Aktüerya Derneği

İstatistikçiler Dergisi: İstatistik & Aktüerya

Journal of Statisticians: Statistics and Actuarial Sciences

IDIA 16, 2023, 2, 39-56

Geliş/Received:05.10.2023, **Kabul**/Accepted: 04.12.2023

Araştırma Makalesi / Research Article

Katkısı belirli emeklilik planlarında kayıp tutumuna göre optimal yatırım stratejisinin belirlenmesi

Murat Kırkağaç*
Kütahya Dumlupınar Üniversitesi, Kütahya Uygulamalı Bilimler Fakültesi, Sigortacılık ve Risk Yönetimi Bölümü
43100-Merkez, Kütahya, Türkiye
murat.kirkagac@dpu.edu.tr
ORCID:0000-0002-2703-8768

Yasemin Saykan
Hacettepe Üniversitesi, Fen Fakültesi, Aktüerya Bilimleri Bölümü
06800-Beytepe, Ankara, Türkiye
yasemins@hacettepe.edu.tr
ORCID:0000-0002-8916-8509

Öz

Dünyada olduğu gibi ülkemizde de son yıllarda faydası belirli emeklilik planlarından katkısı belirli emeklilik planlarına geçiş oldukça yaygınlaşmıştır. Katkısı belirli emeklilik planlarında yatırım riski katılımcı üzerinde olduğu için optimal yatırım stratejisinin belirlenmesi oldukça önemlidir. Katkısı belirli emeklilik planlarında optimal yatırım stratejisinin belirlendiği çalışmalarda genellikle, klasik bir yaklaşım olan beklenen faydanın maksimizasyonu kullanılmıştır. Fakat beklenen faydanın maksimizasyonu gerçek dünyayı, özellikle birey kayıptan kaçınan bir birey olduğunda iyi yansıtmamaktadır. Bununla birlikte, yatırımcıların çoğu da aslında kayıptan kaçınan bireylerdir. Bu nedenle katkısı belirli emeklilik planlarında optimal yatırım stratejisinin kayıptan kaçınan bireyler için belirlenmesi oldukça önemlidir. Hedeflenen fon ile gerçekleşen fon büyüklüğü arasındaki farkın minimizasyonuna dayanan bir diğer yöntem ise, dönem sonu hedef fon büyüklüğü ve ara dönem fon hedeflerini belirleyerek, hedeflenen fon büyüklüğü ile gerçekleşen fon büyüklüğü arasındaki farkın karesi olarak tanımlanan maliyet fonksiyonlarının iskontolu toplamını minimize edecek şekilde optimal yatırım stratejisinin belirlenmesidir. Bu çalışmada kayıptan kaçınan bireyler için elde edilen sonuçlar, maliyet fonksiyonunun kullanıldığı modelden elde edilen sonuçlar ile karşılaştırmalı olarak elde edilmiştir. Optimal yatırım stratejisi belirlenirken her iki modelde de dinamik programlama yöntemi kullanılmıştır. Her iki modelde elde sonuçlar incelendiğinde ise sonuçların birbirine çok yakın gerçekleştiği görülmüştür. Optimal yatırım stratejisi birikim döneminin başında fonun tamamının riskli yatırım aracında değerlendirilmesi, birikim döneminin ilerleyen yaşlarında fonun riskli yatırım aracında değerlendirilen oranının azaltılarak, risksiz yatırım aracında değerlendirilen oranının artırılması, birikim döneminin sonunda ise fonun büyük bir kısmının risksiz yatırım aracında değerlendirilmesi biçimindedir. Bununla birlikte kayıptan kaçınan bireyin daha uzun bir süre, daha az risk alarak daha tutucu bir yatırım stratejisi izlediği görülmektedir.

Anahtar sözcükler: Katkısı belirli emeklilik planı, Kayıptan kaçınma, Maliyet fonksiyonu, Optimal yatırım stratejisi, Dinamik programlama.

* Bu çalışma, birinci yazarın, ikinci yazarın danışmanlığında hazırladığı doktora tezinden üretilmiştir.

Abstract

Determining the optimal investment strategy according to the loss attitude in defined contribution pension plans

In recent years, as in the rest of the world, the transition from defined benefit pension plans to defined contribution pension plans has become quite common in our country as well. Because the investment risk is on the participant, it is very important to determine the optimal investment strategy in defined contribution pension plans. Studies that determine the optimal investment strategy in defined contribution pension plans generally use the classical approach of maximizing expected utility. However, maximizing expected utility does not reflect the real world well, especially when the individual is loss-averse. Besides, most investors are actually loss-averse. Therefore, it is crucial to determine the optimal investment strategy for loss-averse individuals in defined contribution pension plans. Another method based on minimizing the difference between the target fund and the actual fund size is to determine the optimal investment strategy by minimizing the discounted sum of cost functions defined as the square of the difference between the target fund size and the actual fund size, by specifying end-of-period target fund size and interim fund targets. In this study, the results obtained for loss-averse individuals are compared with the results obtained from the model using the cost function. Dynamic programming methods are used in both models to determine the optimal investment strategy. When the results obtained in both models were examined, it was observed that the results were very close to each other. The optimal investment strategy is to use the entire fund in a risky investment asset at the beginning of the accumulation period, to decrease the ratio of the fund used in the risk-free investment asset in the later years of the accumulation period, to increase the ratio used in the risk-free investment asset, and to use a large part of the fund in the risk-free investment asset at the end of the accumulation period. Furthermore, it is observed that a loss-averse individual follows a more conservative investment strategy over a longer period, taking less risk.

Keywords: *Dynamic programming, Defined contribution pension plan, Loss aversion, Cost function, Optimal investment strategy.,*

1. Giriş

Emeklilik planı, katılımcıların aktif çalışma süreleri boyunca yaptıkları katkıları uzun vadeli yatırıma yönlendirerek, emeklilik dönemlerinde çalışma dönemindeki tüketim seviyesini devam ettirebilmelerini sağlayabilecekleri bir gelir elde etmelerini sağlamayı ve bu sayede emeklilik döneminde başkalarına muhtaç olmalarını engellemeyi amaçlayan, plan katılımcılarının sahip olduğu hakları ve sorumluluklarını düzenleyen sözleşmelerdir [1].

Emeklilik planlarının dünyada en yaygın olarak kullanılan iki türü, faydası belirli emeklilik planları ve katkısı belirli emeklilik planlarıdır.

Faydası belirli emeklilik planları, katılımcının emeklilik döneminde hak kazanacağı gelirinin tam değerinin önceden belirlenememesine rağmen, çeşitli yöntemlerle hesaplanabildiği planlardır. Çoğunlukla kamu sektöründe rastlanılan bu planlarda, katılımcının yapacağı katkı oranı önceden planlanmaktadır [2].

Son yıllarda faydası belirli emeklilik planlarından katkısı belirli emeklilik planlarına geçiş oldukça yaygınlaşmış ve katkısı belirli emeklilik planları sosyal güvenlik sisteminde önemli bir rol oynamaya başlamıştır. Literatür incelendiğinde de katkısı belirli emeklilik planları üzerine çalışmaların son yıllarda oldukça arttığı görülmektedir.

Katkısı belirli emeklilik planları, katılımcı tarafından yapılacak katkı oranının daha önceden belirli olduğu emeklilik planlarıdır. Emeklilik döneminde katılımcı tarafından biriktirilen fon miktarı, birikim döneminde yapılan katkıların, katkı yapacağı sürenin yani emeklilik yaşının ve yatırım getirisinin bir fonksiyonudur [2]. Katkısı belirli emeklilik planlarında, katkıların yapıldığı birikim dönemi ve yapılan katkılar sonucu oluşan fonun emeklilik geliri olarak alındığı dağıtım dönemi olmak üzere iki dönem vardır. Faydası belirli emeklilik planlarında yatırım riski plan sponsoru tarafından üzerine alınırken, katkısı belirli emeklilik planlarında ise bu risk katılımcının üzerindedir. Dolayısıyla optimal yatırım stratejisinin belirlenmesi katılımcı için oldukça önemlidir.

Literatürde katkısı belirli emeklilik planlarında optimal yatırım stratejisine ilişkin çalışmalar incelendiğinde, bu çalışmaların çok eski yıllara dayandığı görülmektedir. Bu konuda yapılan ilk çalışmalar Samuelson [3] ve Merton'a [4], [5] ait olup, katkısı belirli emeklilik planlarında optimal yatırım stratejisinin belirlenmesine ilişkin çalışmalar günümüzde hala yapılmaktadır.

Bodie, Merton ve Samuelson [6], Cairns [7], Owadally [8] 2000'li yıllara kadar optimal yatırım stratejisi üzerine yapılan bazı diğer çalışmalardır.

Katkısı belirli emeklilik planlarında optimal yatırım stratejisi üzerine yapılan çalışmaların 2000'li yılların başında oldukça arttığı görülmektedir. Bu çalışmaların başlıcaları şunlardır: Vigna ve Haberman [9], Blake, Cairns ve Dowd [10], Haberman ve Vigna [11], Gerrard, Haberman ve Vigna [12], Cairns, Blake ve Dowd [13], Battocchio, Menoncin ve Scaillet [14], Yang ve Huang [15], Blake, Wright ve Zhang [16], Chen, Haberman ve Thomas [17].

Katkısı belirli emeklilik planlarında optimal yatırım stratejisinin belirlendiği çalışmalarda genellikle, klasik bir yaklaşım olan beklenen faydanın maksimizasyonu kullanılmıştır. Fakat Rabin ve Thailer [18] beklenen fayda kriterinin çoğu risk davranışı için uygun olmadığını belirtmişlerdir. Beklenen faydanın maksimizasyonu gerçek dünyayı, özellikle birey kayıptan kaçınan bir birey olduğunda iyi yansıtmamaktadır. Bununla birlikte yatırımcıların çoğu aslında kayıptan kaçınan bireylerdir. Bu nedenle kayıptan kaçınan bireyler için optimal yatırım stratejisinin belirlenmesi oldukça önemlidir.

Kayıptan kaçınma toplam varlığın kesin değerindeki değişimden ziyade, önceden tanımlanmış bir referans noktası veya gelire göre varlıktaki kayıp veya kazanç ile tanımlanır. Kayıptan kaçınma kavramı ilk olarak Kahneman ve Tversky [19] tarafından davranışsal finansın temel taşı olan "beklenti teorisinin" içinde tanımlanmıştır. Beklenti teorisi temel olarak bireyin davranışlarını belirleyen motivasyonun, bu davranış sonucundaki beklentiler olduğunu iddia eden teoridir. Bu teoriye göre kayıplar kazançlara göre yatırımcıları duygusal olarak daha fazla etkilemektedir, bir başka deyişle kayıp yatırımcıların gözünde kazanca göre daha önemlidir.

Katkısı belirli emeklilik planlarında kayıptan kaçınan bireyler için optimal yatırım stratejisinin belirlendiği başlıca çalışmalar, Berkelaar, Kouwenberg ve Post [20], Gomes [21], Blake, Wright ve Zhang [22]'e ait çalışmalardır. Berkelaar, Kouwenberg ve Post [20] ve Gomes [21] optimal yatırım stratejisini sürekli zamanda elde ederken, Blake, Wright ve Zhang [22] kesikli zamanda elde etmiştir. Bu çalışmalarda beklenen faydanın maksimize edilmesi yerine kayıptan kaçınan bireyler için hedeflenen fon ile gerçekleşen fon büyüklüğü arasındaki farkın minimize edilmesine olanak sağlayan beklenti teorisi kullanılmıştır. Hedeflenen fon ile gerçekleşen fon büyüklüğü arasındaki farkın minimizasyonu aslında literatürde yeni bir fikir değildir. Vigna ve Haberman [9] ve Haberman ve Vigna [11] dönem sonu hedef fon büyüklüğü ve ara dönem fon hedeflerini belirleyerek, hedeflenen fon büyüklüğü ile gerçekleşen fon büyüklüğü arasındaki farkın karesi olarak tanımlanan maliyet fonksiyonlarının iskontolu toplamını minimize edecek şekilde optimal yatırım stratejisini belirlemişlerdir. Ancak bu çalışmada negatif sapmaların yanı sıra hedeften pozitif sapmalar da aynı oranda cezalandırılmaktadır. Hedeflenen fon büyüklüğünden pozitif sapma istenilen bir durum olduğu için bu çalışmada; Blake, Wright ve Zhang [22]'de olduğu gibi sadece negatif sapmalar cezalandırılacak şekilde optimal strateji belirlenmiş, elde edilen sonuçlar maliyet fonksiyonunun kullanıldığı sonuçlar ile karşılaştırmalı olarak verilmiştir. Blake, Wright ve Zhang [22] bireyin kayıptan kaçınan bir birey olduğu düşüncesiyle, yatırımın ve gelirin stokastik olduğu durumda sadece birikim dönemini dikkate alarak optimal yatırım stratejisini belirlemişlerdir. Optimal yatırım stratejisi belirlenirken zamanın kesikli olduğu varsayılmış ve stokastik model kullanılmıştır.

Bu çalışmada yer alacak diğer bölümler şu şekilde oluşturulmuştur: İkinci bölümde maliyet fonksiyonunun kullanıldığı model tanıtılmış ve optimizasyon probleminin çözümü elde edilmiştir. Üçüncü bölümde kullanılacak stokastik model tanıtılmış, model varsayımları ve kullanılan parametre değerleri verilmiş, kurulan iki model için optimizasyon problemlerinin çözümü elde edilmiştir. Dördüncü bölümde optimal yatırım stratejisi kurulan her iki model için elde edilmiş, sonuçlar karşılaştırmalı olarak verilmiştir. Beşinci ve son bölümde ise elde edilen sonuçlar özetlendikten sonra tartışma ve öneriler ile çalışma sonlandırılmıştır.

2. Maliyet Fonksiyonunun Kullanıldığı Model

$\hat{r}$ finansal danışman tarafından yapılan getiri tahminini, $\ddot{s}_{\overline{T}|}$ bu tahmin ile hesaplanan her dönem başında yapılan bir birimlik ödemenin *T* dönem sonundaki birikimli değerini, *f(T)* dönem sonunda hedeflenen fon büyüklüğünü göstermek üzere, katılımcı tarafından her dönem başında yapılacak sabit katkı miktarı *(C),*

$$C = \frac{f(T)}{\ddot{s}_{\overline{T}|\hat{r}}} \tag{2.1}$$

biçiminde hesaplanır. Fonun *t+1* anındaki değeri özyineli olarak,

$$F_{t+1} = (F_t + C)[(1-y_t)e^{\mu_t} + y_t e^{\lambda_t}] \tag{2.2}$$

eşitliğinden hesaplanır. Eşitlik 2.2'de:

F_{t+1} : Fonun *t+1* anındaki değerini,
F_t : Fonun *t* anındaki değerini,
C : Sabit katkı miktarını,
y_t : Fonun yüksek riskli yatırım aracında değerlendirilen oranını,
$(1-y_t)$: Fonun düşük riskli yatırım aracında değerlendirilen oranını,
μ_t : $[t,t+1]$ zaman aralığında sabit olan, düşük riskli yatırım aracı için anlık faiz oranını,
λ_t : $[t,t+1]$ zaman aralığında sabit olan, yüksek riskli yatırım aracı için anlık faiz oranını,

göstermektedir. Sabit katkılı bireysel emeklilik planlarında fonun %50'si düşük riskli, %50'si yüksek riskli yatırım araçlarında değerlendirildiği varsayıldığında Eşitlik 2.2,

$$F_{t+1} = (F_t + C)\left[\frac{e^{\mu_t} + e^{\lambda_t}}{2}\right] \tag{2.3}$$

biçiminde ifade edilebilir. Yatırım getirisinin tahmin edilenden farklı olması, vade sonunda gerçekleşen fon büyüklüğünün hedeflenen fon büyüklüğünden farklı olmasına yani vade sonunda açığın oluşmasına neden olur. Bu açık miktarı, hedeflenen fon büyüklüğü ile gerçekleşen fon büyüklüğü arasındaki farka eşittir:

$$D_T = f(T) - F_T \tag{2.4}$$

Katılımcı için risk, bu açığın yüksek olmasıdır. Bu açığın negatif olması ise fazlalık olarak adlandırılır. Fonda açık da fazlalık da istenmeyen durumlardır [23].

2.1. Optimal yatırım stratejisi

Bireysel emeklilik planlarında hedef fon büyüklüğüne ulaşmanın diğer bir yolu sabit katkılardan oluşan fonun optimal yatırım stratejisi ile değerlendirilmesidir.

Optimal yatırım stratejisi belirlenirken, yatırım getirisinin zamanla değişmesinden kaynaklanan dinamik yapısı nedeniyle Dinamik Programlama (DP) yöntemi kullanılmıştır. DP yöntemi, Richard Ernest Bellman tarafından 1950 yılında isimlendirilmiştir. Başlangıçta yalnızca bir ekonomik sistemin zaman içindeki durumunun incelenmesinde kullanılan bu yöntem, günümüzde zamanla ilgili olan süreçlerin yanı sıra, farklı nitelikteki süreçlerin incelenmesinde de yaygın olarak kullanılmaktadır [24].

Bellman'ın Optimalite İlkesi: " Başlangıç koşulu ve başlangıç kararı ne olursa olsun geri kalan kararlar verilen ilk kararın sonucuna göre optimal bir politika oluşturmalıdırlar [25]" biçiminde tanımlanmaktadır.

DP problemlerinin çözümü, uygun bir matematiksel modelin kurulması ile başlanmaktadır. Bu bölümde, Vigna ve Haberman [18] tarafından oluşturulan Eşitlik 2.2'de verilen model kullanılmıştır.

Optimal yatırım stratejisi belirlenirken, dönem sonu fon büyüklüğü hedefinin yanı sıra ara dönem hedeflerinin de belirlenmesi gerekmektedir. t=1 anındaki hedef fon, t=0 anında Eşitlik 2.1'den hesaplanan sabit katkı miktarı C'nin bir dönem ileri çekilmesi ile bulunur:

$$f(1) = Ce^{i_A} \tag{2.5}$$

Diğer ara dönemlerde hedef fon büyüklüklerini bulmak için, hedef fon büyüklüğünün f(1)'den f(T)'ye doğrusal olarak arttığı varsayılmıştır.

Ara dönemlerde hedeflenen fon büyüklüğü ile gerçekleşen fon büyüklüğü arasındaki fark için maliyet fonksiyonu:

$$M(t)= \theta_1 D_t^2=\theta_1(F_t - f_t)^2 \tag{2.6}$$

ve dönem sonu için maliyet fonksiyonu:

$$M(T)=\theta_0 D_T^2=(F_T - f_T)^2 \tag{2.7}$$

biçiminde tanımlanmıştır. Eşitlik 2.6 ve Eşitlik 2.7'de θ_0 ve θ_1 sabit birer katsayı olup, vade sonunda hedef fon büyüklüğüne ulaşılması ara dönem hedeflerine ulaşılmasından daha önemli olduğundan dolayı: θ_0, θ_1'den daha büyük seçilir.

Vade sonuna kadar her dönem oluşacak maliyetlerin t anındaki değeri:

$$G_t = \sum_{s=t}^{T} \gamma^{s-t} M(s) \tag{2.8}$$

biçiminde olup, bu eşitlikte verilen γ iskonto faktörüdür. Optimizasyonda hedeflenen fon büyüklüğü ile gerçekleşen fon büyüklüğü arasındaki farkın minimize edilmesi amaçlandığından Gt fonksiyonu minimize edilmiştir. Yapılan optimizasyon sonucunda optimal yatırım oranı:

$$y_t^* = -\frac{M_t}{2L_t} \tag{2.9}$$

olarak elde edilir. Burada:

$$L_t = P_{t+1}(F_t + C)^2 (e^{2\mu+\sigma_1^2} + e^{2\lambda+\sigma_2^2} - 2e^{\mu+\lambda+\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2}}) \tag{2.10}$$

$$M_t = P_{t+1}(F_t + C)^2(-2e^{2\mu+\sigma_1^2} + 2e^{\mu+\lambda+\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2}}) - 2Q_{t+1}(F_t + C)(-e^{\mu+\frac{\sigma_1^2}{2}} + e^{\lambda+\frac{\sigma_2^2}{2}}) \tag{2.11}$$

biçimindedir. L_t ve M_t içinde bulunan P_t ifadesi, $P_T=\theta$ son değerinden başlanarak;

$$P_t = 1 + P_{t+1} * [\frac{e^{2\mu+2\lambda+\sigma_1^2+\sigma_2^2}(e^{\sigma_1^2+\sigma_2^2} - 1)}{e^{2\mu+\sigma_1^2} + e^{2\lambda+\sigma_2^2} - 2e^{\mu+\lambda+\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2}}}] \tag{2.12}$$

formülü ile öz yineli olarak, Q_t ifadesi, $Q_T= \theta f(T)$ son değerinden başlanarak;

$$Q_t = f(T) - [v * C * \frac{e^{2\mu+2\lambda+\sigma_1^2+\sigma_2^2}(e^{\sigma_1^2+\sigma_2^2}-1)}{e^{2\mu+\sigma_1^2}+e^{2\lambda+\sigma_2^2}-2e^{\mu+\lambda+\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2}}} * P_{t+1}] - [v * \frac{e^{\mu+\lambda+\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2}}(e^{\mu+0,5\sigma_1^2}+e^{\lambda+0,5\sigma_2^2}-e^{\mu+1,5\sigma_1^2}-e^{\lambda+1,5\sigma_1^2})}{e^{2\mu+\sigma_1^2}+e^{2\lambda+\sigma_2^2}-2e^{\mu+\lambda+\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2}}} * Q_{t+1}] \quad (2.13)$$

formülü ile özyineli olarak elde edilir [9].

3. Kayıptan Kaçınan Bireyler İçin Kullanılan Model

Çalışmanın bu bölümünde kayıptan kaçınan bireyler için kullanılan stokastik model tanıtılacaktır. Kullanılan modeller belirlenirken Blake, Wright ve Zhang [22] temel alınmıştır. Kullanılan modellerin varsayımları

- Fonun biri yüksek riskli diğeri risksiz olmak üzere 2 yatırım aracında değerlendirildiği,
- Katkıların yıllık olarak her yılın başında yapıldığı,
- Değerlendirmenin yıllık bazda yapıldığı ve zamanın kesikli olduğu,
- Tüm bireylerin sisteme 20 yaşında girdiği ve 65 yaşında emekli olduğu,
- Dönem sonu hedeflenen fon büyüklüğünün "2/3 yerine koyma modeli" dikkate alınarak belirlendiği

biçimindedir. Bu bölümde finansal araçların getirileri ve gelire ilişkin eşitliklere değinildikten sonra hedef fon büyüklükleri ve amaç fonksiyonu belirlenecektir.

3.1. Finansal Araçlar

Yatırımın tahvil gibi biri risksiz, hisse senedi gibi biri yüksek riskli olmak üzere iki yatırım aracında değerlendirileceği varsayılsın.

r, risksiz yatırım aracının yıllık getirisini göstermek üzere,

x ile $x+1$ yaşları arasında yüksek riskli yatırım aracının yıllık getirisi R_x:

$$R_x = r + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) + \sigma Z_x \quad (3.1)$$

biçimindedir. Burada μ yüksek riskli yatırım aracının yıllık risk primini, σ standart sapmasını göstermekte olup $\{Z_x\}$ Standart Normal dağılıma sahip bağımsız raslantı değişkenleridir.

3.2. Gelir

Bu çalışmada gelir için Cairns, Blake ve Dowd [13] tarafından oluşturulan model stokastik şok bileşenleri olmadan kullanılmıştır. l_x gelirdeki büyüme oranını göstermekte olup:

$$l_x = \eta + \frac{S_x - S_{x-1}}{S_{x-1}} \quad (3.2)$$

biçimindedir. Burada η ulusal kazancın ortalama yıllık büyüme oranını, Sx, x yaşındaki genel maaş profilini göstermekte olup:

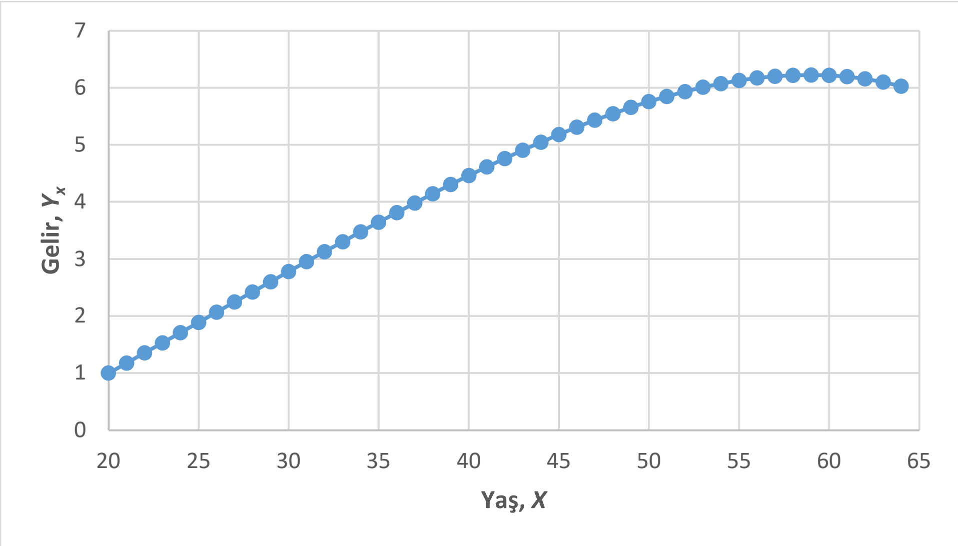
$$S_x = 1 + h_1\left[-1 + \frac{(x-20)}{45}\right] + h_2\left[-1 + \frac{4(x-20)}{45} - \left\{\frac{\sqrt{3}(x-20)}{45}\right\}^2\right]; x = 20,21,\ldots,65 \quad (3.3)$$

biçimindedir. Bu eşitlikte h_1=-0,1865, h_2=0,7537 olarak alınmıştır. Bu parametre tahminleri Cairns, Blake ve Dowd [13] tarafından, İngiltere'de erkeklere ilişkin 2005 yılına ait veriden, en küçük kareler yöntemi kullanılarak elde edilen değerlerdir.

Dolayısıyla, bireyin x yaşında beklenen geliri $Y_{20}=1$ değerinden başlayarak iterasyon yoluyla:

$$Yx = Y_{x-1}exp(lx) \; ; \quad x = 21,22,\ldots,65 \tag{3.4}$$

biçiminde elde edilir. İşe başlama yaşı olan 20 yaştan, emeklilik yaşı olan 65 yaşa kadar beklenen gelirdeki değişim Şekil 3.1'de gösterilmektedir:



Şekil 3.1: Beklenen gelirin yaşa bağlı değişimi

Şekil 3.1'den beklenen gelirin birikim döneminin başı olan 20 yaştan itibaren doğrusal bir biçimde arttığı, emekliliğe yaklaştığında ise artış hızının azaldığı görülmekte olup, bu durum katılımcıların genel maaş profiline uygundur.

3.3. Emeklilik Fonunun Birikimi ve Hedefler

Bu bölümde birikim dönemindeki herhangi bir zamanda gerçekleşen ve hedeflenen fon büyüklüklerinin nasıl elde edildiği verilmiştir. θ_{x-1} $x-1$ yaşında fonun yüksek riskli yatırım aracında değerlendirilen oranını göstermek üzere x yaşında fonun getirisi

$$Fon\ Getirisi = exp[\theta_{x-1}R_x + (1-\theta_{x-1})r]$$

$$= exp\left[\theta_{x-1}r + \theta_{x-1}\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) + \theta_{x-1}\sigma Z_x + r - \theta_{x-1}r\right]$$

$$= exp\left[r + \theta_{x-1}\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) + \sigma Z_x\right)\right] \tag{3.5}$$

biçimindedir. Y_x, $x-1$ yaşındaki geliri, π sabit katkı oranını göstermek üzere, fonun x yaşında gerçekleşen değeri olan F_x, $F_{20}=0$ değerinden itibaren birikimli olarak

$$F_x = (F_{x-1} + \pi_x Y_{x-1})\exp\left[r + \theta_{x-1}\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) + \sigma Z_x\right)\right]; x = 21,22,\ldots,65 \tag{3.6}$$

biçiminde elde edilir. Gerçekleşen fon büyüklüğünün yanı sıra, hedeflenen fon büyüklüğünün de belirlenmesi gerekmektedir. Dönem sonu hedeflenen fon büyüklüğü "2/3 yerine koyma modeli" kullanıldığında,

$$f(65) = \frac{2}{3} * Y_{65} * \ddot{a}_{65} \quad (3.7)$$

biçiminde elde edilir. Ara dönem hedeflenen fon büyüklükleri dönem sonu hedeflenen fon büyüklüğü *f(65)* değeri kullanılarak geriye doğru:

$$f(x) = \frac{f(x+1)}{\exp(r^*)} - \pi * Y_x;\ x = 64,63,\dots 20 \quad (3.8)$$

biçiminde elde edilir. Burada r^* ara dönem fon hedefleri belirlenirken kullanılan iskonto oranını göstermekte olup, risksiz yatırım aracının getirisine bağlı olarak $r^* = r + 0{,}011$ biçiminde alınmıştır [22].

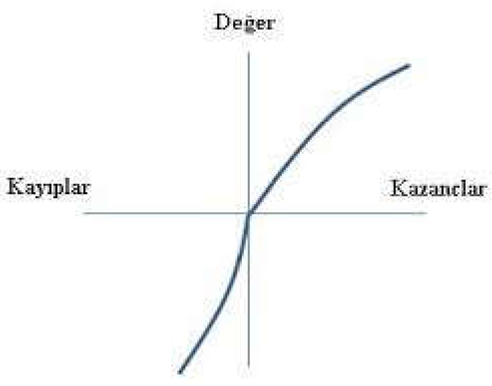
3.4. Amaç Fonksiyonunun Belirlenmesi

Beklenti teorisi kullanıldığında işe giriş yaşından emekliliğe kadar her yaş için fayda fonksiyonu:

$$U_x(F_x) = \frac{(F_x - f(x))^{v_1}}{v_1};\ F_x \geq f(x)$$

$$= -\lambda \frac{(f(x) - F_x)^{v_2}}{v_2};\ F_x < f(x) \quad (3.9)$$

biçimindedir. Burada F_x gerçekleşen fon büyüklüğünü, *f(x)* hedeflenen fon büyüklüğünü, v_1 kazanç için eğim parametresini, v_2 kayıp için eğim parametresini, λ kayıptan kaçınma oranını göstermektedir. λ kayıptan kaçınma oranı bireyin kayba karşı kazanca olduğundan kaç kat daha duyarlı olduğunu göstermekte olup $\lambda>1$ olarak alınır. v_1 ve v_2 eğim parametreleri ise (0,1) aralığında değerler almaktadır. v_1 ve v_2'nin bu aralıkta değer alması bireyin fonda kayıp olması durumunda risk arayışında olduğunu, fonda kazanç olması durumunda da riskten kaçındığını göstermektedir. Bu durum, standart fayda fonksiyonlarındaki içbükey şeklin aksine fayda fonksiyonunun kayıp durumunda içbükey, kazanç durumunda dışbükey olarak s şeklinde olmasına yol açmaktadır [26]. $\lambda>1$, $0< v_1<1$ ve $0< v_2<1$ durumlarında beklenti teorisi fayda fonksiyonunu genel şekli Şekil 3.2'deki gibidir:



Şekil 3.2: Beklenti teorisi fayda fonksiyonu

Katılımcı açısından dönem sonu fon hedefine ulaşmak, ara dönem fon hedeflerine ulaşmaktan daha önemli olduğu için, ara dönem fon hedeflerine *w<1* olacak şekilde daha düşük bir ağırlık verilir. Dolayısıyla *x* yaşından emekliliğe kadar iskonto edilmiş fayda fonksiyonu toplamı

$$V_x = \left[\sum_{s=0}^{65-x-1} \beta^s w U_{x+s}(F_{x+s})\right] + \beta^{65-x} U_{65}(F_{65}) = wU_x(F_x) + \beta V_{x+1} \quad (3.10)$$

biçiminde belirlenir. Burada β iskonto faktörüdür.

3.5. Optimizasyon

Fonun yüksek riskli yatırım aracında değerlendirilen optimal yatırım oranı θ_x bu toplamın beklenen değeri maksimize edilerek belirlenir. Optimizasyon problemi

$$\max_{\theta_x} E_x(V_x) = \max_{\theta_x} E_x[\{\sum_{s=0}^{65-x-1} \beta^s w U_{x+s}(F_{x+s})\} + \beta^{65-x} U_{65}(F_{65})] \tag{3.11}$$

biçimindedir. Bu optimizasyon problemine ilişkin kısıtlayıcı koşullar:

- $F_x = (F_{x-1} + \pi \quad Y_{x-1}) \exp\left[r + \theta_{x-1}\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) + \sigma Z_x\right)\right] \geq 0; x = 21,22,\dots,65$
- *Yx=Yx-1exp(lx)*
- $0 \leq \theta_x \leq 1$ (3.12)

biçimindedir.

3.6. Optimal Yatırım Stratejisinin Elde Edilmesi

Verilen optimizasyon probleminin çözümü için Eş. 3.11'de verilen $E_x(V_x)$ beklenen değerini maksimize eden θ_x'lerin birikim döneminin başlangıcı olan 20 yaştan, birikim döneminin sonu olan 64 yaşa kadar her bir yaş için elde edilmesi gerekmektedir. Bu optimizasyon probleminin çözümünde, optimal yatırım stratejisinin her bir yaşta ayrı ayrı belirlenmesi ve problemin özyineli olarak birbirleriyle bağlantılı alt problemlere ayrışan yapısı nedeniyle dinamik programlama yöntemi kullanılmıştır.

Dinamik Programlama yönteminde problemler çözülürken ileriye ve geriye doğru yineleme yöntemleri kullanılabilir. Geriye doğru yineleme yöntemi ile öncelikle $E_{64}(V_{64})$ beklenen değerini maksimize eden θ_{64} değeri, sonra özyineli olarak 20 yaşa kadar θ_x değerleri elde edilmiştir. $x=64$ yaş için:

$$\max_{\theta_{64}} E_{64}(V_{64}) = \max_{\theta_{64}} E_{64}[\{\sum_{s=0}^{0} \beta^s w U_{64+s}(F_{64+s})\} + \beta U_{65}(F_{65})]$$

$$\max_{\theta_{64}} E_{64}(V_{64}) = \max_{\theta_{64}} E_{64}[w U_{64}(F_{64}) + \beta U_{65}(F_{65})] \tag{3.13}$$

biçiminde yazılır. Burada fayda fonksiyonları:

$$U_{64}(F_{64}) = \frac{(F_{64} - f(64))^{v_1}}{v_1}; F_{64} \geq f(64)$$

$$= -\lambda \frac{(f(64) - F_{64})^{v_2}}{v_2}; F_{64} < f(64) \tag{3.14}$$

$$U_{65}(F_{65}) = \frac{(F_{65} - f(65))^{v_1}}{v_1}; F_{65} \geq f(65)$$

$$= -\lambda \frac{(f(65) - F_{65})^{v_2}}{v_2}; F_{65} < f(65) \tag{3.15}$$

biçiminde olup, v_1, v_2 ve λ değerleri bilinen kayıptan kaçınma parametreleridir. Fayda fonksiyonunun ve diğer fonksiyonların değerleri elde edilirken kullanılan parametre değerleri Blake, Wright ve Zhang (2013)'de kullanılan değerler olup bu değerler ve Çizelge 3.1'de verilmektedir.

Çizelge 3.1: Parametre değerleri

Kayıptan Kaçınma Parametreleri		**Gelir Parametreleri**	
Kayıptan kaçınma oranı λ	4,50	r_1	0,02
Kazanç için eğim parametresi v_1	0,44	σ_1	0,05
Kayıp için eğim parametresi v_2	0,88	h_1	-0,1865
		h_2	0,7537
Varlık Getirileri		**Diğer Parametreler**	
Risksiz getiri oranı r	0,02	Katkı oranı π	0,15
Riskli yatırım aracının yıllık risk primi μ	0,04	Ara hedefler için ağırlık w	0,5
Riskli yatırım aracının volatilitesi σ	0,18	c	0,13
İskonto faktörü β	0,96	h	0,55
		k	0,29

Dönem sonu hedeflenen fon büyüklüğü değerleri olan *f(65)* değeri, PMA92 (1992 yılı Emekli Erkekler için Mortalite Tablosu) kullanılarak Eş. 3.7'den *f(65)*=62,66, ara dönem hedeflenen fon büyüklüklerinden biri olan *f(64)* değeri ise Eş. 3.8'den *f(64)*=59,84 olarak elde edilir. Bilinmeyen değerler F_{64} *ve* F_{65} değerleridir. Bu değerler Çizelge 3.1'de verilen parametre değerlerinin Eş 3.6'da yerine konulmasıyla;

$$F_{65} = [F_{64} + (0{,}15 * 6{,}0254)]\, exp[0{,}02 + \theta_{64}(0{,}0238 + 0{,}18 * Z_x)]$$

$$F_{64} = [F_{63} + (0{,}15 * 6{,}0983)]\, exp[0{,}02 + \theta_{63}(0{,}0238 + 0{,}18 * Z_x)] \qquad (3.16)$$

olarak elde edilmiştir. Dolayısıyla fayda fonksiyonları da Eş. 3.9'dan

$$U_{64}(F_{64}) = \frac{(F_{64} - 59{,}84)^{0{,}44}}{0{,}44}; F_{64} \geq 59{,}84$$

$$= -4{,}5 * \frac{(59{,}84 - F_{64})^{0{,}88}}{0{,}88}; F_{64} < 59{,}84$$

$$U_{65}(F_{65}) = \frac{\{(F_{64} + 0{,}90)\exp[0{,}02 + \theta_{64}(0{,}0238 + 0{,}18 * Z_x)] - 62{,}66\}^{0{,}44}}{0{,}44}; F_{65} \geq 62{,}66$$

$$= -4{,}5 * \frac{\{62{,}66 - (F_{64} + 0{,}90)\exp[0{,}02 + \theta_{64}(0{,}0238 + 0{,}18 * Z_x)]^{0{,}88}}{0{,}88}; F_{65} < 62{,}66 \qquad (3.17)$$

biçiminde elde edilmiştir. Bu problemin stokastik dinamik programla yöntemi ile çözülebilmesi için beklenen değer ifadesinin kesikli hale getirilmesi gerekmektedir. Bu amaçla 64 yaşında gerçekleşen fon büyüklüğü olan F_{64} değeri olası değer aralığı olan [0,200] arasında 201 parçaya bölünerek her bir değer için sonuçlar elde edilir. F_{64} değeri için [0,200] aralığındaki değerler kullanıldığında $U_{64}(F_{64})$ değeri her bir aralık için sabit bir sayıya eşit olacağından Eş. 3.13 ile verilen fonksiyonda beklenen değer dışına sabit olarak çıkacaktır. Bu durumda beklenen değeri alınması gereken tek ifade $U_{65}(F_{65})$ değeri olur. Yani Eş. 3.13'teki beklenen değer ifadesi sabit sayıların dışarı alınması ile

$$\max_{\theta_{64}} E_{64}[U_{65}(F_{65})]$$

biçiminde sadeleşir. Buradaki beklenen değer

$$E_{64}[U_{65}(F_{65})] = \int_{-\infty}^{\infty} U_{65}(F_{65}) f(z) dz$$

biçimindedir. Bu beklenen değer standart normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonunu içerdiği için açık çözümü yoktur. Bu amaçla integralin yaklaşık değerinin elde edilmesi için Sayısal İntegrasyon yöntemlerden olan, Gauss-Hermite Kareleştirme yöntemi kullanılmıştır.

$U_{65}(F_{65})$ fayda fonksiyonunun açık hali yazıldıktan sonra, işlem kolaylığı için $U_{65}(F_{65})$ fayda fonksiyonundaki sabitler beklenen değer dışına çıkarılır ve beklenen değer içindeki ifade *g(z)* fonksiyonu olarak tanımlanırsa birinci aralık ($F_x \geq f(x)$) için

$$g_1(z) = [(F_{64} + 0{,}90) exp(0{,}02 + 0{,}0238\theta_{64} + 0{,}18\theta_{64} Z_x) - 62{,}66]^{0{,}44} \quad (3.18)$$

ikinci aralık ($F_x < f(x)$) için ise

$$g_2(z) = [62{,}66 - (F_{64} + 0{,}90) exp(0{,}02 + 0{,}0238\theta_{64} + 0{,}18\theta_{64} Z_x)]^{0{,}88} \quad (3.19)$$

biçiminde elde edilir.

Eş 3.18 ve Eş 3.19'un beklenen değeri

$$E_{64}[g_j(z)] = \int_{-\infty}^{\infty} g_j(z) f(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} g_j(z) \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \,; j = 1{,}2$$

biçimindedir. $\frac{z}{\sqrt{2}} = x$ dönüşümü yapılırsa

$$E_{64}[g_j(z)] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\Pi}} \exp(-x^2)\, g_j(\sqrt{2}x) dx; j = 1{,}2$$

biçiminde yazılır. Gauss-Hermite yönteminde $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-x^2) \approx \sum_{i=1}^{n} w_i\, f(x_i)$ olduğundan

$$E_{64}[g_j(z)] \approx \frac{1}{\sqrt{\Pi}} \sum_{i=1}^{n} w_i\, g_j(\sqrt{2}x_i); i = 1{,}2, \dots, n, j = 1{,}2$$

olarak elde edilir. Burada düğüm sayısının *(n)* belirlenmesi gerekmektedir. Düğüm sayısı ne kadar büyük alınırsa sonuca daha fazla yaklaşılmakla birlikte işlem yükü de artmaktadır. Bu nedenle düğüm sayısı 2'den başlanarak 9'a kadar alınıp işlemler tekrarlanmıştır. Düğüm sayısı 7 ve 9 alındığında elde edilen sonuçların birbirine çok yakın olduğu görüldüğünden dolayı düğüm sayısı 7 olarak belirlenmiştir.

Düğüm sayısı $n=7$ için Gauss-Hermite katsayıları ve ağırlıkları:

$x_{1,2} = \pm 2{,}6520$, $x_{3,4} = \pm 1{,}6735$, $x_{5,6} = \pm 0{,}8162$, $x_7 = 0$

$w_{1,2} = 9{,}7178$, $w_{3,4} = 0{,}0545$, $w_{5,6} = 0{,}4256$, $w_7 = 0{,}8103$

olduğundan beklenen değer ifadesi:

$$E_{64}[g_j(z)] \approx \frac{1}{\sqrt{\Pi}} \sum_{i=1}^{7} w_i\, g_j(\sqrt{2}x_i); i = 1{,}2, \dots ,7; j = 1{,}2$$

$$E_{64}\left[g_j(z)\right] \approx \frac{1}{\sqrt{\Pi}}\left[9{,}7178\left(g_j(3{,}75)+g_j(-3{,}75)\right)+0{,}0545\left(g_j(2{,}37)+g_j(-2{,}37)\right)+ 0{,}4256\left(g_j(1{,}15)+g_j(-1{,}15)\right)+0{,}8103g_j(0)\right];j=1{,}2 \quad (3.20)$$

biçimindedir. $g_j(z)$; $j=1,2$ fonksiyonunun değeri Eş 3.18 ve Eş 3.19'dan elde edildikten sonra Eş 3.20'de yerine konulduğunda $E_{64}\left[g_j(z)\right]; j=1{,}2$ sadece F_{64} ve Q_{64}'e bağlı bir fonksiyona dönüşür. Optimizasyon problemindeki amaç Eş 3.20 ile verilen beklenen değeri maksimize eden θ_{64}'ü bulmak olduğu için gerçekleşen fon büyüklüğü F_{64}, olası değer aralığı olan [0,200] arasında 201 parçaya bölünerek her bir değer için sonuçlar elde edilir. F_{64} değeri için [0,200] aralığındaki değerler kullanıldığında $U_{64}(F_{64})$ değeri her bir aralık için sabit bir sayıya eşit olacak $U_{65}(F_{65})$ değeri ise sadece θ_{64}'e bağlı olacaktır. Böylelikle amaç fonksiyonu sadece θ_{64}'e bağlı bir fonksiyon olacağından kolaylıkla maksimize edilebilir.

[0,200] aralığındaki tüm F_{64} değerleri için amaç fonksiyonunu maksimize eden θ_{64} değerleri elde edildikten sonra bu θ_{64} değerleri kullanılarak $E_{63}(V_{63})$ değerini maksimize eden θ_{63} değerleri bulunur. Bu işlem özyineli olarak 20 yaşa kadar devam ederek en son $E_{20}(V_{20})$ değerini maksimize eden θ_{20} değerleri elde edilir.

4. Bulgular

4.1. Maliyet Fonksiyonunun Kullanıldığı Model İçin Optimal Yatırım Stratejisi

Bu uygulamada, 100.000 tekrarlı benzetim çalışması ile sabit ve değişken katkılı bireysel emeklilik planları ile optimal yatırım stratejisinin kullanıldığı bireysel emeklilik planları sonucunda oluşan dönem sonu açık miktarları karşılaştırılarak; hangi planın daha riskli olduğuna, hangi planın getiriye ilişkin yapılan tahmine karşı daha duyarlı olduğuna karar verilecek, hangi planda hedeflenen fon büyüklüğüne daha çok yaklaşıldığı belirlenecektir.

$\hat{r}$ getiri tahminini göstermek üzere, kayıptan kaçınma parametreleri olan μ=0,02, σ_1 =0 ve λ=0,04, σ_2=0,18 değerleri için getiri tahmini yaklaşık

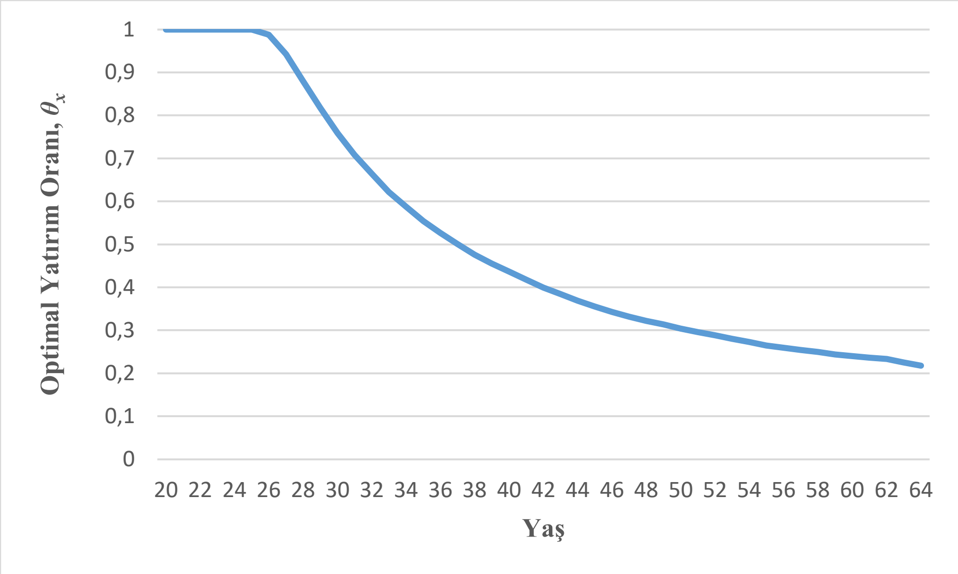
$$\hat{r} = \exp 0{,}5\left(\mu+\lambda+\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{4}\right) = \exp 0{,}5\ (0{,}02+0{,}04+\frac{0+0{,}18^2}{4}) \approx 0{,}03$$

olarak elde edilir. Finansal danışman vadenin başında fonun yıllık ortalama getirisine ilişkin bir tahmin yapmalıdır. Yapılan bu tahminin tam olarak gerçekleşmesi az rastlanan bir durumdur. Gerçekleşecek olan yatırım getirisinin üstünde veya altında bir tahminde bulunulabilir. Gerçekleşecek olan yatırım getirisi ile tahmin edilen yatırım getirisi arasındaki fark "yatırım getirisindeki tahmin hatası" olarak adlandırılmaktadır.

Yatırım getirisindeki tahmin hatasının 0 olduğu, yani yatırım getirisinin doğru tahmin edildiği durumda, yıllar itibariyle oluşan optimal yatırım oranları Çizelge 4.1 ve Şekil 4.1'de yer almaktadır.

Çizelge 4.1: Maliyet Fonksiyonun Kullanıldığı Model İçin Optimal Yatırım Oranları

Yaş	Optimal Yatırım Oranı
20	1
25	0,9998
30	0,7583
35	0,5543
40	0,4367
45	0,3553
50	0,3039
55	0,2649
60	0,2398
64	0,2178

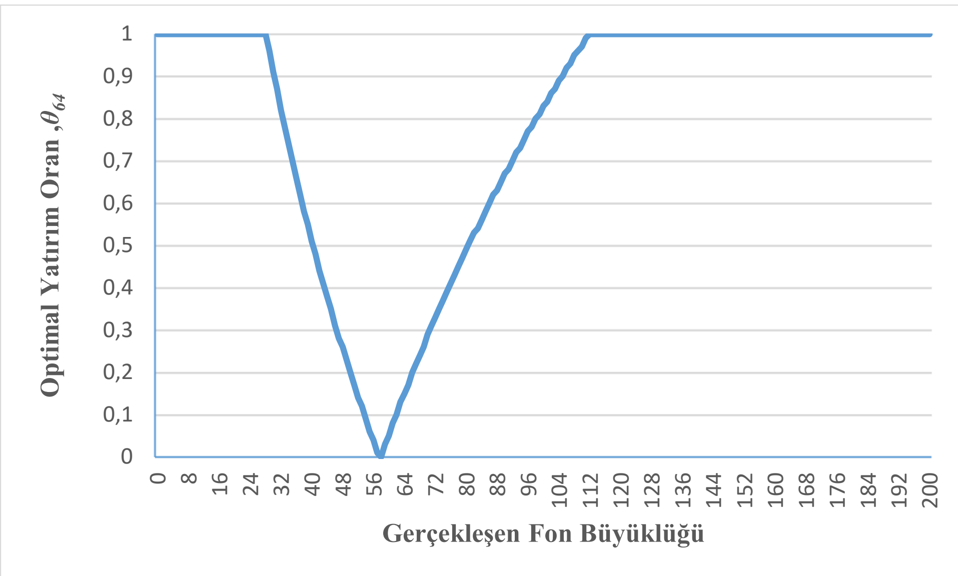


Şekil 4.1: Maliyet Fonksiyonun Kullanıldığı Model İçin Optimal Yatırım Stratejisi

Çizelge 4.1 ve Şekil 4.1'den ulaşılan bir diğer önemli sonuç fonun yüksek riskli yatırım aracında değerlendirilen oranı y_t^*'ın vadenin başında 1 değerini aldığı ve yıllar içinde azalarak vade sonunda yaklaşık 0,2332 değerine düştüğü, dolayısıyla fonun düşük riskli yatırım aracında değerlendirilen oranı $(1-y_t^*)$'ın vade başında 0 değerini aldığı ve yıllar içinde artarak vade sonunda yaklaşık 0,7668 değerine ulaştığıdır. Bu yatırım stratejisi aslında tüm emeklilik planlarında kabul edilmiş ve tavsiye edilen bir yatırım stratejisidir. Bu stratejiye göre birikim döneminin başlarında fonun büyük bir kısmı hisse senedi gibi yüksek riskli ve getirili yatırım araçlarında değerlendirilmeli, vade ilerledikçe fonun yüksek riskli yatırım araçlarında değerlendirilen oranı azaltılarak devlet tahvili gibi düşük riskli ve getirili yatırım araçlarında değerlendirilen oranı artırılmalı ve emeklilik dönemine yaklaşıldığında ise fonun büyük bir kısmı düşük riskli ve getirili yatırım araçlarında değerlendirilmelidir.

4.2. Kayıptan Kaçınan Bireyler İçin Optimal Yatırım Stratejisi

Kayıptan kaçınan bireyler için kullanılan modelde, 64 yaş için amaç fonksiyonunu maksimize eden yatırım oranının gerçekleşen fon büyüklüğüne bağlı değişimi Şekil 4.2'de gösterilmektedir.

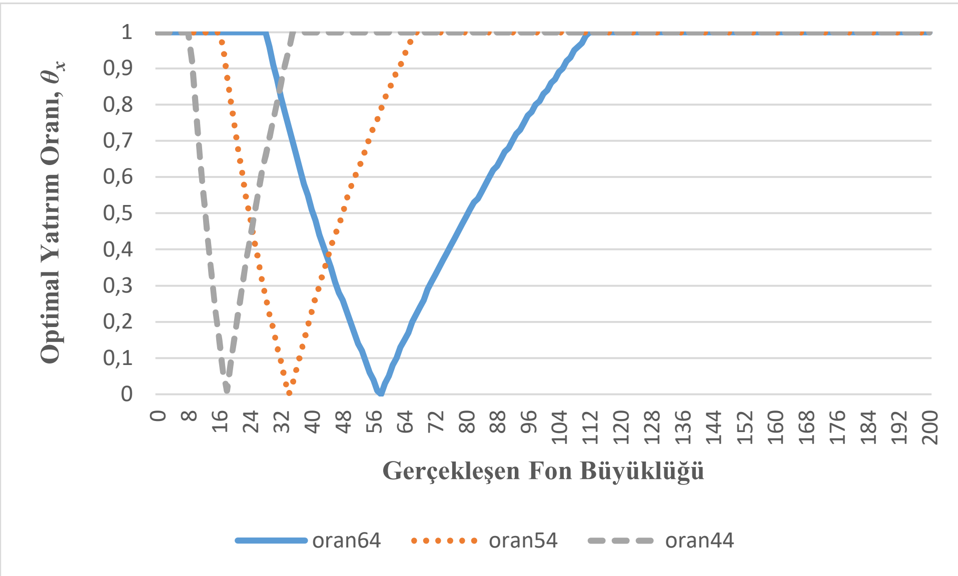


Şekil 4.2: 64 yaş için optimal yatırım oranının gerçekleşen fon büyüklüğüne bağlı değişimi

Şekil 4.2'den 64 yaşında gerçekleşen fon büyüklüğünün, hedeflenen fon büyüklüğü olan *f(64)*=59,84 değerine yakın olması halinde fonun yüksek riskli yatırım aracında değerlendirilen oranının 0'a yakın olduğu; yani bireyin gerçekleşen fon büyüklüğü hedeflenen fon büyüklüğüne yakın iken risk almayarak daha tutucu bir yatırım stratejisi izlediği, fakat gerçekleşen fon büyüklüğü hedeflenen fon büyüklüğünden uzaklaştıkça (bu uzaklaşmanın hem pozitif hem de negatif yönlü olması durumunda) fonun yüksek riskli yatırım aracında değerlendirilen oranının artarak 1'e ulaştığı; yani gerçekleşen fon büyüklüğü hedeflenen fon büyüklüğünden uzaklaştıkça bireyin hedeflenen fon büyüklüğüne ulaşmak için fonun neredeyse tamamını yüksek riskli yatırım aracında değerlendirerek, daha agresif bir yatırım stratejisi izlediği görülmektedir.

Şekil 4.2'den ayrıca hedeflenen fon büyüklüğünden küçük olan gerçekleşen fon büyüklüğü değerlerinde optimal oranın 0'a yaklaşma hızının, hedeflenen fon büyüklüğünden büyük olan gerçekleşen fon büyüklüğü değerlerindeki optimal oranın 1'e yaklaşma hızından daha fazla olduğu görülmektedir. Bu durum kayıptan kaçınma teorisinin de savunduğu gibi kayıpların bireyi kazanca göre daha fazla etkilediği sonucunu doğrulamaktadır. Birey gerçekleşen fon büyüklüğünün hedeflenen fon büyüklüğünden düşük olması durumunda daha agresif bir yatırım stratejisi izlerken, yüksek olması durumunda daha tutucu bir yatırım stratejisi izlemektedir.

Şekil 4.3'te optimal yatırım oranının 44, 54 ve 64 yaşlarındaki değişimi gösterilmektedir.



Şekil 4.3: 44,54 ve 64 yaşları için optimal yatırım oranının değişimi

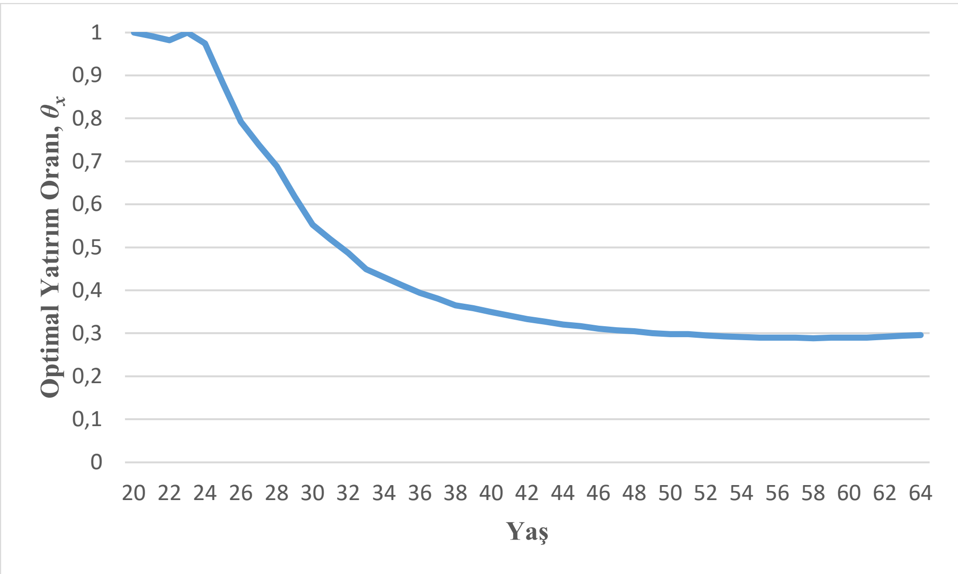
Şekil 4.3'ten 44 ve 55 yaşlarında elde edilen optimal yatırım oranının 64 yaşa benzer bir değişim gösterdiği görülmektedir. Katılımcının tüm yaşlar için hedeflenen fon büyüklüğü gerçekleşen fon büyüklüğüne yaklaştıkça risksiz yatırım aracını tercih ettiği, hedeflenen fon büyüklüğü gerçekleşen fon büyüklüğünden uzaklaştıkça riskli yatırım aracını tercih ettiği, yaş arttıkça fonun düşük riskli yatırım aracında değerlendirilen oranının her iki yöne doğru arttığı aralığın da genişlediği görülmektedir. Şekil 4.3'ten ayrıca yaş ne olursa olsun hedeflenen fon ile gerçekleşen fon büyüklükleri birbirinden uzaklaştıkça fonun tamamının yüksek riskli yatırım araçlarında değerlendirilmesi gerektiği görülmektedir.

Birikim döneminin başlangıcı olan 20 yaştan, birikim döneminin sonu olan 64 yaşa kadar tüm yaşlar için optimal yatırım oranları olan θ_x değerleri, gerçekleşen fon büyüklüğünün aralığı olarak alınan [0,200] aralığındaki her bir fon değerine karşılık gelen 201 değer için elde edilmiştir. Burada her yaş için tek bir optimal yatırım oranının elde edilebilmesi için ise tüm yaşlardaki gerçekleşen fon büyüklüklerinin bilinmesi gerekir. Gerçekleşen fon büyüklüğü belirlenirken riskli yatırım aracının getirisine, yani optimize edilmeye çalışılan θ_x değerlerine ihtiyaç vardır. θ_x değerlerine ilişkin önsel bir bilgi olarak Kırkağaç ve Gençtürk [27]'te elde edilen θ_x değerleri kullanılarak gerçekleşen fon büyüklükleri belirlenmiştir.

Optimal yatırım oranları sadece [0,200] aralığındaki 201 noktada elde edildiği için, fon büyüklüğünün tam sayı olmayan değerleri için optimal oranlar interpolasyon yöntemiyle bulunmuştur. $\{Z_x\}$ raslantı değişkenine bağlı olarak 100.000 benzetim yapılarak gerçekleşen fon büyüklüğüne ilişkin olası senaryolar üretilmiştir. Bu senaryolarda elde edilen her fon büyüklüğü için bir optimal yatırım oranı bulunmuş ve bu yatırım oranların ortalaması nihai optimal yatırım oranı olarak belirlenmiştir. Belirlenen nihai optimal yatırım oranının birikim döneminin başı olan 20 yaştan, birikim döneminin sonu olan 64 yaşa kadar değişimi Çizelge 4.2 ve Şekil 4.4'te gösterilmektedir.

Çizelge 4.2: Kayıptan Kaçınan Bireyler için Optimal Yatırım Oranları

Yaş	Optimal Yatırım Oranı
20	1
25	0,8810
30	0,5525
35	0,4118
40	0,3497
45	0,3164
50	0,2977
55	0,2901
60	0,2899
64	0,2959



Şekil 4.4: Kayıptan Kaçınan Bireyler için Optimal yatırım stratejileri

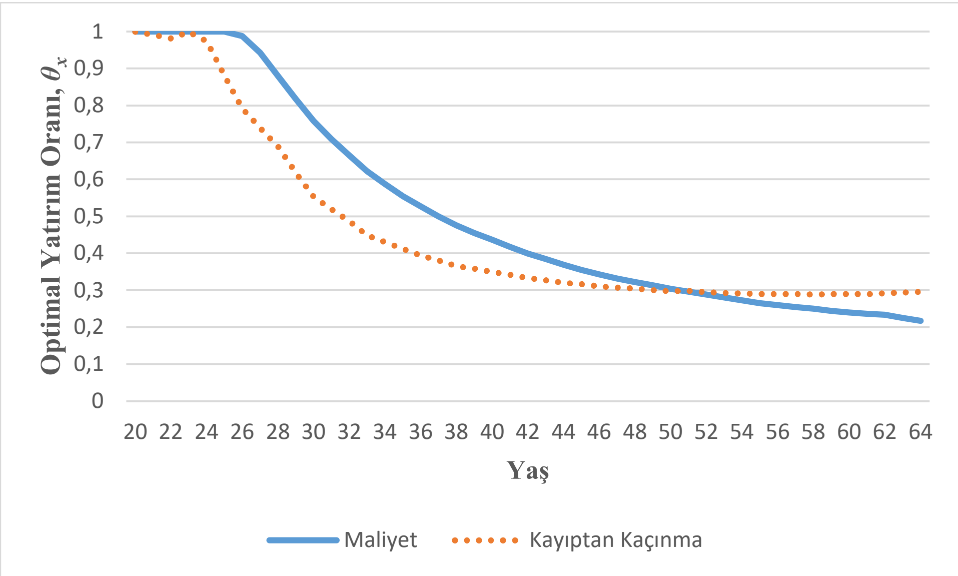
Çizelge 4.2 ve Şekil 4.4'ten elde edilen optimal yatırım stratejisi fonun yüksek riskli yatırım aracında değerlendirilen oranının vadenin başında 1 değerini almakta ve vade sonuna doğru giderek azalmaktadır. Elde edilen strateji aslında birçok emeklilik planında kabul görmüş ve yaygın olarak kullanılan "geleneksel yaşam tarzı stratejisine" benzemektedir. Elde edilen bu stratejiye göre birikim döneminin başında fonun yüksek riskli yatırım aracında değerlendirilen oranı 1 değerini almakta, yani fonun tamamı yüksek riskli yatırım aracında değerlenmektedir. Vade ilerledikçe fonun yüksek riskli yatırım aracında değerlendirilen oranı azalmakta, düşük riskli yatırım aracında değerlendirilen oranı artmaktadır. Birikim döneminin sonunda ise fonun büyük bir kısmı düşük riskli yatırım aracında değerlenmektedir.

4.3. Maliyet Fonksiyonunun Kullanıldığı Model ile Kayıptan Kaçınan Bireyler İçin Optimal Yatırım Stratejilerinin Karşılaştırılması

Bu bölümde maliyet fonksiyonunun kullanıldığı model ile kayıptan kaçınan bireyler için elde edilen optimal yatırım stratejilerinin karşılaştırılmasına yer verilmiştir. Her iki yöntemle elde edilen optimal yatırım stratejileri karşılaştırmalı olarak Çizelge 4.3 ve Şekil 4.5'te verilmektedir.

Çizelge 4.3: Optimal Yatırım Oranları

Yaş	Maliyet	Kayıptan Kaçınma
20	1	1
25	0,9998	0,8810
30	0,7583	0,5525
35	0,5543	0,4118
40	0,4367	0,3497
45	0,3553	0,3164
50	0,3039	0,2977
55	0,2649	0,2901
60	0,2398	0,2899
64	0,2178	0,2959



Şekil 4.5: Optimal yatırım stratejileri

Çizelge 4.3 ve Şekil 4.5'ten elde edilen optimal yatırım stratejisinin genel şeklinin maliyet fonksiyonunun kullanıldığı model ile elde edilen optimal yatırım stratejisi ile uyumlu olduğu görülmektedir. Her iki modelde de fonun yüksek riskli yatırım aracında değerlendirilen oranının vadenin başında 1 değerini almakta ve vade sonuna doğru giderek azalmaktadır. Her iki modelde de elde edilen strateji aslında birçok emeklilik planında kabul görmüş ve yaygın olarak kullanılan "geleneksel yaşam tarzı stratejisine" benzemektedir.

Çizelge 4.3 ve Şekil 4.5'ten ayrıca maliyet fonksiyonunun kullanıldığı modelde fonun riskli yatırım aracında değerlendirildiği yıl sayısının daha uzun olduğu, bununla birlikte birikim döneminin sonunda fonun daha büyük bir kısmının düşük riskli yatırım aracında değerlendirildiği görülmektedir. Bu bulgulara göre kayıptan kaçınan bireyin maliyet fonksiyonun kullanıldığı modele göre birikim döneminin başlarındaki uzun sürede daha az riskli bir yatırım stratejisi izlerken, birikim döneminin son yıllarındaki kısa sürede ise daha agresif bir yatırım stratejisi izlediği söylenebilir.

5. Sonuç ve öneriler

Bu çalışmada katkısı belirli emeklilik planlarında kayıptan kaçınan bireyler için ve gelecekte ortaya çıkacak hedef fondan sapmaları minimize eden optimal yatırım stratejisi belirlenmiş, optimal yatırım oranının gerçekleşen fon büyüklüğüne ve yaşa bağlı değişimi incelenmiştir.

Kayıptan kaçınan birey gerçekleşen fon büyüklüğünün hedeflenen fon büyüklüğüne yakın olması durumunda tutucu bir yatırım stratejisi izlerken, gerçekleşen fon büyüklüğü hedeflenen fon büyüklüğünden hem pozitif hem de negatif yönlü uzaklaşırken agresif bir yatırım stratejisi izlemektedir. Gerçekleşen ve hedeflenen fon büyüklüğü arasındaki fark arttıkça optimal yatırım stratejisi daha agresif hale gelmektedir. Kayıptan kaçınan birey için optimal yatırım stratejisi bir çok emeklilik planında kabul gören geleneksel yaşam tarzı stratejisi ile benzer olarak elde edilmiştir. Elde edilen bu stratejiye göre birikim döneminin başında fonun tamamı riskli yatırım aracında değerlenmeli, birikim döneminin ilerleyen yaşlarında fonun riskli yatırım aracında değerlendirilen oranı azaltılarak, risksiz yatırım aracında değerlendirilen oranı artırılmalı, birikim döneminin sonunda ise fonun büyük bir kısmı risksiz yatırım aracında değerlendirilmelidir.

Kayıptan kaçınan birey için elde edilen optimal yatırım stratejisi maliyet fonksiyonunun kullanıldığı model ile elde edilen strateji ile karşılaştırıldığında ise sonuçların birbirine çok yakın gerçekleştiği görülmüştür. Bununla birlikte kayıptan kaçınan bireyin beklenildiği gibi daha az risk alarak daha tutucu bir yatırım stratejisi izlediği görülmektedir. Kayıptan kaçınan bireyin riski tercih etmediği gerçeği göz önünde bulundurulduğunda sonuçların bu anlamda tutarlı olduğu söylenebilir.

Bu çalışmada elde edilen sonuçlar birçok yönden geliştirilmeye açıktır.

Kullanılan modelde yıllık logaritmik getirilerin dağılımının Normal dağılıma uyduğu ve getirilerin birbirinde bağımsız olduğu varsayılmıştır. Fakat gerçekte yıllık getiriler bu varsayıma uymadığından, optimal yatırım stratejisi yatırım getirilerinin dağılımının Normal dağılıma uymaması durumunda belirlenebilir. Bu durumda optimize edilmeye çalışılan beklenen değer içindeki ifadenin çözümü sayısal yöntemlerle elde edilemeyebileceğinden dolayı aktüerya literatüründe çok yaygın kullanım alanı olmayan, büyük boyutlu optimizasyon problemleri için kabul edilebilir sürede optimuma yakın çözümler verebilen sezgisel optimizasyon algoritmaları kullanılabilir. Yatırım getirilerinin birbirine bağımlı olması durumu ise kopulalar kullanılarak analiz edilebilir.

Kaynaklar

[1] Blake, D., Annuities in Pension Plans, In Commentary at World Bank Annuities Workshop, 7-8 June, United Kingdom, 1999, p. 7.

[2] Aitken, W. H., A Problem-Solving Approach to Pension Funding and Valuation, Actex Publications, 1996.

[3] Samuelson, P. A., Lifetime Portfolio Selection by Dynamic Stochastic Programming, The Review of Economics and Statistics, (1969) 239.

[4] Merton, R. C., Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: The Continuous-Time Case, The Review Of Economics And Statistics, (1969) 247.

[5] Merton, R. C., Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model, Journal of Economic Theory, 3(4) (1971) 373.

[6] Bodie, Z., Merton, R. C. and Samuelson, W. F., Labor Supply Flexibility and Portfolio Choice in a Life Cycle Model, Journal of Economic Dynamics and Control, 16(3-4) (1992) 427.

[7] Cairns, A. J. G., An Introduction to Stochastic Pension Fund Management, Working Paper 9607, Pensions Institute, 1996.

[8] Owadally, M. I., The Dynamics and Control of Pension Funding, Doctoral Dissertation, City University, London, 1998.

[9] Vigna, E. and Haberman, S., Optimal Investment Strategy for Defined Contribution Pension Schemes, Insurance: Mathematics and Economics, 28(2) (2001) 233.

[10] Blake, D., Cairns, A. J. and Dowd, K., Pensionmetrics: Stochastic Pension Plan Design and Value-At-Risk During The Accumulation Phase, Insurance: Mathematics and Economics, 29(2) (2001) 187.

[11] Haberman, S. and Vigna, E., Optimal Investment Strategies and Risk Measures in Defined Contribution Pension Schemes, Insurance: Mathematics and Economics, 31(1) (2002) 35.
[12] Gerrard, R., Haberman, S. and Vigna, E., Optimal Investment Choices Post-Retirement in a Defined Contribution Pension Scheme, Insurance: Mathematics and Economics, 35(2) (2004) 321.
[13] Cairns, A. J., Blake, D. and Dowd, K., Stochastic Lifestyling: Optimal Dynamic Asset Allocation for Defined Contribution Pension Plans, Journal of Economic Dynamics and Control, 30(5) (2006) 843.
[14] Battocchio, P., Menoncin, F. and Scaillet, O., Optimal Asset Allocation for Pension Funds Under Mortality Risk During The Accumulation and Decumulation Phases, Annals of Operations Research, 152(1) (2007) 141.
[15] Yang, S. S. and Huang, H. C., The Impact of Longevity Risk on the Optimal Contribution Rate and Asset Allocation for Defined Contribution Pension Plans, The Geneva Papers on Risk and Insurance Issues and Practice, 34(4) (2009) 660.
[16] Blake, D., Wright, D. and Zhang, Y., Age-Dependent Investing: Optimal Funding and Investment Strategies in Defined Contribution Pension Plans When Members Are Rational Life Cycle Financial Planners, Journal of Economic Dynamics and Control, 38 (2014) 105.
[17] Chen, A., Haberman, S. and Thomas, S., Optimal Decumulation Strategies During Retirement with Deferred Annuities, Available at SSRN 2911959, 2017.
[18] Rabin, M. and Thaler, R. H., Anomalies: Risk Aversion, The Journal of Economic Perspectives, 15(1) (2001) 219.
[19] Kahneman, D. and Tversky, A., Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk, Econometrica, 47 (1979) 263.
[20] Berkelaar, A. B., Kouwenberg, R. and Post, T., Optimal Portfolio Choice Under Loss Aversion. Review of Economics and Statistics, 86(4) (2004) 973.
[21] Gomes, F. J., Portfolio Choice and Trading Volume with Loss-Averse Investors, The Journal of Business, 78(2) (2005) 675.
[22] Blake, D., Wright, D. and Zhang, Y., Target-Driven Investing: Optimal Investment Strategies in Defined Contribution Pension Plans Under Loss Aversion, Journal of Economic Dynamics and Control, 37(1) (2013) 195.
[23] M. I. Owadally, S. Haberman, D. G. Hernández, 2013, A Savings Plan with Targeted Contributions, The Journal of Risk and Insurance, 80(4), 975-1000.
[24] H. K. Sezen, 2007, Yöneylem Araştırması, 2. Baskı, Ekin Basım Yayın Dağıtım, Bursa.
[25] R. Bellman, 1957, Dynamic Programming, Princeton University Press, New Jersey.
[26] Tversky, A. and Kahneman, D., Advances in Prospect Theory: Cumulative Representation of Uncertainty, Journal of Risk and uncertainty, 5(4) (1992) 297.
[27] Kırkağaç, M., Gençtürk, Y. (2016). Bireysel emeklilik planlarında hedef fon büyüklüğüne ulaşmak için değişken katkı ve optimal yatırım stratejisi. İstatistikçiler Dergisi: İstatistik ve Aktüerya, 9(2), 54-65.