullanılmıştır. Liu (2013) ölüm riski için Lee-

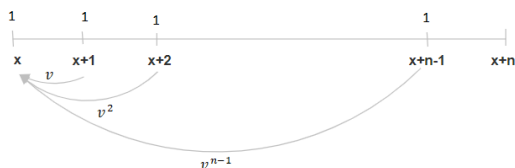
Carter ve Cairns-Blake-Dowd modellerini, faiz riski için ise tek faktörlü ve iki faktörlü CIR modellerini kullanarak anüitedeki belirsizliği incelemiştir. Rabiti ve Borgonovo (2020) stokastik ölümlülük ve faiz oranı faktörlerinin anüite üzerindeki etkilerini değerlendirmek amacıyla duyarlılık yöntemlerini karşılaştırmalı bir analiz ile incelemiştir.

Çalışma, farklı piyasa koşulları için faiz oranındaki değişkenliğin anüite fiyatlarına duyarlılığını gösterme konusunda literatüre katkı sağlamayı amaçlamaktadır. Faizin anüite üzerindeki etkisini incelemek amacıyla sabit ve stokastik faiz ile anüite fiyatları elde edilmiştir. Sabit faizli hayat anüiteleri, ekonomiye duyarlı olmayan sadece ölümlülük verisine duyarlı olan senaryoyu yansıtmaktadır. Diğer yandan, stokastik faizli hayat anüiteleri, ekonomideki belirsizlikleri ve faiz oranlarındaki dalgalanmaların etkilerini daha etkili bir şekilde ortaya koymaktadır. Bu kapsamda farklı demografik ve ekonomik yapılaraya sahip Türkiye, ABD ve Kanada analizlerde ele alınmıştır. Ölümlülük yapısı için Lee-Carter (1992), stokastik faiz için Vasicek (1977) modeli kullanılarak parametre tahminleri yapılmıştır. Yaşam olasılıkları ve stokastik faiz oranları için Monte-Carlo simülasyonu ile gelecek 10, 20, 30 yıllık tahminler elde edilmiştir. Böylece ele aldığımız ülkeler için hayat anüitesinin ampirik dağılımı elde edilmiştir. Stokastik faizin anüite üzerindeki etkisini gösterebilmek için risk ölçütlerinden de yararlanılmıştır.

2. Hayat Anüitesi

Anüite ürünlerinin fiyatlarının doğru hesaplanması hayat sigorta şirketleri için finansal sorumluluklar açısından kritik bir değere sahiptir. Hayat anüite ürünleri, yaşam koşuluna bağlı olarak sürekli veya eşit aralıklarla yapılan düzenli ödemeler dizisidir. Ödemeler, belirli bir dönem boyunca yapılıyorsa dönem hayat anüitesi, kişi hayatta kaldığı süre boyunca yapılıyorsa tam hayat anüitesi olarak adlandırılır.

Şekil 1’de gösterildiği üzere x yaşındaki birine n yıl boyunca yaşama koşuluna bağlı olarak her yılın başında yapılacak 1 birimlik ödemelerin bugünkü değerlerinin toplamı hayat anüitesi olarak adlandırılır.



Şekil 1. x yaş için n yıllık dönem anüitesi

Şekil 1’de gösterilen ifadenin matematiksel olarak gösterimi, t yılında, n yıllık dönem anüitesinin bugünkü değeri:

$$\ddot{a}_{x:t:n} = \sum_{k=0}^{n-1} v_t^k p_{x,t} \quad (1)$$

şekindedir. v_t , t yılındaki iskonto faktörünü göstermek üzere; sabit faiz kullanıldığında $v_t^k = (1+i)^{-k}$, stokastik

faiz kullanıldığında $v_t^k = e^{-\int_0^k r(s)ds}$, $k > 0$ dir. t yılında, x yaşındaki bireyin k yıl yaşama olasılığı ${}_k p_{x,t} = \exp(-\sum_{j=0}^{k-1} \mu_{x+j,t+j})$ ile ifade edilir.

Hayat anüite ürünleri genellikle uzun vadeli ürünlerdir ve fiyatlanırken iki husus önemlidir: Faiz oranı ve ölümlülük.

2.1. Lee-Carter ölümlülük modeli

Lee ve Carter (1992), hem yaş grupları hem de yıllar üzerinden ölümlülüğün değişimini dikkate alan bir modeldir. Modelin en büyük eksikliği; hataların sabit varyanslı (homoscedastic) dağıldığı varsayımı ve ölümlülük değişiminde kuşak (cohort) etkisini dikkate almamasıdır. Bu modele göre $\mu_{x,t}$ ölümlülük oranı

$$\log(\mu_{x,t}) = a_x + b_x \kappa_t + \varepsilon_{x,t} \quad (2)$$

ve

$$\kappa_t = \delta + \kappa_{t-1} + \xi_t \quad (3)$$

olarak ifade edilir. Burada, $\mu_{x,t}$, x yaşı ve t yılı için ölüm hızını, $\varepsilon_{x,t}$ hata terimini gösterir. a_x zamandan bağımsız yaşa özel ortalama ölümlülük hızını, κ_t zamana bağlı ölümlülük trendini ve b_x x yaşı için ölüm hızının, ölümlülük trendindeki değişikliklere duyarlılığını ifade eder. κ_t , bir Gauss rastgele yürüyüşü olarak modellenir.

δ drift parametresi ve $\xi_t \sim N(0, \sigma_\kappa^2)$ ile bağımsız ve aynı dağılıma sahip olan ölümlülük trendinin hata terimidir. (Parametre tahmini için $\sum_t \kappa_t = 0$ ve $\sum_x \beta_x = 1$ varsayımı yapılmaktadır.)

Lee-Carter ölümlülük modelinde parametre tahmini, tekil değer ayrışımı (TDA) ile yapılan en küçük kareler (EKK) yöntemi ile elde edilir. Bu yöntemin modele uygulanışına ilişkin ayrıntılı bilgi Lee-Carter (1992) çalışmasında mevcuttur.

t yılında, x yaşındaki bir ortak özellikli grup için n yıllık tahmini yaşama olasılığı;

$${}_n p_{x,t} = \exp\left(-\sum_{j=0}^{n-1} \mu_{x+j,t+j}\right) \quad (4)$$

$$= \exp\left(-\sum_{j=0}^{n-1} a_{x+j} + b_{x+j} \kappa_{t+j}\right)$$

ve

$$\kappa_t = \delta \cdot j + \kappa_0 + \sum_{h=1}^j \xi_h \quad (5)$$

ile elde edilir.

2.2. Vasicek faiz modeli

Vasicek (1977) tarafından kısa vadeli faiz oranlarının modellenmesi için ortaya atılan model ilk stokastik modellerden biridir. Model faiz oranlarının tek bir stokastik faktöre (piyasa riski faktörüne) dayalı olarak modellenebileceğini varsayar. Kısa vadeli faiz oranı $r(t)$:

$$dr(t) = \alpha(\beta - r(t))dt + \sigma dW(t) \quad (6)$$

olarak ifade edilir. Bu denklemde; $W(t)$ Wiener süreci olarak tanımlanan rastgele piyasa riskini, α ortalamaya dönme hızını, β uzun dönem ortalamasını, σ kısa vadeli faiz oranının volatilitasını gösterir. Parametre tahminleri

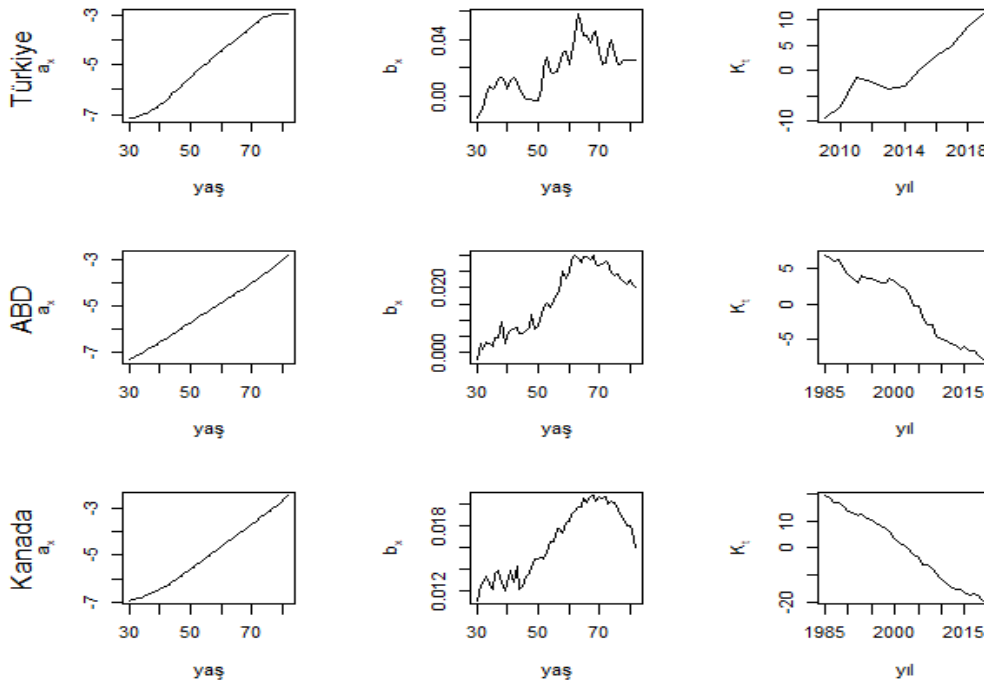
elde edebilmek için modeli kesikli hale getirmek gerekmektedir.

$$\Delta r(t) = \alpha(\beta - r(t))\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Z \quad (7)$$

Burada Δt , zaman aralığını; Z ise standart normal dağılımı ifade etmektedir $Z \sim N(0, 1)$. Modelin parametre tahminleri en çok olabilirlik yöntemi ile elde edilebilir. Ornstein-Uhlenbeck sürecine dayanan Vasicek modeli, ortalamaya dönme eğilimindedir. Bu durum şunu ifade eder: Kısa vadeli faiz oranı uzun vadeli ortalamasının üzerinde ise (altında ise), belli bir süre sonra uzun dönemli denge değerine doğru faiz değerinin düşmesi (artması) muhtemeldir. Böylece faiz oranlarının aşırı artmayacağı veya aşırı düşmeyeceği garanti edilir. Modelin en büyük eksikliği; faiz oranlarının negatif olmasına imkan vermesidir.

3. Uygulama

Bu çalışmada, ekonomik ve demografik koşulların anüite üzerindeki etkisini belirlemek amacıyla Türkiye, sosyo-ekonomik açıdan daha gelişmiş olan ABD ve Kanada ile karşılaştırılmıştır. Beklenen yaşam süresi, bir ülkenin sosyo-ekonomik yapısını yansıtan önemli bir göstergedir. 2019 verilerine göre, 65 yaşındaki bir erkek için beklenen yaşam süresi Türkiye'de 16.3 iken, ABD ve Kanada için sırasıyla 18.2 ve 19.6'dır (İnt. Kyn. 1).



Şekil 2. Lee-Carter Ölümlülük modelinin tahmini parametre değerleri

Bu çalışmada, 30-80 yaş aralığındaki erkek ölümlülük verileri iki farklı kaynaktan elde edilmiştir. Türkiye için 2009-2019 yılları arasındaki veriler Türkiye İstatistik Kurumu 'dan (İnt. Kyn. 2), Kanada ve ABD için ise 1985-

2019 yılları arasındaki veriler Human Mortality Database' den (İnt. Kyn. 3) alınmıştır. Lee-Carter modeli ile parametre tahminleri gerçekleştirilmiştir. Lee-Carter ölümlülük modelinin tahmini parametre değerleri Şekil

2’de gösterilmiştir. Şekil 2’de yaşa özel ortalama ölümlülük hızı (a_x) üç ülke için benzerdir. Zamana bağlı ölümlülük trendi (κ_t) ABD ve Kanada için yıllar içinde azalırken Türkiye için artmaktadır. Ölümlülük trendi toplumdaki sosyo-ekonomik, sağlık ve demografik faktörlerin etkisi altında ölümlülük oranlarının nasıl değişeceği konusunda önemli ipuçları sunar. κ_t teriminin azalma eğilimde olması genel olarak yaşam kalitesinin artmasıyla ilişkilendirilebilir.

Ölümlülük trendinin bir zaman serisi olarak modellenmesi ve tahmin edilmesi için ARIMA modellerinden yararlanılmıştır. Farklı ARIMA modelleri için tahminler yapılmış ve tüm ülkelerin ölümlülük trendinin ARIMA(0,1,0) modeline daha uygun olduğu Çizelge 1’de gösterilmiştir.

Çizelge 1. ARIMA modeli için AIC değerleri

| | ABD | Türkiye | Kanada |
|--------------|--------------|--------------|-------------|
| ARIMA(0,1,0) | 65.04 | 46.34 | 75.9 |
| ARIMA(1,0,0) | 88.03 | 62.62 | 130.21 |
| ARIMA(1,1,0) | 77.08 | 50.4 | 94.34 |
| ARIMA(1,1,1) | - | 52.29 | 91.57 |
| ARIMA(0,1,1) | 78.05 | 50.51 | 106.91 |
| ARIMA(0,0,1) | 173.5 | 67.57 | 239.91 |
| ARIMA(2,0,0) | 87.69 | 61.2 | 107.01 |
| ARIMA(2,1,0) | 87.69 | 52.35 | 90.25 |
| ARIMA(2,1,1) | 72.72 | 54.29 | 85.07 |
| ARIMA(2,0,1) | - | 62.97 | 91.1 |

ARIMA (0,1,0) ile parametre tahmin sonuçları Çizelge 2’de verilmiştir.

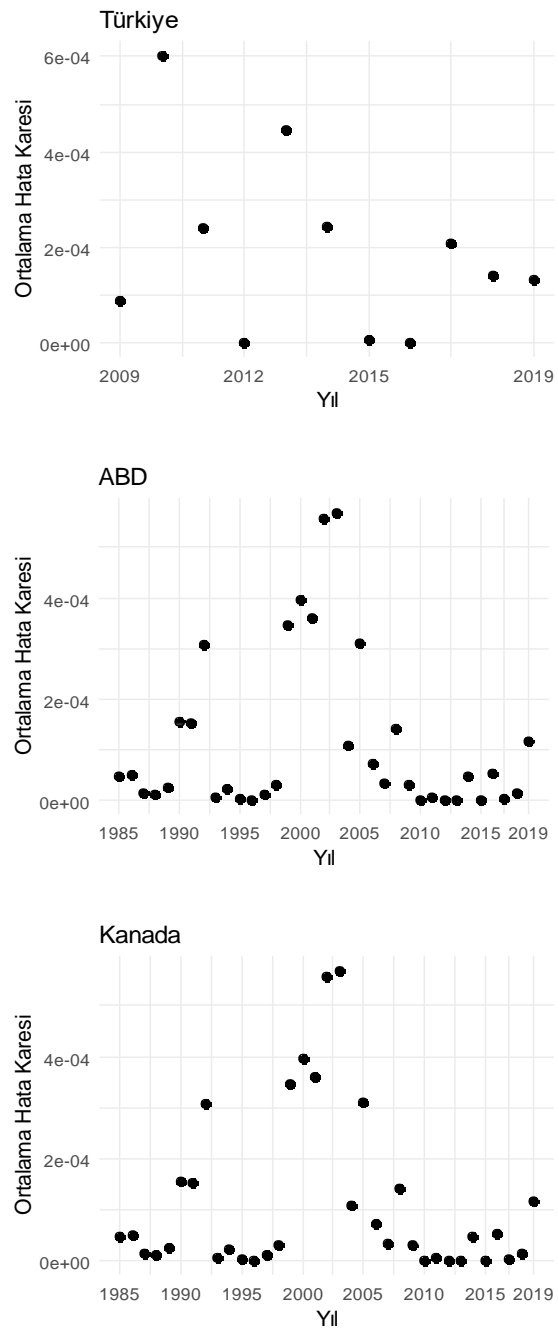
Çizelge 2. Ölümlülük trendinin (κ_t) parametre tahminleri

| Parametre | ABD | Türkiye | Kanada |
|------------|----------------------|--------------------|----------------------|
| δ | -0.4297 (0.1018)* | 2.057 (0.6355)* | -1.1250 (0.1195)* |
| σ^2 | 0.3632 | 4.488 | 0.500 |

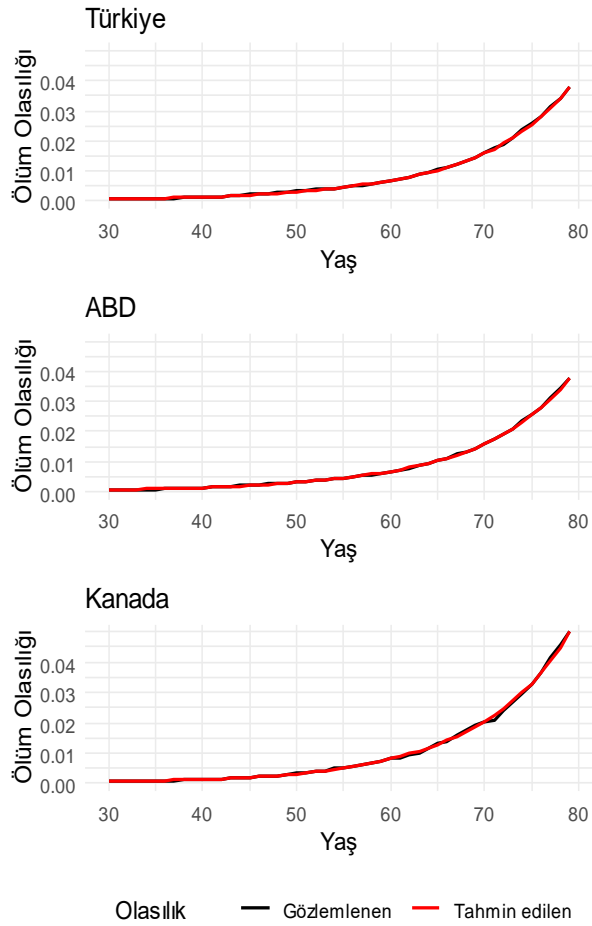
(* drift parametresinin hatasını gösterir.)

Tahmin edilen parametreler kullanılarak elde edilen ölüm olasılıklarının ortalama hata kareleri yıllar bazında Şekil 3’te verilmiştir. Hataların yıllar içerisinde değişkenlik göstermesinin yanı sıra küçük değerler aldığı görülmektedir. Bu durum Lee-Carter modelin gerçeğe yakın tahminler verdiğini göstermektedir.

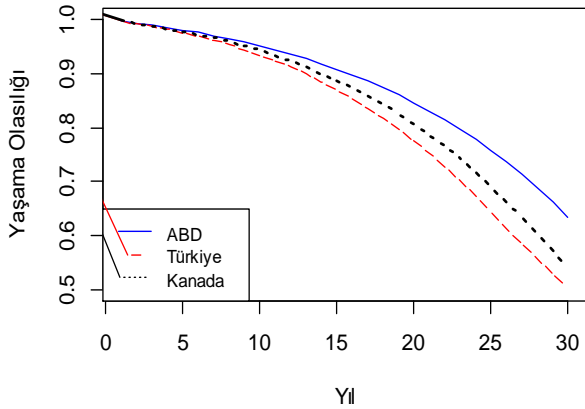
2015 yılı için her bir yaşa ilişkin tahmin edilen ile gözlemlenen ölüm olasılıkları Şekil 4’te gösterilmektedir. Monte Carlo simülasyonu oluşturulurken, bu parametreler kullanılarak farklı vadeler için (2019’dan başlayarak maksimum 30 yıl olmak üzere) ölüm olasılıkları tahmin edilmiştir. 10000 simülasyon ile elde edilen 50 yaşındaki bireyin $t = 1, 2, \dots, 30$ yıl yaşaması olasılıkları Şekil 5’te gösterilmiştir. Şekil 5’te ABD’nin yaşama olasılıkları yüksek iken Türkiye’nin olasılıklarının daha düşük olduğu görülmektedir. Zaman içerisinde olasılıklardaki değişimin daha fazla olması ölümlülükte oynaklığın daha yüksek olduğu anlamına gelmektedir.



Şekil 3. Ölüm olasılığının yıllar itibariyle ortalama hata kareleri



Şekil 4. 2015 yılı için gözlemlenen ve parametreler ile tahmin edilen ölüm olasılıkları



Şekil 5. 50 yaş için simülasyon sonucu elde edilen yaşam olasılıkları

Anüite fiyatlaması için önemli bir faktör olan faizi modellemek amacıyla, 2 Ocak 2008 ile 31 Aralık 2019 yılları arasındaki 3 aylık risksiz faiz oranlarının günlük değerleri kullanılmıştır (İnt. Kyn. 4). Çalışmada kullanılan faiz verisine ilişkin betimleyici istatistikler Çizelge 3'te yer almaktadır.

Çizelge 4'teki α parametresi incelendiğinde Kanada'nın faiz oranının, ortalamasına daha hızlı dönme eğiliminde olduğu söylenebilir. β 'ya göre, Türkiye'nin faiz oranının

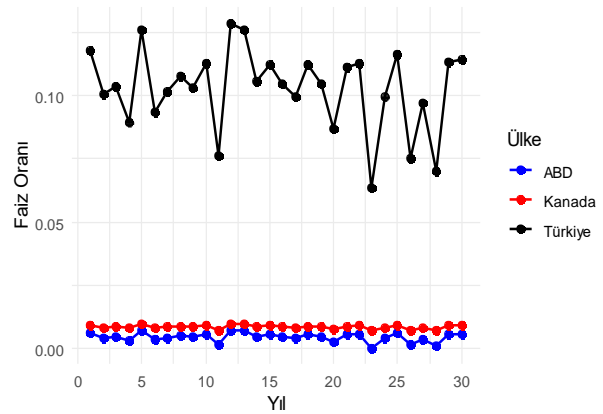
uzun vadeli ortalamasının en yüksek olduğu görülmektedir. σ değerlerine göre Türkiye için finansal piyasalarındaki belirsizliğin ve oynaklığın daha fazla olduğu söylenebilir. Vasicek modeli ile gelecek 30 yıla ilişkin oluşturulan simülasyonların yıllar itibarıyla ortalama değerleri Şekil 6'da verilmektedir. Türkiye için faiz oranlarının daha yüksek ve değişken olduğu gözlemlenmektedir. Vasicek modeli kullanılarak parametre tahminleri gerçekleştirilmiş ve Çizelge 4'te verilmiştir.

Çizelge 3. 3 aylık risksiz faiz oranına ilişkin betimleyici istatistikler

| | ABD | Türkiye | Kanada |
|------------|-----------|-----------|-----------|
| Ortalama | 0.0058361 | 0.1099838 | 0.0096854 |
| Std. sapma | 0.0079229 | 0.0461545 | 0.0058004 |
| Minimum | 0.0100000 | 0.0400000 | 0.0016000 |
| Maksimum | 0.0323900 | 0.2548500 | 0.0379000 |

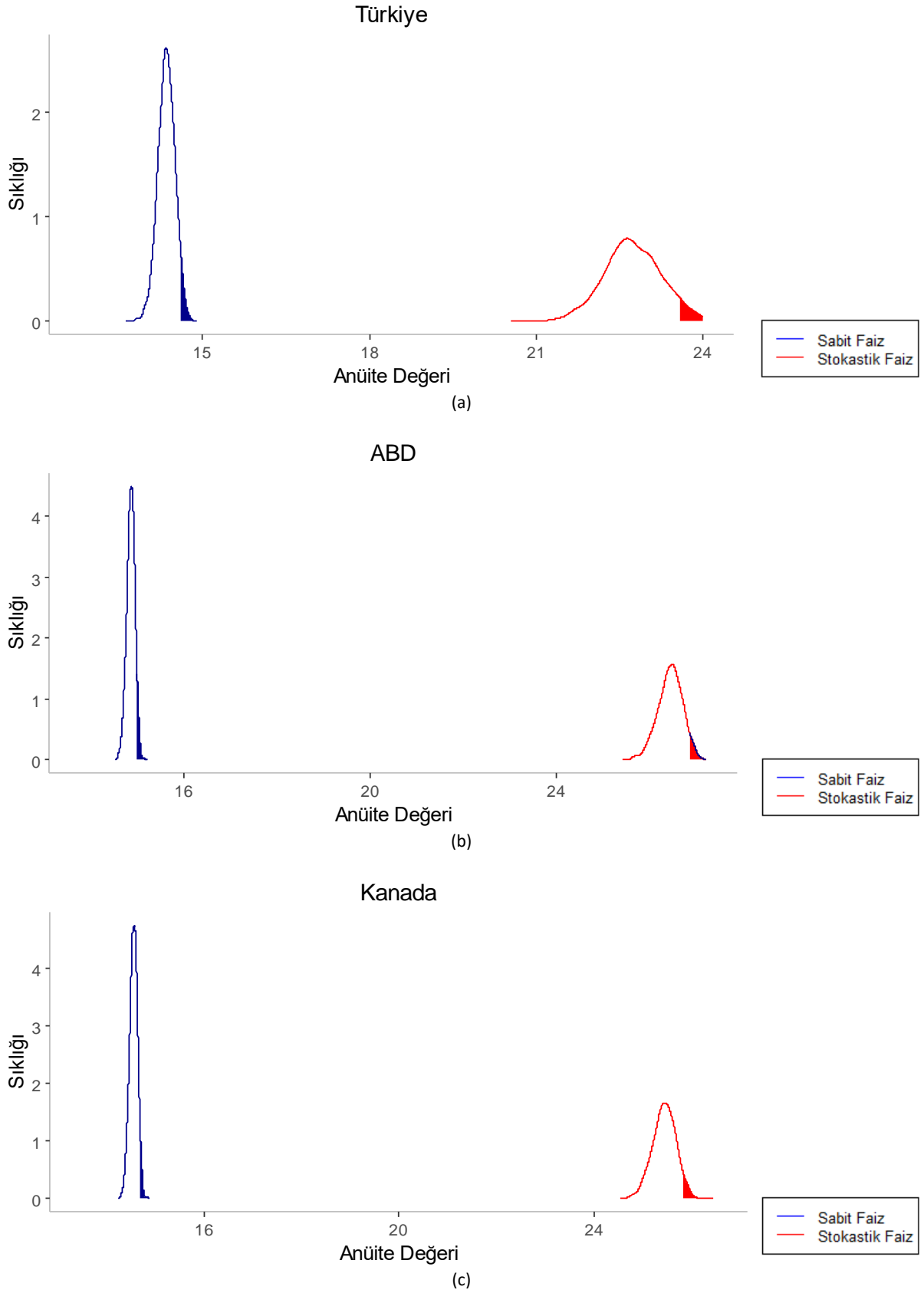
Çizelge 4. Vasicek faiz modelinin parametre tahminleri

| Parametre | ABD | Türkiye | Kanada |
|-----------|-----------|-----------|-----------|
| α | 0.6512837 | 0.6420228 | 1.0865789 |
| β | 0.0037388 | 0.1026490 | 0.0081055 |
| σ | 0.0056919 | 0.0507881 | 0.0035860 |
| r_0 | 0.0154100 | 0.1026400 | 0.0016600 |



Şekil 6. Simülasyon sonucu elde edilen faiz oranları

Faizdeki belirsizliğin anüiteye yansımaları görmek için, elde edilen parametre değerleri kullanılarak farklı vadeler için (10, 20 ve 30) 2019'dan başlayarak simülasyon 10000 kez tekrarlanmıştır. Böylelikle hem sabit faizle hem de stokastik faizle hayat anüite fiyatları elde edilmiştir. Sabit faiz oranı, tek bir değer olarak belirlenmiştir. Çalışmada bu sabit değer 0.05 olarak kabul edilmiştir. Farklı değerlerin kullanılması mümkün olsa da, çalışmanın amacı anüite fiyatlarında faizin etkisini göstermek olduğundan sabit değer ne olduğu görece olarak önemsizdir. Elde edilen anüitelerin ampirik dağılımlarına ilişkin bilgiler Şekil 7'de gösterilmektedir.



Şekil 7. Tüm ülkeler için sabit ve stokastik faizli 30 yıllık anüitelerin dağılımı ((a) Türkiye, (b) ABD ve (c) Kanada için dağılımları ifade eder. Taralı alanlar dağılımın 0.95 yüzdeliğini aşan değerlerini göstermektedir.

Şekil 7 'de sabit ve stokastik faizli anüite değerleri yer almaktadır. Ölümlülük yapılarındaki değişkenliğin anüite üzerindeki etkisi sabit faizli anüite dağılımıyla görülmektedir. Ölümlülükle birlikte ekonomik değişkenliğin etkisi stokastik faizli anüite dağılımı ile gözlemlenebilir. Sabit faizli anüite değerleri ele alındığında, Türkiye'nin dağılımı mortalitedeki değişkenlikten kaynaklı daha geniş aralığa yayılmaktadır. Stokastik faizli anüitelerin dağılımı, ekonomi ve ölümlülük açısından ülkeler arasındaki farklılıkları daha dinamik bir şekilde yansıtmaktadır. Sabit faizli anüite dağılımları daha sivriyken stokastik faizli anüite dağılımları daha basık bir yapı sergilemektedir. Ayrıca tüm ülkeler için anüite dağılımı üzerinde, ekonomik yapının etkisinin daha belirgin olduğu görülmüştür. Anüitenin değerleri daha ayrıntılı bir şekilde Çizelge 5 ve Çizelge 6'da verilmiştir.

Çizelge 5. Sabit faizli anüite değerleri ve standart sapmaları

| | ABD | Türkiye | Kanada |
|--------------------------------|--------------------------|-------------------------|-------------------------|
| $\ddot{a}_{50:\overline{10} }$ | 7.970513 (0.0033225) | 7.92938 (0.0036407) | 7.948673 (0.0041562) |
| $\ddot{a}_{50:\overline{20} }$ | 12.52101 (0.02887419) | 12.30257 (0.043031) | 12.4001 (0.02853284) |
| $\ddot{a}_{50:\overline{30} }$ | 14.87564 (0.0846195) | 14.34317 (0.1226149) | 14.56164 (0.0810306) |

Şekil 5'ten tespit edilebilen Türkiye yaşam olasılıklarının görece düşüklüğü Çizelge 5'te anüite fiyatlarının da görece düşük olmasına neden olduğu belirlenmiştir. Ayrıca, Türkiye'ye ait anüitenin standart sapmaları tüm dönemler için daha yüksektir. Bu durum, yaşam olasılıklarının volatilitésinin yüksekliğinden kaynaklanmaktadır.

Çizelge 6. Stokastik faizli anüite değerleri ve standart sapmaları

| | ABD | Türkiye | Kanada |
|--------------------------------|--------------------------|-------------------------|--------------------------|
| $\ddot{a}_{50:\overline{10} }$ | 9.766781 (0.02337984) | 8.907974 (0.1866079) | 9.706788 (0.01101282) |
| $\ddot{a}_{50:\overline{20} }$ | 18.837 (0.06931814) | 16.80504 (0.2901798) | 18.52688 (0.05936222) |
| $\ddot{a}_{50:\overline{30} }$ | 26.43162 (0.2594304) | 22.73947 (0.518828) | 25.43985 (0.2376628) |

Çizelge 6'da Türkiye için tahmin edilen hayat anüitesi fiyatlarının diğer ülkelerden önemli derecede sapma gösterdiği göze çarpmaktadır. Bu farklılık faiz oranının yüksek ve oynaklığının fazla olmasından kaynaklanmaktadır. Ayrıca bu sonuçlardan ABD ve Kanada'nın finansal olarak daha istikrarlı bir yapıya sahip olduğu yorumu da yapılabilir.

Anüitenin dönemi uzadıkça faizin etkisi daha önemli hale gelmekte, sabit ve stokastik faizli anüite arasındaki fark artmaktadır. Örneğin ABD'ye ait sabit ve stokastik faizli anüite değerleri arasındaki fark 10 dönemlik bir hayat anüitesi için yaklaşık olarak 1.796 iken 30 dönemlikte 11.555'e kadar çıkmaktadır. Benzer durum anüitelerin standart sapmaları için de geçerlidir.

Anüite fiyatlarından değişkenliği, farklı bir bakış açısı ile analiz etmek için risk ölçütlerinden riske maruz değer ve beklenen kayıp kullanılmıştır. Riske maruz değer (Value at risk-VaR) genellikle belirli bir zaman diliminde ve belirli bir güven düzeyinde karşılaşılabilecek maksimum olası hasarı ifade eder. Riske maruz değer

$$VaR_{\alpha}(X) = \inf \{x \in [0, \infty) : F_X(x) \geq \alpha\} \quad (8)$$

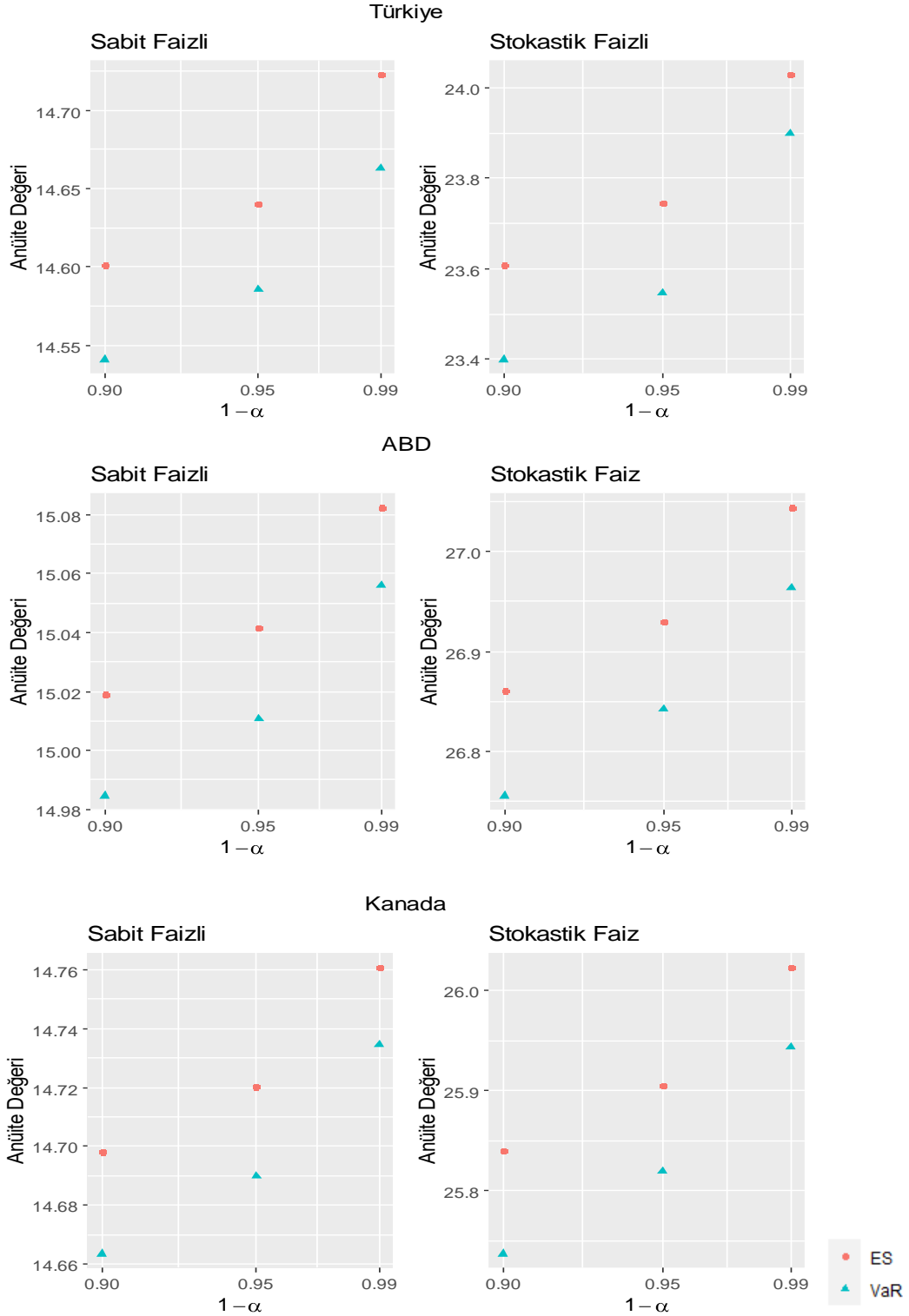
ile ifade edilir. α güven düzeyini, $F_X(x)$, X rastlantı değişkeninin kümülatif dağılımını göstermektedir. Riske maruz değer parasal bir ölçüt olduğundan popüler olmakla birlikte, tutarlı risk ölçütü özelliklerini sağlamadığından eleştirilmektedir. Bu kapsamda literatürde yapılan çalışmalar sonucu tutarlı bir risk ölçütü olan beklenen kayıp ortaya çıkmıştır. Riske maruz değer dağılımın kuyruğuna ilişkin sabit bir noktayı (çeyrekliği) ifade ederken, beklenen kayıp bu noktayı aşan tüm değerlerin ortalaması olarak değerlendirilir ve

$$ES_{\alpha}(X) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{\alpha}^1 VaR_p(X) dp \quad (9)$$

ile ifade edilir.

Bu çalışmada her iki risk ölçütü üzerinden analizler değerlendirilmiştir. Böylece faiz ve mortalite oranı kapsamında yaşanacak değişikliklerin risk ölçütleri yönünden tepkisel analizleri incelenmiştir. Risk ölçütleri $\alpha = 0.90, 0.95, 0.99$ güven düzeyleri ile Şekil 8 'de gösterilmiştir.

Şekil 8 'de sabit ve stokastik faizli anüite için riske maruz değer (VaR) ve beklenen kayıp (ES) değerleri hesaplanmıştır. Grafiklerde farklı güven düzeyleri incelenmiştir. Sabit faizli anüitenin riske maruz değerleri ve beklenen kayıpları arasında görece farklılık olmadığı belirlenmiştir. Şekil 8 incelendiğinde tüm ülkeler için stokastik faizli anüitenin risk ölçütleri arasında belirgin bir fark olduğu görülmektedir. Özellikle Türkiye için farkın görece daha fazla olduğu söylenebilir. Bu durum, Türkiye için anüite fiyat dağılımı kuyruğunun diğer ülkelerden daha kalın ve uzun, ayrıca oynaklığının daha yüksek olmasından kaynaklıdır.



Şekil 8. 50 yaş için 30 yıllık anüitenin $\alpha = 0.90, 0.95, 0.99$ için riske maruz değerleri ve beklenen kayıpları

4. Tartışma ve Sonuç

Bu çalışmada, finansal risk yönetimi açısından faiz oranlarının anüite fiyatları üzerindeki etkisi Lee-Carter ölümlülük modeli ve Vasicek stokastik faiz modeli kullanılarak incelenmiştir. Lee-Carter modeli ile yaş gruplarına bağlı olarak belirlenen ölümlülük tahminleri ve Vasicek modeli ile elde edilen stokastik faiz oranları

kullanılarak Monte Carlo simülasyonları oluşturulmuştur. Bu simülasyonlar ile farklı vadeler için yaşam olasılıkları ve faiz oranlarının rassal değişimleri, hem dağılım yapısı hem de risk ölçütleri yönünden detaylı olarak analiz edilmiştir.

Sabit ve stokastik faiz faktörlerinin anüite fiyatları üzerindeki etkileri incelenmiş, sabit faizli anüitelerin fiyatları beklenen bir faiz oranı üzerinden hesaplandığı için

daha istikrarlı olsa da, stokastik faizli anüite fiyatlarının faiz oranlarındaki dalgalanmalara daha duyarlı olduğu belirlenmiştir. Dağılımın farklı güven düzeyleri için hesaplanan risk ölçütlerindeki değişkenlik de bu durumu destekleyen bir bakış açısı olarak değerlendirilmiştir.

Etik Standartlar Bildirgesi

Yazarlar tüm etik standartlara uyduklarını beyan ederler.

Yazarlık Katkı Beyanı

Yazar-1: Metodoloji, Tasarım, Analiz ve Yorumlama, Görselleştirme, Yazma

Yazar-2: Metodoloji, Tasarım, Yazma, Kaynaklar, İnceleme ve Düzenleme

Yazar-3: Analiz ve Yorumlama, İnceleme ve Düzenleme, Danışmanlık

Çıkar Çatışması Beyanı

Yazarların bu makalenin içeriğiyle ilgili olarak beyan edecekleri hiçbir çıkar çatışması yoktur.

Verilerin Kullanılabilirliği

Bu çalışma sırasında oluşturulan veya analiz edilen tüm veriler, yayınlanan bu makaleye dahil edilmiştir.

5. Kaynaklar

Beekman, John A., and Clinton P. Fuelling. 1990. "Interest and Mortality Randomness in Some Annuities." *Insurance Mathematics and Economics* **9**, 185-196. [https://doi.org/10.1016/0167-6687\(90\)90033-A](https://doi.org/10.1016/0167-6687(90)90033-A)

Biffis, Enrico, and Michel Denuit. 2011. "Lee-Carter Goes Risk-Neutral." *SSRN Electronic Journal*. <https://doi.org/10.2139/ssrn.848304>.

Boyle, Phelim P. 1976. "Rates of Return as Random Variables." *The Journal of Risk and Insurance* **43**, 693-713. <https://doi.org/10.2307/252033>

Denuit, Michel. 2008. "Comonotonic Approximations to Quantiles of Life Annuity Conditional Expected Present Value." *Insurance: Mathematics and Economics* **42**, 831-838. <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2007.09.00>

Dowd, Kevin, David Blake, and Andrew J.G. Cairns. 2011. "A Computationally Efficient Algorithm for Estimating the Distribution of Future Annuity Values Under Interest-Rate and Longevity Risks." *North American Actuarial Journal* **15**, 237-247. <https://doi.org/10.1080/10920277.2011.10597619>

Dufresne, Daniel. 2007. "Stochastic Life Annuities." *North American Actuarial Journal* **11**, 136-157. <https://doi.org/10.1080/10920277.2007.10597441>

Hoedemakers, Tom, Grzegorz Darkiewicz, and Marc Goovaerts. 2005. "Approximations for Life Annuity Contracts in a Stochastic Financial Environment." *Insurance: Mathematics and Economics* **37**, 239-269. <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2005.02.003>

Lee, Ronald D., and Lawrence R. Carter. 1992. "Modeling

and Forecasting U.S. Mortality." *Journal of the American Statistical Association* **87**, 659-675.

<https://doi.org/10.1080/01621459.1992.10475265>

Liu, Xiaoming. 2013. "Annuity Uncertainty with Stochastic Mortality and Interest Rates." *North American Actuarial Journal* **17**, 136-152. <https://doi.org/10.1080/10920277.2013.795481>

Pollard, J. H. 1971. "On Fluctuating Interest Rates." *Bulletin De l'Association Royale Des Actuaries Gelges* **66**, 68-94. <https://doi.org/10.2307/1426648>

Rabitti, Giovanni, and Emanuele Borgonovo. 2020. "Is Mortality or Interest Rate the Most Important Risk in Annuity Models? A Comparison of Sensitivity Analysis Methods." *Insurance: Mathematics and Economics* **95**, 48-58. <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2020.09.001>

Richards, S. J., and I. D. Currie. 2009. "Longevity Risk and Annuity Pricing with the Lee-Carter Model." *British Actuarial Journal* **15**, 317-365. <https://doi.org/10.1017/s1357321700005675>

Vasicek, Oldrich. 1977. "An Equilibrium Characterization of the Term Structure." *Journal of Financial Economics* **5**, 177-188. [https://doi.org/10.1016/0304-405X\(77\)90016-2](https://doi.org/10.1016/0304-405X(77)90016-2)

Wang, Nan, Russell Gerrard, and Steven Haberman. 2004. "The Premium and the Risk of a Life Policy in the Presence of Interest Rate Fluctuations." *Insurance: Mathematics and Economics* **35**, 537-551. <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2004.07.004>

İnternet kaynakları

- 1- <https://data.oecd.org/healthstat/life-expectancy-at-65.htm#indicator-chart>. (12.02.2024)
- 2- <https://biruni.tuik.gov.tr/medas/?locale=tr> (11.12.2023)
- 3- <https://www.mortality.org> (11.12.2023)
- 4- <https://finance.yahoo.com/> (10.02.2024)