GI/M/1/n-1 Kuyruk Modelinde Kaybolan Müşteri Akımının Analizi

Alifettah SHAHBAZOV* Vedat SAĞLAM** Nurhan ALİSDEMİR***

ÖZET

Bu çalışmada sonlu kuyruklu, rekurent girişli ve çalışma süresi üstel dağılıma uyan tek kanallı bir stokastik hizmet sistemi araştırılmıştır. Yarı Markov süreçleri yöntemiyle sistemde müşterilerin kaybolma anları arasındaki sürelerin LS dönüşümü ve müşterinin kaybolma olasılığı bulunmuştur. Ayrıca " hızlı hizmet" koşulu altında kaybolan müşteri akımının Poisson akımına yaklaştığı açıklanmıştır.

Anahtar Kelimeler: *Gelişlerarası süre, Hizmet süresi, Kaybolan müşteri akımı, Yarı Markov süreci, Laplace-Stieltjes dönüşümü, Kaybolma olasılığı*

1. GİRİŞ

Sonlu kuyruklu stokastik hizmet sistemlerinde *kaybolan müşteri akımının (stream of overflows)* analizi önemli bir konu olup bir çok bilim adamı tarafından incelenmiştir. Palm(1943) ilk kez $G/M/n/0$ sisteminde kaybolan müşteri akımının(KMA) *yenilenen süreç (renewal process)* olduğunu gösterdi ve kaybolma anları arasındaki sürelerin Laplace-Stieltjes (LS) dönüşümü için fark denklemlerini kurdu. Palm problemi ile ilgili çalışmalar çeşitli kuyruk modelleri için Takacs [10], Klimov [5] Çinlar ve Disney [4], Belyayev [2] ve Pourbabai [8] v.b. gibi araştırmacılar tarafından yapıldı. Bu çalışmaların hepsinde KMA'nın analizi kaybolma anları arasındaki sürelerin LS dönüşümünün bulunması ile sona ermiştir. Pratikte LS dönüşümünün tersini almak kolay olmadığından KMA'nın asimptotik olarak analiz edilmesinde yarar vardır. Bu problem "hızlı hizmet" koşulu altında bivasıta olasılık metotları ile $M/G/1/n-1$ sisteminde *ilk kaybolma anı* için Vinogradov (1968) tarafından çözüldü. Shahbazov (1986) durum uzayı sonlu olan yarı Markov sürecinin *(semi Markov process)* fikse edilen bir duruma giriş anları akımının Poisson akımına yaklaşma koşulunu buldu.

Bu çalışmada durum uzayı sonlu olan yarı Markov süreçleri teorisine [3,7] dayanarak $GI/M/1/n-1$ kuyruk modelinde müşterilerin kaybolma anları arasındaki sürelerin LS dönüşümü ve ortalaması, müşterinin kaybolma olasılığı *(loss probability)* ve KMA'nın Poisson akımına yaklaşma koşulu bulundu. Ele alınan problemin

* Prof.Dr., Ondokuz Mayıs Üniversitesi
** Yrd.Doç.Dr., Ondokuz Mayıs Üniversitesi
*** Araş. Gör, Ondokuz Mayıs Üniversitesi

çözümünde kullanılan bu yaklaşım diğer kuyruk modellerinin analizinde de kullanılabilir.

Çalışmanın araştırma konusu olan kuyruk modeli aşağıdaki verilerle tanımlanır: Müşterilerin gelişlerarası süreleri bağımsız ve keyfi F dağılım fonksiyonuna sahip tesadüfi değişkenlerdir. Müşterilerin hizmet süreleri bağımsız ve μ parametreli üstel dağılıma sahiptir.

Herbir müşteri geliş anında sistemdeki müşteri sayısı n'den az ise sisteme girer, n'ye eşit olduğunda ise hizmet almadan sistemi terk eder.Sözü edilen tesadüfi değişkenler birbirlerinden bağımsızdır.

Müşterilerin kaybolma anları $0 < t_1^n < t_2^n < \ldots$ ler olmak üzere $\{t_k^n\}_{k\geq 1}$ dizisine *kaybolan müşteri akımı* denir. Bu akım *yenilenen süreçtir*, dolayısıyla kaybolma anları arasındaki $t_2^n - t_1^n, t_3^n - t_2^n, \ldots$ süreleri aynı dağılımlı bağımsız tesadüfi değişkenlerdir; t_1^n ve $\{t_k^n - t_{k-1}^n : k \geq 2\}$ birbirlerinden bağımsızdır. Kolaylık için $T_{0n} = t_1^n$, $T_{nn} = t_k^n - t_{k-1}^n$ $k \geq 2$ işaretlerini kullanacağız. Diğer bir ifadeyle T_{0n} *ilk kaybolma anı (first overflow time)*, T_{nn} ise *iki ardışık kaybolma anı arasındaki süredir (recurrence time)*. Amacımız KMA'yı karakterize eden T_{0n} ve T_{nn} lerin "hızlı hizmet" koşulu altında dağılım fonksiyonlarını ve ortalamalarını asimptotik olarak belirlemektir. Burada "hızlı hizmet" koşulu hizmet süresinin gelişlerarası süreden büyük olması ihtimalinin sıfıra yaklaştığını ifade eder.

2. $GI/M/1/n-1$ MODELİNİ TEMSİL EDEN YARI MARKOV SÜRECİ

$X(t)$, $t \geq 0$ ile t anında sistemde bulunan müşteri sayısını gösterelim. Not edelim ki, *giriş dağılım fonksiyonu* F üstel dağılımdan farklı olduğunda $X(t)$ ne Markov, ne de yarı Markov süreci (YMS) değildir. Fakat KMA'yı karekterize eden T_{0n} ve T_{nn} tesadüfi değişkenlerinin LS dönüşümü bir özel YMS yardımıyla bulunabilir. Böyle YMS sürecinin kurulması için t_k ile k-ıncı müşterinin geliş anını gösterelim ve $X(t_k - 0) = X_k$ olsun. Dolayısıyla X_k, k-ıncı müşterinin geliş anında bu müşteri hariç sistemde bulunan müşteri sayısını göstermektedir. Şimdi aşağıdaki eşitlikle $\{\ \xi(t)\ ,\ t \geq 0\ \}$ yarı Markov süreci tanımlansın:

$$\xi(t) = X_k, \quad t_k \leq t < t_{k+1} \tag{1}$$

Bu sürecin durum uzayı $\{0,1,..,n\}$ dir, $t_1^n, t_2^n, \ldots$ ler ise onun n durumuna varış anlarıdır.Böylece, ele alınan sistemde KMA'nın analizi $\xi(t)$ sürecinde n durumuna *ilk varış* ve *dönüş zamanlarının* dağılım fonksiyonlarının bulunmasına indirgenir. $Q_{ij}(x)$ ile $\xi(t)$'nin çekirdeğini *(kernel)* gösterelim:

$$Q_{ij}(x) = P\{X_{k+1} = j, t_{k+1} - t_k < x / X_k = i\} \qquad (x \geq 0;\ i, j = 0,1,\ldots,n)$$

Eğer bir geliş anında sistemdeki müşteri sayısı i ise, sonraki geliş anında bu sayı i+1 den fazla olamaz, buna göre $i+1<j\leq n$ ler için $Q_{ij}(x)=0$ olur. Bunu dikkate alarak ve tam olasılık formülünü kullanarak sürecin i durumunda kalma süresinin (*sojourn time*) dağılım fonksiyonunu buluruz:

$$F_i(x)=\sum_{j=0}^{n}Q_{ij}(x)=\sum_{j=0}^{i+1}Q_{ij}(x)\ .$$

Tanımına göre süreçin i durumunda kalma süresi i-inci ve (i+1)-inci geliş anları arasındaki süreye eşit olduğundan herbir $F_i(x)=F(x),\ x\geq 0$ dır. Buradan ve yukarıdaki eşitlikten

$$Q_{i0}(x)=F(x)-\sum_{j=1}^{i+1}Q_{ij}(x),\qquad 0\leq i\leq n \tag{2}$$

bulunur. Şimdi $Q_{ij}(x)$'in $1\leq j\leq i+1$ ler için hesabını yapalım. Tam olasılık formülünü kullanarak ve $P(t_{k+1}-t_k<t)=F(t)$ olduğunu dikkate alarak yazabiliriz:

$$Q_{ij}(x)=\int_0^x P(X_{k+1}=j,t_{k+1}-t_k<x/X_k=i,t_{k+1}-t_k=t)dF(t)$$

$$=\int_0^x P(X_{k+1}=j/X_k=i,t_{k+1}-t_k=t)dF(t)\,.$$

Sağ tarafta bulunan koşullu olasılık k-ıncı geliş anında i durumunda olan sistemin $t_{k+1}-t_k=t$ zamanı içinde j durumuna geçiş olasılığıdır. Burada sözü edilen olayın gerçekleşmesi için $t_{k+1}-t_k=t$ süresi içinde $i+1-j$ tane müşterinin hizmetini bitirip sistemden ayrılması gerekmektedir. Hizmet süreleri bağımsız ve μ parametreli üstel dağılıma sahip olduğundan sözü edilen koşullu olasılık $e^{-\mu t}(\mu t)^{i+1-j}/(i+1-j)!$' ye eşittir. Buradan ve $Q_{ij}(x)$'in yukarıdaki ifadesinden

$$Q_{ij}(x)=\int_0^x\frac{(\mu t)^{i+1-j}}{(i+1-j)!}e^{-\mu t}dF(t),\qquad 1\leq j\leq i+1$$

bulunur. Herbir $0\leq j\leq n$ için $Q_{nj}(x)=Q_{n-1,j}(x)$ olması açıktır. Böylece $Q_{ij}(x)$ çekirdeklerinin hepsi bulunmuştur.

$f(s)$ ile $F(x)$'in, $q_{ij}(s)$ ile de $Q_{ij}(x)$'in LS dönüşümünü gösterelim. $a_k(s),\ s\geq 0$ fonksiyonu da aşağıdaki eşitlikle tanımlansın: $f(s)$

$$a_k(s)=\int_0^\infty\frac{(\mu x)^k}{k!}e^{-(s+\mu)x}dF(x)\ \ (s\geq 0,\ k=0,1,\ldots)\,. \tag{3}$$

Bu halde $Q_{ij}(x)$ lerin yukarıda elde edilen ifadellerini kullanarak herbir $0 \le i \le n$ için $q_{ij}(s)$ leri buluruz:

$$
\begin{aligned}
&q_{ij}(s)=0 \quad , \ i+2 \le j \le n \\
&q_{ij}(s)=a_{i+1-j}(s) \ , \ 1 \le j \le i+1 \\
&q_{nj}(s)=q_{n-1,j}(s) \ , \ 0 \le j \le n \\
&q_{i0}(s)=f(s)-\sum\nolimits_{k=0}^{i} a_k(s)
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Burada son formül (2) eşitliğinin her iki tarafının LS dönüşümünü almak, (4) deki ikinci eşitliği kullanmak ve nihayet toplama indisini değişmekle elde edilir. $q_{ij}(s)$'lerin (4) deki ifadelerini dikkate alarak $q(s)=[q_{ij}(s)]_0^n$ matrisini oluşturalım:

$$
q(s)=\begin{bmatrix}
q_{00} & a_0 & & & & \\
q_{10} & a_1 & a_0 & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \\
q_{n-1,0} & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\
q_{n-1,0} & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0
\end{bmatrix}_s
$$

Burada $[\ ]_s$ simgesi $[\ ]$ matris elemanlarının s'nin fonksiyonu olduğunu göstermektedir ve 1-inci sütunu oluşturan $q_{i0}=q_{i0}(s)$ ler (4) deki son formülle verilir. Görüldüğü gibi $q(s)$ matrisinin üst köşegeni üstündeki elemanlarının hepsi sıfırdır. Bu tür yapılı matrisler kuyruk teorisinin bir çok modellerinde ortaya çıkmaktadır. Ele alınan kuyruk modelinin incelenmesinde aşağıdaki matris önemli rol oynamaktadır:

$$
I-q(s)=\begin{bmatrix}
1-q_{00} & -a_0 & & & & \\
-q_{10} & 1-a_1 & -a_0 & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \\
-q_{n-1,0} & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & 1-a_1 & -a_0 \\
-q_{n-1,0} & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 & 1-a_0
\end{bmatrix}_s
\tag{5}
$$

Bu matrisin son satır ve son sütununu atmak suretiyle elde edilen alt matrisin determinantını $\Delta_n(s)$ ile gösterelim:

$$\Delta_n(s)=\det\begin{bmatrix} 1-q_{00} & -a_0 & & & & \\ -q_{10} & 1-a_1 & -a_0 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ -q_{n-2,0} & -a_{n-2} & -a_{n-3} & \cdots & 1-a_1 & -a_0 \\ -q_{n-1,0} & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_2 & 1-a_1 \end{bmatrix}_s \tag{6}$$

Bu determinantda birinci sütun yerine $(1, 1, \ldots, 1)'$ sütun vektörü konulup ve $s=0$ yazıldığında elde edilecek olan determinantı da d_n ile gösterelim:

$$d_n=\det\begin{bmatrix} 1 & -a_0 & & & & \\ 1 & 1-a_1 & -a_0 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 1 & -a_{n-2} & -a_{n-3} & \cdots & 1-a_1 & -a_0 \\ 1 & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_2 & 1-a_1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Burada $a_k \quad (k=0,1,\ldots)$

$$a_k=a_k(0)=\int_0^{\infty}\frac{(\mu t)^k}{k!}e^{-\mu t}dF(t)\,,\quad k=0,1,\ldots \tag{8}$$

eşitliğiyle verilir ve gelişlerarası süre (*interarrival time*) içinde k tane müşterinin hizmetini bitirip sistemden ayrılması olasılığını ifade eder.

Şimdi YMS teorisinden bir sonucu hatırlayalım [7]: *$Y(t)$, $t\geq 0$ durum uzayı $\{0,1,\ldots,n\}$, çekirdeği ise $Q_{ij}(x)$ olan YMS, T_{0n} bu sürecin n durumuna ilk giriş anı, T_{nn} ise bu duruma iki ardışık dönüş arasındaki süre olsun. Bu halde T_{0n} ve T_{nn} lerin LS dönüşümleri*

$$\varphi_{0n}(s)=r_{0n}(s)/r_{nn}(s)\,,\quad \mathrm{Re}(s)>0$$
$$1-\varphi_{nn}(s)=1/r_{nn}(s)\,,\quad \mathrm{Re}(s)>0$$

eşitlikleri ile verilir, burada r_{ij}, $[\mathrm{I}-q(s)]^{-1}$ ters matrisinin (i,j)- elemanı, q(s) ise $Q_{ij}(x)$ 'lerin LS dönüşümlerinden oluşan matris, I *da birim matrisdir.* Not edelim ki sözü edilen ters matris mevcuttur, çünkü $\mathrm{Re}(s)>0$ ler için $\det[\mathrm{I}-q(s)]\neq 0$.

Ele alınan $GI/M/1/n-1$ kuyruk modelinin analizi için yukarıdaki formülleri aşağıdaki gibi göstermekte fayda vardır:

$$\varphi_{0n}(s)=\Delta_{n0}(s)/\Delta_n(s) \tag{9}$$
$$1-\varphi_{nn}(s)=|I-q(s)|/\Delta_n(s). \tag{10}$$

Burada $\Delta_{n0}(s)$, $I - q(s)$ matrisinde $(n, 0)$-elemanının kofaktörüdür, $|A|$ simgesi A matrisinin determinantını gösterir. Şimdi bu formülleri, söz konusu kuyruk modelini temsil eden YMS'ye uygulayalım. Bu model için $I - q(s)$ matrisinin (5) ile verilen ifadesinden görülür ki $\Delta_{n0}(s)$ ana köşegeni $a_0(s) = f(s+\mu)$ lerden oluşan alt matrisin determinantıdır, buna göre $\Delta_{n0}(s) = a_0(s)^n$ olur. Bu durumda (9) formülü

$$\varphi_{0n}(s) = f(s+\mu)^n / \Delta_n(s), \quad \operatorname{Re}(s) > 0 \tag{11}$$

şeklini alır. Şimdi $|I - q(s)|$ determinantının sonuncu sütun elemanlarına göre ayrımını yazalım. Bu sütunun sonuncu elemanı olan $1 - a_0(s)$'in kofaktörü $\Delta_n(s)$ dir, önceki $-a_0(s)$ elemanın kofaktörünün son sütunu ise $(0,\ldots,0,-a_0,-a_1)'$ şeklindedir. Bu sütunu $(0,\ldots,0,-a_0,1-a_1-1)'$ biçiminde gösterip toplam işlemini yaparsak $-a_0(s)$'in kofaktörünü $\Delta_n(s) - \Delta_{n-1}(s)$ şeklinde gösterebiliriz. Böylece

$$\begin{aligned} |I - q(s)| &= (1 - a_0(s))\Delta_n(s) + a_0(s)[\Delta_n(s) - \Delta_{n-1}(s)] \\ &= \Delta_n(s) - f(s+\mu)\Delta_{n-1}(s) \end{aligned}$$

yazabiliriz. Buradan ve (10) formülünden

$$\varphi_{nn}(s) = f(s+\mu)\Delta_{n-1}(s)/\Delta_n(s), \quad \operatorname{Re}(s) > 0 \tag{12}$$

formülü elde edilir.

(11) ve (12) eşitliklerinden $ET_{0n} = -\varphi'_{0n}(0)$ ve $ET_{nn} = -\varphi'_{nn}(0)$ formülleri gereği

$$ET_{0n} = \frac{d_n}{\alpha^n} m \tag{13}$$

$$ET_{nn} = \left(\frac{d_n}{\alpha^n} - \frac{d_{n-1}}{\alpha^{n-1}} \right) m \tag{14}$$

bulunur, burada $m = -f'(0)$ gelişlerarası sürenin ortalaması, α ise

$$\alpha = f(\mu) = \int_0^\infty e^{-\mu x} dF(x) \tag{15}$$

eşitliğiyle verilir. Not edelim ki $\alpha = f(\mu)$ hizmet süresinin gelişlerarası süreden büyük olması olasılığıdır. $GI/M/1/0$ sistemi için α müşterinin kaybolması olasılğını göstermektedir [11].

3. KAYBOLAN MÜŞTERİ AKIMININ ASİMPTOTİK ANALİZİ

(11) ve (12) formüllerinde bulunan $\Delta_{n-1}(s)$ ve $\Delta_n(s)$ determinantlarını hesaplamak uzun zaman almaktadır. Ayrıca $\varphi_{0n}(s)$ ve $\varphi_{nn}(s)$ LS dönüşümlerinin n'nin büyük değerleri için ters dönüşümlerini elde etmek de kolay iş değildir. Bu durumda sözü edilen LS dönüşümlerinin $\alpha \to 0$ koşulu altında asimptotik analizini yapmada yarar vardır. Bu koşul hizmet süresinin hızlı olması anlamına geliyor.

Teorem 1. $\alpha \to 0$ *koşulu altında aşağıdaki asimptotik formüller geçerlidir:*

$$ET_{0n} \sim (m/\alpha^n); \quad ET_{nn} \sim (m/\alpha^n), \tag{16}$$

burada $u \sim v$ *işareti* $\alpha \to 0$ *iken* $u/v \to 1$ *olduğunu gösterir.*
İspat. Önce (8)eşitliği ile verilen $a_k(0)$ lar için

$$\lim_{\alpha\to 0} a_k(0) = 0, \quad k = 0,1,\dots,n \tag{17}$$

olduğunu gösterelim. $a_0(0) = \alpha$ olduğundan (17), $k = 0$ için geçerlidir. Şimdi bu eşitliğin doğru olduğunu varsayalım ve $x^k e^{-x}/k!$ $(x \ge 0, k = 0,1,\dots)$ eşitsizliğini kullanarak $a_{k+1}(0)$ integralini değerlendirelim. Keyfi $\beta > 0$ sayısı için yazabiliriz:

$$a_{k+1}(0) = \int_0^\beta \frac{(\mu t)^{k+1}}{(k+1)!} e^{-\mu t} dF(t) + \int_\beta^\infty \frac{(\mu t)^{k+1}}{(k+1)!} e^{-\mu t} dF(t)$$
$$\le \frac{\mu\beta}{k+1} \int_0^\beta \frac{(\mu t)^k}{k!} e^{-\mu t} dF(t) + \int_\beta^\infty dF(t) \le \frac{\mu\beta}{k+1} a_k(0) + 1 - F(\beta).$$

Şimdi $\beta = 1/\sqrt{a_k(0)}$ seçersek

$$0 \le a_{k+1}(0) \le \frac{\mu}{k+1} \sqrt{a_k(0)} + 1 - F(\beta)$$

buluruz. $a_k(0) \to 0$ iken $\beta \to \infty$ olduğundan $1 - F(\beta) \to 0$ olur. Buradan ve yukarıdaki eşitsizlikten $\alpha \to 0$ iken $a_{k+1}(0) \to 0$ bulunur. Böylece tümevarım prensibine göre (17) keyfi $k = 0,1,\dots$ için geçerlidir.

Şimdi (7) ve (17) eşitliklerinden $\alpha \to 0$ iken $d_n \to 1$ bulunur. Buradan ve (13), (14) formüllerinden istenen (16) formülleri elde edilir.

Teorem 2. *Varsayalım* $m_2 = \int_0^\infty x^2 dF(x) < \infty$ *ve* F *öyle değişiyor ki*

$$\lim_{\alpha \to 0} (m_2 / m^2) \alpha^n \to 0 \tag{18}$$

olur. Bu durumda $k = 0$ ve $k = n$ için aşağıdaki asimptotik formül doğrudur:

$$\lim_{\alpha \to 0} P(T_{kn} / ET_{kn} < t) = 1 - e^{-t}, \quad t \geq 0 \tag{19}$$

İspat. $\Delta_n(s)$'in 1-inci sütununa diğerlerini eklemek ve (4) deki son formülü kullanmakla bu sütun $(1-f(s),\ldots,(1-f(s),\ 1-f(s)+a_0(s))'$ şekline getirilir. Bu halde $\Delta_n(s)$, 1-inci sütunları $(1-f(s),\ldots,1-f(s))'$ ve $(0,\ldots,0,\ a_0(s))'$ şeklinde olan iki determinantın toplamı şeklinde yazılabilir. 2-inci determinant 1-inci sütun elemanlarına göre açıldığında onun $f(s+\mu)^n$ e eşit olduğu görülmektedir. Böylece $\Delta_n(s)$ determinantı

$$\Delta_n(s) = (1 - f(s))\, h_n(s) + f(s + \mu)^n$$

şeklinde gösterilebilir, burada $h_n(s)$, $\Delta_n(s)$ de 1-inci sütun yerine $(1,1,\ldots,1)'$ sütun vektörünü yazmakla elde edilir. Bu durumda (11) formülü

$$\varphi_{0n}(s) = \left[1 + h_n(s) \frac{1 - f(s)}{f(s + \mu)^n} \right]^{-1} \tag{20}$$

biçiminde yazılabilir. Kolaylık açısından $\gamma_n = ET_{0n}$ olsun. Bu halde (16) deki 1-inci formül

$$(m / \gamma_n) \sim \alpha^n, \quad \alpha \to 0 \tag{21}$$

biçiminde yazılabilir. Şimdi ξ ile gelişlerarası süreyi gösterelim. Bu halde $0 \leq 1 - e^{-x} \leq x$, $x \geq 0$ eşitsizliğini ve $E\xi = m$ olduğunu dikkate alarak

$$0 \leq 1 - f(s / \gamma_n) = E\left(1 - e^{-(s/\gamma_n)\xi}\right) \leq (m / \gamma_n) s$$

yazabiliriz. Buradan ve (21)dan $\alpha \to 0$ iken $f(s/\gamma_n) \sim 1$ bulunur. Şimdi

$$f(s) f(\mu) \leq f(s + \mu) \leq f(\mu) \qquad (s \geq 0, \quad \mu \geq 0)$$

eşitliğini veya ona denk olan

$$f(s / \gamma_n) \leq (1/\alpha) f(s / \gamma_n + \mu) \leq 1$$

eşitsizliğini kullanmakla $f(s/\gamma_n + \mu) \sim \alpha$ sonucu, buradan da

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{1-f(s/\gamma_n)}{f(s/\gamma_n+\mu)^n} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{1-f(s/\gamma_n)}{\alpha^n}$$

bulunur. Sağ tarafta bulunan limiti bulmak için

$$f(s)=1-ms+\frac{m_2}{2}s^2+o(s^2)\ , \quad s \to 0$$

formülünü kullanalım. Burada s yerine s/γ_n koyup (18) ve (21)formüllerini kullanırsak, $\alpha \to 0$ iken

$$\frac{1-f(s/\gamma_n)}{\alpha^n} = \frac{ms}{\alpha^n \gamma_n} - \frac{1}{2}\left(\frac{ms}{\alpha^n \gamma_n}\right)^2 \frac{m_2}{m^2}\alpha^n + o(s^2/\gamma_n^2) \to s \tag{22}$$

buluruz. Herbir $s \geq 0$ için $0 \leq a_k(s/\gamma_n) \leq a_k(0) \to 0$ olduğundan $a_k(s/\gamma_n) \to 0$, buna göre

$$\lim_{\alpha \to 0} h_n(s/\gamma_n) = 1 \tag{23}$$

olur. Şimdi (20)eşitliğinde s yerine s/γ_n koyup $\alpha \to 0$ alırsak, (22)ve (23) eşitlikleri gereği

$$\lim_{\alpha \to 0} \varphi_{0n}(s/\gamma_n) = (1+s)^{-1}\ , \quad s \geq 0 \tag{24}$$

bulunur. Bu formülü ve LS dönüşümü için ters süreklilik teoremini dikkate alırsak $k=0$ için (19) formülü ispatlanmış olur.

Şimdi. (19) formülünün $k=n$ için doğru olduğunu gösterelim. (11) ve (12) formüllerinden

$$\varphi_{nn}(s) = \varphi_{0n}(s)/\varphi_{o(n-1)}(s)\ , \quad s \geq 0 \tag{25}$$

formülü elde edilir. $0 \leq 1-e^{-x} \leq x$, $x \geq 0$ eşitsizliğini kullanarak yazabiliriz

$$0 \leq 1-\varphi_{0,n-1}(s/\gamma_n) = E\left(1-e^{-(s/\gamma_n)T_{0,n-1}}\right) \leq (\gamma_{n-1}/\gamma_n)s\ .$$

Öte yandan $\gamma_n \sim (m/\alpha_n)$ $(\alpha \to 0)$ olduğundan $(\gamma_{n-1}/\gamma_n/) \to 1$ $(\alpha \to 0)$ olur. Buradan ve yukarıdaki eşitsizlikten

$$\lim_{\alpha \to 0} \varphi_{0,n-1}(s/\gamma_n) = 1$$

bulunur. Bunu dikkate alarak (25) da $\alpha \to 0$ alırsak

$$\lim_{\alpha\to 0}\varphi_{nn}(s/\gamma_n)=\lim_{\alpha\to 0}\varphi_{0n}(s/\gamma_n)=(1+s)^{-1}$$

buluruz. Buradan ve ters süreklilik teoreminden (19) formülü $k=n$ için elde edilir. Teorem ispatlanmıştır.

Bu teorem gereğince "hızlı hizmet" koşulu altında müşterilerin kaybolma anları arasındaki süreler $\lambda=1$ parametreli üstel dağılıma sahiptir, dolayısıyla KMA asimptotik olarak $\lambda=1$ parametreli Poisson süreci oluşturur.

4. KAYBOLMA OLASILIĞI

P_L ile $GI/M/1/n-1$ sisteminde müşterinin kaybolma olasılığını gösterelim. Dolayısıyla P_L müşterinin geliş anında sistemde n tane müşteriyle karşılaşması olasılığıdır. Ergodik teoreme göre bu olasılık m/ET_{nn} oranına eşittir. Buradan ve (14) formülünden

$$\frac{1}{P_L}=\frac{d_n}{\alpha^n}-\frac{d_{n-1}}{\alpha^{n-1}} \tag{26}$$

sonucu bulunur. Bu sonuç $GI/M/1/n-1$ sisteminde kaybolma olasılığını yeni bir formül ile ifade etmektedir. Bu formülün kullanımını kolaylaştırmak nedeniyle, onu

$$\frac{1}{P_L}=\frac{1}{\alpha^n}\begin{vmatrix} 1-a_1 & -a_0 & & & \\ -a_2 & 1-a_1 & -a_0 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ -a_{n-2} & -a_{n-3} & a_{n-4}\ldots 1-a_1 & -a_0 & \\ -a_{n-1} & -a_{n-2} & a_{n-3}\ldots & -a_2 & 1-a_1 \end{vmatrix} \tag{27}$$

biçiminde gösterebiliriz. Gerçekten D_{n-1} ile son formülün sağ tarafında bulunan determinantı gösterelim ve d_n'nin 1-inci satır elemanlarına göre ayrımını yazalım. Bu durumda $d_n=D_{n-1}+a_0\,d_{n-1}$ denklemini veya ona denk olan

$$d_n-\alpha\,d_{n-1}=D_{n-1} \tag{28}$$

fark denklemini elde ederiz. Bu denklemin her iki tarafını α^n ile bölersek (27) elde edilir.

Şimdi (27) formülüne dayanarak $M/M/1/2$ sisteminde kaybolma olasılığını bulalım. Bu sistemde gelişlerarası sürenin λ parametreli üstel dağılıma sahip olduğu varsayılır, yani $F(t)=1-e^{-\lambda t}, t\geq 0$ dır. Sistemdeki maksimum müşteri sayısı n =3 olduğundan (27) formülüne göre aranan kaybolma olasılığı

$$\frac{1}{P_L}=\frac{1}{\alpha^3}\begin{vmatrix} 1-a_1 & -a_0 \\ -a_2 & 1-a_1 \end{vmatrix}=\frac{1}{\alpha^3}\left[(1-a_1)^2-a_0a_2\right] \tag{29}$$

eşitliğinden bulunur. $f(s) = \lambda/(\lambda + s)$ olduğundan

$$\alpha = f(\mu) = \lambda/(\lambda + \mu) = \rho/(1+\rho) \tag{30}$$

olur, burada $\rho = \lambda/\mu$ *sistemin yüküdür (load of system)*. Şimdi (2.8) formülüne dayanarak $a_k = a_k(0)$ ların hesabını yapalım:

$$a_k = \int_0^{\infty} \frac{(\mu t)^k}{k!} e^{-\mu t} \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{\lambda \mu^k}{k!} \int_0^{\infty} t^k e^{-(\lambda+\mu)t} dt$$

Gamma fonksiyonunu kullanarak

$$a_k = \frac{\rho}{1+\rho}\left(\frac{1}{1+\rho}\right)^k = \alpha\left(\frac{1}{1+\rho}\right)^k, \; k = 0,1,\ldots$$

buluruz. Bu ifadeleri (29) de yerine koyarsak

$$\alpha^3 \frac{1}{P_L} = (1-\alpha\frac{1}{1+\rho})^2 - \alpha^2(\frac{1}{1+\rho})^2$$

$$= 1 - \frac{2\alpha}{1+\rho} = 1 - \frac{2\rho}{(1+\rho)^2} = \frac{1+\rho^2}{(1+\rho)^2}$$

eşitliğini, buradan da

$$\frac{1}{P_L} = \frac{1+\rho^2}{\alpha^3(1+\rho)^2} = \frac{1+\rho+\rho^2+\rho^3}{\rho^3}$$

buluruz. Böylece aranan kaybolma ihtimali için kuyruk teorisinde iyi tanınan $P_L = \rho^3/(1+\rho+\rho+\rho^3)$ formülü elde edilir.

5. SONUÇ

Yarı Markov süreçleri yöntemiyle $GI/M/n-1$ kuyruk modeli analiz edilmiş ve aşağıda açıklanan sonuçlar elde edilmiştir:

•Adı geçen kuyruk modelini temsil eden yarı Markov süreci kurulmuş ve bu sürecin çekirdeği hesaplanmıştır. [(1) , (4) formülleri]

•Sisteme gelen müşterilerin kaybolma anları arasındaki sürelerin LS dönüşümü ve ortalamaları bulunmuştur. [(11) – (14) formülleri]

•"Hızlı hizmet" koşulu altında kaybolma anları arasındaki sürelerin ortalamalarının asimptotik ifadeleri bulunmuştur. (Teorem 1)

•Kaybolan müşteri akımının Pouisson akımına yaklaşma koşulu belirlenmiştir. (Teorem 2)

•Müşterinin kaybolma ihtimali için yeni formül bulunmuştur. [(26), (27) formülleri]

KAYNAKLAR

AKULİNİCHEV, N.M. and Groskiy. *Limiting distribution of additive functionals in certain queueing problems*, Izv. Akad .Nauk SSSR, Technical Kibern., 1971, 1, 44-51 (Russian).

BELYAYEV, Y.K. *Limiting theorems for overflow streams*, Theory Probabilty and Appl.,1963, 8, 175-184 (in Russian).

ÇINLAR, E. *Introduction to stochastic processes*, Englewood Cliffs., 1970, New York.

ÇINLAR, E., Disney,R.L. *Stream of overflows from a finite queue*, Oper. Res., 1967, 15, 131-134.

KLİMOV, Г.P.*Stochastic servers systems*., 1966, Moscow.

PALM, C. *Intensitatschwwankungen fernsperchverkehr*, Ericsson and Technics., 1943,44, 1-189.

PYKE,R. *Markov renewal processes with finitely many states*, Ann.Math.Stat., 1961,32, 1243-1259.

POURBABAİ, B. *Approximation of the overflow process from a G/M/N/K queueing system*, Management Science., 1987, 33, 931-937.

SHAHBAZOV A.A. *On the stream of losses from a finite queue*, Technical Kibern., 1986, 6, 105-110 (in Russian).

TAKACS, L. *On generalisation Erlang's formula*, Ann. Math. Stat,1969, 40, 71-78.

TAKACS, L. *Introduction to the theory of queues*, Oxford University Press, New York,1962.

VİNOGRADOV, O.P. *Limiting distribtion for first time of lost customer in queue with limited waiting room*, Math. Notes., 1968, 3, 541-546 (in Russian).

Analysis of the Stream of Overflows on GI/M/1/n-1 Queue Model

ABSTRACT

In this study astochastic service system which has single-channel with exponential service time, recurrent input and finite queue, was investigated.

Laplace – Stieltjes transformation of times between loss moments of customer and loss probability of customer were obtained by using semi-Markov process method. In addition, it was showed that under quick service condition the stream of overflows convergenes to the Poisson stream.

Key Words: *Interarrival time, service time, stream of overflows, semi-Markov process, Laplace-Stieltjes transformation, loss probability.*