Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi
Afyon Kocatepe University – Journal of Science and Engineering
https://dergipark.org.tr/tr/pub/akufemubid

Araştırma Makalesi / Research Article
DOI: https://doi.org/10.35414/akufemubid.1414484
AKÜ FEMÜBİD 24 (2024) 051301 (1102-1112)
AKU J. Sci. Eng. 24 (2024) 051301 (1102-1112)

Sezgisel Bulanık Normlu Uzaylarda Sezgisel f ve ψ Bulanık Daralma Dönüşüm Sınıfları için Yaklaşık Sabit Nokta Özelliği

*Makale Bilgisi / Article Info
Alındı/Received: 04.01.2024
Kabul/Accepted: 29.06.2024
Yayımlandı/Published: xx.xx.xxxx

Approximate Fixed Point Property for Intuitionistic f and ψ Fuzzy Contraction Mappings Classes in Intuitionistic Fuzzy Normed Spaces

Lale CONA [1*], Gizem GÜZEL TAN [2]

[1] Gümüşhane Üniversitesi, Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi, Matematik Mühendisliği, GÜMÜŞHANE
[2] Gümüşhane Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Matematik Mühendisliği, GÜMÜŞHANE

Öz

Bu çalışmada, klasik analizde ve bulanık metrik uzaylarda tanımlı f ve ψ daralma dönüşüm sınıflarının sezgisel bulanık normlu uzaylar için yeni versiyonları tanımlanacaktır. Ayrıca, bu dönüşümlerin sezgisel bulanık normlu uzaylarda hangi şartlar altında yaklaşık sabit nokta özelliğini sağladığı gösterilecektir. Bulunan sonuçlar örneklerle desteklenecektir.

Anahtar Kelimeler: Bulanık metrik uzay; Bulanık normlu uzay; Sezgisel bulanık metrik uzay; Sezgisel bulanık normlu uzay; Yaklaşık sabit nokta

Abstract

In this paper, new definitions for intuitionistic fuzzy normed spaces of f and ψ contraction mapping classes in classical analysis will be given. In addition, it will be shown under which conditions these mappings provide the approximate fixed point property in intuitionistic fuzzy normed spaces. The results obtained will be supported with examples.

Keywords: Fuzzy metric space; Fuzzy normed space; Intuitionistic fuzzy metric space; Intuitionistic fuzzy normed space; Approximate fixed point

1. Giriş

Belirsizlik kavramı ile ilgili ilk açıklamalar Max Planck tarafından 1930 yılında yapmıştır. Gerçek adı Lotfi Asker Zadeh olan, California Üniversitesi profesörü ve aynı zamanda Elektrik-Elektronik mühendisi olan Azeri asıllı Zadeh, 1965 yılında yaptığı çalışma ile belirsizlik kavramını “Fuzyy Kümeler” olarak ifade etti. Yani bulanık küme kavramı bilimsel olarak ilk kez 1965 yılında Zadeh tarafından sistematik olarak ortaya konmuştur (Zadeh 1965). Bu kavram birçok araştırmacı tarafından topolojik olarak analiz edilmiştir. Klasik topolojideki birçok önemli kavramın bulanık küme kavramıyla bağlantısı, 1968 yılında Chang tarafından bulanık topolojik uzayın tanımlanmasıyla başlamıştır (Chang 1968). Böylece bulanık küme üzerinde de metrik yapısını oluşturmak, bulanık matematiğinin problemlerinden biri olmuştur. Bu alandaki ilk çalışma Kramosil ve Michalek tarfından ortaya konmuştur (Kramosil ve Michalek 1975). George ve Veeramani ise Kramosil ve Michalek tarafından tanımlanan bulanık metrik uzay kavramını değiştirerek kuantum parçacık fiziğinde önemli uygulamaları olan bulanık metrik uzayların Hausdorf topolojisini tanımlamışlardır (George and Veeramani 1997). Gerçekten, bulanık topolojinin kuantum parçacık fiziğinde birçok uygulaması olup özellikle El Naschie'nin çalışmalarında hem sicim hem de $\epsilon(\infty)$ teorisinde bu uygulamaları görmek mümkündür (El Naschie M. 1998, 2000, 2005).

Atanassov, bir nesnenin bir kümeye ait olma derecesini üyelik derecesi olarak ifade etmiştir. Her bir elemanının üyelik derecesi toplamı 1 e eşit veya 1 den az olmalıdır koşulu ile ortaya konan bu tanım "sezgisel bulanık küme" olarak adlandırılır. Bu tanım bulanık küme kavramının genelleştirilmiş bir halidir (Atanassov 1986). Ayrıca literatürde t-norm ve t-conorm Schweizer ve Sklar tarafından tanımlanmıştır. Park, sezgisel bulanık kümeler fikrini kullanarak George ve Veeramani'ye bağlı olarak bulanık metrik uzayın bir genellemesi olarak sürekli t-normlar ve sürekli t-conormlar yardımıyla sezgisel bulanık metrik uzaylar kavramını tanımlamıştır. Ayrıca, Park sezgisel bulanık metrik uzay üzerinde bir Hausdorff topolojisi tanımlamıştır ve her metriğin bir sezgisel bulanık metriği doğurduğunu göstermiştir (Park 2004). Sezgisel bulanık normlu uzay kavramı ise Saadati ve

*Sorumlu Yazar/Corresponding Author: Lale Cona
e-posta/e-mail: lalecona@gumushane.edu.tr

Park'ın (Saadati ve Park 2006) çalışmalarında tanımlanmıştır. Bu gelişmelerle birlikte fonksiyonel analizde kullanılan bazı kavramlar sezgisel bulanık metrik ve norm aracılığıyla yeniden incelenmiştir. (Atanassov 1994, Alaca vd. 2006, Turkoglu vd. 2006, Mursaleen ve Mohiuddine 2009, Mursaleen vd. 2009, 2010, Dinda ve Samanta 2010, Karakaya vd. 2012, Ertürk ve Karakaya 2013, 2014, Sola Erduran vd. 2014, Sola Erduran 2020).

Matematiğin birçok dalında özellikle diferansiyel denklemler, kısmi diferansiyel denklemler, integral denklemler gibi alanlarda olduğu kadar diğer anabilim dallarında geniş uygulamaları olan, matematiğin en başarılı ve etkili araçlarından biri sabit nokta teorisidir. Sabit nokta teorisi Stephan Banach tarafından 1922'de çeşitli koşullar altında sabit noktanın varlığının ve tekliğinin kanıtlanması ile ortaya konmuştur (Banach 1922). Abu Osman, Banach'ın sabit nokta teoremini bulanık metrik uzaylarda ele almıştır (Abu Osman 1983). Ardından Grabiec (Grabiec 1988), George ve Veermani (George ve Veermani 1997), Gregori ve arkadaşları (Gregori ve Romaguer 2000, 2004, Gregori ve Sapena 2002, Gregori vd. 2016), Hadzic ve Pap (Hadzic ve Pap 2002), Mihet (Mihet 2004, 2008) gibi araştırmacılar bulanık sabit nokta teoremi ve bulanık metrik uzayların diğer özellikleri üzerine çalışmışlardır. Tüm bu gelişmelerle birlikte yeni tanımlanan daralma dönüşümleri ile hem klasik metrik uzaylarda hem de bulanık metrik uzaylarda birçok sabit nokta teorisi literatüre kazandırmıştır. Bulanık metrik uzaylarda sabit nokta teorisi üzerine çok sayıda çalışma mevcuttur (Abbas vd. 2011, Wardowski 2013, Cho vd. 2018, Sedghi vd. 2018, Mahmood vd. 2019, Wang vd. 2019, Tiwari ve Som 2019). İlgilenen araştırmacılar bu çalışmalara ve buradaki referanslara bakabilir.

Öte yandan, uygulamalı matematikte sabit nokta teorisi ile çözülebilecek birçok problem olmasına rağmen, bir tek sabit noktanın varlığını kanıtlamak her zaman kolay değildir. Aslında, uygulamalara bakıldığında, birçok güncel reel problemlerde yaklaşık bir çözümün fazlasıyla yeterli olduğu görülmektedir. Bu nedenle sabit noktaların varlığı kesinlikle gerekli değildir, "yaklaşık" sabit noktaların varlığı gereklidir. Doğal olarak, ε-sabit nokta (veya yaklaşık sabit nokta) kavramı ve yaklaşık sabit nokta özelliğine sahip fonksiyon kavramları üzerinde durulmuş ve bunlarla ilgili uygun bir teori elde edilmiştir. Bu yaklaşık sabit nokta kavramının çekici olmasının bir nedeni de problemin kesin çözümü için güçlü koşulların eklenmesidir. Sorunun yaklaşık çözümünü bulmak daha az şart koyarak daha kolay olabilir. Dolayısıyla bir fonksiyonun yaklaşık sabit noktasının tanımlanması ve bu kavrama ilişkin teorilerin üretilmesi kaçınılmaz olmuştur. İlk olarak klasik metrik uzaylarda verilen yaklaşık sabit nokta kavramı daha sonra hızla bulanık metriklerde geliştirilmiştir (Matouskova ve Reich 2003, Berinde 2006, 2007, Pacurar ve Pacurar 2007, Anoop ve Ravindran 2011, Dey ve Saha 2013, Dey vd. 2013, Ertürk vd. 2022, Cona 2023).

Tüm bu gelişmeler incelendiğinde bulanık küme kavramının sadece analiz ve topolojide değil uygulamalı matematik ve birçok mühendislik alanında da yaygın bir kullanıma sahip olduğu görülmektedir. Bulanık kümelerde yaklaşık sabit nokta kavramının disiplinler arası bir araştırma alanı olarak ortaya çıkması bizi yaklaşık sabit üzerine çalışmaya motive etmiştir. Bu çalışmada, klasik analizde mevcut olan f ve ψ daralma dönüşüm sınıflarının sezgisel bulanık versiyonları tanımlanmıştır. Ayrıca bu dönüşümlerin hangi koşullar altında yaklaşık sabit nokta özelliğine sahip olduğu araştırılmıştır.

2. Materyal ve Metot

Bu bölümde çalışmamıza temel teşkil eden bazı kavramlara ve ilgili örneklere yer verilecektir. İlk olarak sürekli t-norm, sürekli t-conorm ve bu tanımlara bağlı olarak bulanık metrik, sezgisel bulanık metrik, bulanık norm ve sezgisel bulanık norm tanımları ifade edilecektir. Daha sonra ise sabit nokta teorisi ile ilgili temel kavramlar ve bu kapsamda çalışmamızda kullanacağımız daralma dönüşümleri hakkında bilgi verilecektir.

Tanım 2.1: $*:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ ikili işlem tanımlansın. $\forall a,b,c,d\in[0,1]$ için;

I. $*$ işlemi birleşmeli ve değişmeli,
II. $*$ işlemi süreklidir ,
III. $a*1=a$,
IV. $a\le c$ ve $b\le d$ iken $a*b\le c*d$,

koşulları sağlanıyor ise $*$ işlemine sürekli t-norm adı verilir (Schwiezer ve Sklar 1960).

Aşağıda verilen iki işlem sürekli t-norma birer örnektir.

$a*b=a.b$ ve $a*b=min\{a,b\}$

Tanım 2.2: $\lozenge:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ olarak tanımlanan bir ikili işlem olsun. $\forall a,b,c,d\in[0,1]$ için

I. $\lozenge$ işlemi birleşmeli ve değişmeli,
II. $\lozenge$ işlemi sürekli,
III. $a\lozenge 0=a$,
IV. $a\le c$ ve $b\le d$ olduğunda $a\lozenge b\le c\lozenge d$,

koşullarını sağlanıyor ise $\lozenge$ işlemine sürekli t-conorm adı verilir (Schwiezer ve Sklar 1960).

Aşağıda verilen iki işlem sürekli t-conorma birer örnek olarak verilebilir.

$a \lozenge b = min\{1,\ a+b\}$ ve $a \lozenge \mathrm{b} = max\{a, b\}$

Tanım 2.3: Eğer X keyfi seçilmiş küme, $*$ sürekli bir t-norm ve M de $X^2 \times [0,\infty)$ üzerinde $\forall u, v, w \in X$, $\forall s, t > 0$ için

- **I.** $M(u,v,t) > 0$,
- **II.** $M(u,v,t) = 1 \Leftrightarrow u = v$,
- **III.** $M(u,v,t) = M(v,u,t)$,
- **IV.** $M(u,v,t) * M(v,w,s) \leq M(u,w,t+s)$,
- **V.** $M(u,v,\ \cdot\ ) : (0,\infty) \to (0,1]$ sürekli,

koşullarını sağlayan bir bulanık küme ise $(X, M, *)$ sıralı üçlüsüne bir bulanık metrik uzay adı verilir (George ve Veermani 1997).

Tanım 2.4: $X \neq \emptyset$ ve $*$ işlemi sürekli t-norm, $\lozenge$ işlemi sürekli t-conorm ve $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ kümeleri $X^2 \times (0,\infty)$ üzerinde bulanık kümeler olsun. Eğer $\forall u, v \in X$, $\forall s, t > 0$ için

- **I.** $\mathcal{M}(u,v,t) + \mathcal{N}(u,v,t) \leq 1$,
- **II.** $\mathcal{M}(u,v,t) > 0$,
- **III.** $\mathcal{M}(u,v,t) = 1 \Leftrightarrow u = v$,
- **IV.** $\mathcal{M}(u,v,t) = \mathcal{M}(v,u,t)$,
- **V.** $\mathcal{M}(u,v,t) * \mathcal{M}(v,w,s) \leq \mathcal{M}(u,w,t+s)$,
- **VI.** $\mathcal{M}(u,v,\ \cdot\ ) : (0,\infty) \to [0,1]$ sürekli,
- **VII.** $\mathcal{N}(u,v,t) < 1$,
- **VIII.** $\mathcal{N}(u,v,t) = 0 \Leftrightarrow u = v$
- **IX.** $\mathcal{N}(u,v,t) = \mathcal{N}(v,u,t)$,
- **X.** $\mathcal{N}(u,v,t) \lozenge \mathcal{N}(v,w,s) \geq \mathcal{N}(u,w,t+s)$,
- **XI.** $\mathcal{N}(u,v,\ \cdot\ ) : (0,\infty) \to [0,1]$ sürekli,

şartları sağlanıyor ise $(X, \mathcal{M}, \mathcal{N}, *, \lozenge)$ beşlisine sezgisel bulanık metrik uzay denir (Park 2004).

Burada $\mathcal{M}(u,v,t)$ fonksiyonu u ve v nin t ye göre birbirine yakın olma ve $\mathcal{N}(u,v,t)$ fonksiyonu ise u ve v nin t ye göre birbirine yakın olmama derecesidir.

Tanım 2.5: X bir vektör uzayı, $*$ dönüşümü sürekli t-norm ve N de $X \times (0,\infty)$ da tanımlı bir bulanık küme olsun. $\forall u, v \in X$, $\forall t, s > 0$ için

- **I.** $N(u,t) > 0$,
- **II.** $N(u,t) = 1 \Leftrightarrow u = 0$,
- **III.** Her $\alpha \neq 0$ için $N(\alpha u, t) = N\left(u, \frac{t}{|\alpha|}\right)$,
- **IV.** $N(u,t) * N(v,s) \leq N(u+v, t+s)$,
- **V.** $N(u,\ \cdot\ ) : (0,\infty) \to [0,1]$ sürekli,
- **VI.** $\lim_{t\to\infty} N(u,t) = 1$,

şartları sağlanıyor ise N bulanık kümesine X vektör uzayı üzerinde bir bulanık norm ve $(X, N, *)$ üçlüsüne de bulanık normlu uzay adı verilir (Saadati ve Vaezpour 2005).

Tanım 2.6: X bir vektör uzayı, $*$ işlemi sürekli bir t-norm, $\lozenge$ işlemi ise sürekli bir t-conorm ve $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ kümeleri $X \times (0,\infty)$ üzerinde bulanık kümeler olsun. Eğer $\forall u, v \in X$, $\forall s, t > 0$ için;

- **I.** $\mathcal{M}(u,t) + \mathcal{N}(u,t) \leq 1$,
- **II.** $\mathcal{M}(u,t) > 0$,
- **III.** $\mathcal{M}(u,t) = 1 \Leftrightarrow u = 0$,
- **IV.** $\alpha \neq 0$ için $\mathcal{M}(\alpha u, t) = \mathcal{M}\left(u, \frac{t}{|\alpha|}\right)$,
- **V.** $\mathcal{M}(u,t) * \mathcal{M}(v,s) \leq \mathcal{M}(u+v, t+s)$,
- **VI.** $\mathcal{M}(u,\ \cdot\ ): (0,\infty) \to [0,1]$ sürekli,
- **VII.** $\lim_{t\to\infty} \mathcal{M}(u,t) = 1$ ve $\lim_{t\to 0} \mathcal{M}(u,t) = 0$,
- **VIII.** $\mathcal{N}(u,t) < 1$,
- **IX.** $\mathcal{N}(u,t) = 0 \Leftrightarrow u = 0$,
- **X.** $\alpha \neq 0$ için $\mathcal{N}(\alpha u, t) = \mathcal{N}\left(u, \frac{t}{|\alpha|}\right)$,
- **XI.** $\mathcal{N}(u,t) \lozenge \mathcal{N}(v,s) \geq \mathcal{N}(u+v, t+s)$,
- **XII.** $\mathcal{N}(u,\ \cdot\ ): (0,\infty) \to [0,1]$ sürekli,
- **XIII.** $\lim_{t\to\infty} \mathcal{N}(u,t) = 0$ ve $\lim_{t\to 0} \mathcal{N}(u,t) = 1$

şartları sağlanıyorsa $(X, \mathcal{M}, \mathcal{N}, *, \lozenge)$ beşlisine bir sezgisel bulanık normlu uzay adı verilir. Öte yandan, eğer $(X, \mathcal{M}, \mathcal{N}, *, \lozenge)$ bir sezgisel bulanık normlu uzay ise

XIV. Her $\alpha \in [0,1]$ için $\alpha * \alpha = \alpha$, $\alpha \lozenge \alpha = \alpha$

koşulu sağlanır (Saadati ve Park 2006).

Tanım 2.4 ve Tanım2.6 da kısalık adına $(X, \mathcal{M}, \mathcal{N}, *, \lozenge)$ beşlisi $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ ikilisi ile de ifade edilebilir.

Örnek 2.7: $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzay olsun. $\forall a, b \in [0,1]$ için sırasıyla sürekli t-norm ve sürekli t-conorm

$a * b = a.b,\ \ a \lozenge b = min\{1, a+b\}$

ve $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{N}$ ise her $t \in \mathbb{R}^+$ için $X \times (0,\infty)$ üzerinde

$\mathcal{M}(u,t) = \frac{t}{t+\|u\|}$, $\mathcal{N}(u,t) = \frac{\|u\|}{t+\|u\|}$

olarak tanımlı bulanık kümeler olsun. Bu taktirde $(X, \mathcal{M}, \mathcal{N}, *, \lozenge)$ bir sezgisel bulanık normlu uzaydır (Saadati ve Park 2006).

Tanım 2.8: (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. $\forall\ u, v \in X$ için,

$d\big(T(u), T(v)\big) \leq \lambda d(u,v)$, şartını sağlayan en az bir $\lambda \in [0,1)$ sayısı bulunabiliyorsa T ye daralma (contraction) dönüşümü veya daraltan dönüşüm λ ya ise daralma oranı denir (Berinde 2007).

Literatürde sabit nokta teorisi üzerine yapılan çalışmalar ile birlikte birçok daralma tanımı yapılmıştır. Kannan, Chatterjea, Zamfirecu, yarı daralma, kesin daralma, hemen hemen daralma dönüşümleri sadece bunlardan bazılarıdır. Daralma koşulları bazı fonksiyonlar yardımıyla da genelleştirilmiştir. Bu konuda oldukça fazla çalışma mevcuttur. Fakat, burada sadece çalışmamızda ele aldığımız $f-$ daralma dönüşümü ve ψ −bulanık daralma dönüşümü tanımlarına yer verilecektir.

Tanım 2.9 (f − Daralma Dönüşümü): (X,d) bir metrik uzay ve $f,T: X \longrightarrow X$ iki dönüşüm olsun. Bu durumda $\forall\, u,v \in X$ için

$$d\big(fT(u), fT(v)\big) \leq kd\big(f(u), f(v)\big),$$

olacak şekilde $0 < k < 1$ sayısı varsa T dönüşümüne f −daralma dönüşümü adı verilir (Beiranvand vd. 2009).

Burada $f = I$ (I birim dönüşüm) alınması halinde f −daralma dönüşümlerinin daralma dönüşümlerine denk olduğu görülür.

Örnek 2.10: $X = [1,\infty)$ uzayı mutlak değer metriği ile birlikte alınsın ve

$$T : X \longrightarrow X\ ,\quad T(u) = 2u$$
$$f : X \longrightarrow X\ ,\quad f(u) = \frac{1}{u} + 1$$

olarak tanımlansın.

$$\begin{aligned} d\big(fT(u), fT(v)\big) &= \left|\frac{1}{2u} + 1 - \frac{1}{2v} - 1\right| \\ &\leq \frac{1}{2}\left|\frac{1}{u} - \frac{1}{v}\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|\frac{1}{u} + 1 - \frac{1}{v} - 1\right| \\ &= \frac{1}{2}|f(u) - f(v)| \\ &= \frac{1}{2}d\big(f(u), f(v)\big) \end{aligned}$$

olduğundan T bir f −daralma dönüşümüdür (Beiranvand vd. 2009).

Şimdi de Mihet tarafından tanımlanan ψ −bulanık daralma dönüşümünün tanımını ifade edelim.

Tanım 2.11: $\psi: [0,1] \to [0,1]$,

I. ψ sürekli,
II. ψ azalmayan,
III. $\forall t \in (0,1)$ için $\psi(t) > t$,

özelliklerini sağlayan tüm ψ dönüşümlerinin sınıfı $\Psi = \{\psi \mid \psi: [0,1] \to [0,1]\}$ olsun. Ayrıca, $(X, M,*)$ bulanık metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer T dönüşümü $\forall\, u,v \in X$ ve $t > 0$ için

$$M(T(u), T(v), t) \geq \psi\big(M(u,v,t)\big),$$

şartını sağlıyorsa T ye ψ − bulanık daralma dönüşümü denir (Mihet 2004).

Lemma 2.12: $\psi \in \Psi$ ise $\psi(1) = 1$ dir (Di Bari ve Vetro 2005).

Lemma 2.13: $\psi \in \Psi$ ise her $t \in (0,1)$ için $\lim\limits_{k\to\infty} \psi^k\,(t) = 1$ dir (Di Bari ve Vetro 2005).

Örnek 2.14: $X = [0,\infty)$, $\forall a,b \in [0,1]$ için $a * b = min\{a,b\}$ ve her $t \in (0,\infty)$ her $u,v > 0$ için

$$M(u,v,t) = \begin{cases} 1\ , & t \leq |u-v| \\ 0\ , & t > |u-v| \end{cases}$$

olsun. $(X, M,*)$ bir bulanık metrik uzaydır (Gregori ve Sapena 2002). $\psi \in \Psi$ olsun $\psi(1) = 1$ olduğundan ve $M(u,v,t) > 0$ ise

$$M(u,v,t) = 1 \ \Longrightarrow\ \psi\big(M(u,v,t)\big) = 1$$

sağlanacağından $(X, M,*)$ da alınan bir T bulanık dönüşümü için

$$|u - v| < t \ \Longrightarrow\ |T(u) - T(v)| < t.$$

Yani her $u,v \in X$ için

$$|T(u) - T(v)| \leq |u - v|$$

dir. Tersine, $T: X \to X$ dönüşümü her $u,v \in X$ için

$$|T(u) - T(v)| \leq |u - v|$$

oluyorsa, $\psi(0) = 0$ ve $\psi \in \Psi$ olmak üzere T bir ψ −bulanık daralma dönüşümdür.

Örnek 2.15: $X = (0, \infty)$, $\forall\, a, b \in [0,1]$ için $a * b = a.b$ ve her $t \in (0, \infty)$ her $u, v \in X$ için

$$M(u, v, t) = \frac{min(u, v)}{max(u, v)},$$

olsun. $(X, M,*)$ bir tam güçlü bulanık metrik uzaydır (Radu 2002).
Öte yandan $\forall t \in (0,1)$ için $\sqrt{t} > t$ olduğundan $\psi(t) = \sqrt{t}$ olmak üzere $T: X \to X$, $T(u) = \sqrt{u}$ dönüşümü bir $\psi -$ bulanık daralma dönüşümdür.
Gerçekten; $u > v$ olsun.

$$\begin{aligned} M(T(x), T(y), t) &= \frac{min\big(T(u), T(v)\big)}{max\big(T(u), T(v)\big)} \\ &= \frac{min\big(\sqrt{u}, \sqrt{v}\big)}{max\big(\sqrt{u}, \sqrt{v}\big)} \\ &= \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}} \\ &= \sqrt{\frac{v}{u}} \\ &\geq \sqrt{\frac{min(u, v)}{max(u, v)}} \\ &= \sqrt{M(u, v, t)} \end{aligned}$$

olduğundan T dönüşümü bir $\psi -$ bulanık daralma dönüşümüdür.

Tanım 2.16: $X \neq \emptyset$, $T: X \to X$ herhangi bir dönüşüm olsun. $T(u) = u$ olacak şekilde bir $u \in X$ varsa, bu u noktasına T dönüşümünün sabit noktası adı verilir. T dönüşümünün tüm sabit noktalarının kümesi $F(T)$ ile gösterilecektir (Banach 1922).

Bu bölümde son olarak Banach sabit nokta (Banach 1922) ve yaklaşık sabit nokta teoremlerini ifade edelim.

Teorem 2.17: (X, d) tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir daralma dönüşümü olsun. Şu halde,

- **I.** T, X te bir tek u sabit noktasına sahiptir;
- **II.** Herhangi bir $u_0 \in X$ için $u_{n+1} = Tu_n$; $n = 0,1,2, \dots$ ile tanımlanan Picard iterasyonu tarafından üretilen $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ dizi u sabit noktasına yakınsar.

Tanım 2.18: (X, d) bir metrik uzay, $T: X \to X, \varepsilon > 0, u_0 \in X$ olsun. Eğer

$$d(T(u_0), u_0) < \varepsilon ,$$

ise u_0 noktasına T in yaklaşık (approximate) sabit noktası veya $\varepsilon -$sabit noktası denir (Berinde 2007). Çalışma boyunca, T in yaklaşık sabit noktalarının kümesi

$$F_\varepsilon(T) = \{u \in X : \ u,\ T \text{ nin bir } \varepsilon - \text{sabit noktası}\}$$

şekilde ifade edilecektir.

3. Bulgular

Bu bölümde ilk olarak ispatlarda ihtiyaç duyulan sezgisel bulanık normlu uzaylardaki bazı temel kavramlara yer verilecektir. Daha sonra yaklaşık sabit nokta özelliğini araştırmak için sezgisel bulanık asimptotik regülerlik tanımı ifade edilecektir. Son olarak ise f ve ψ daralma dönüşüm sınıflarının sezgisel bulanık versiyonu tanımlanarak yaklaşık sabit nokta özellikleri araştırılacaktır.

Tanım 3.1: (u_k) dizisi $(X, \mathcal{M}, \mathcal{N}, *, \lozenge)$ sezgisel bulanık normlu uzayında x e yakınsaktır denir ancak ve ancak her $t > 0$ ve $k \to \infty$ için

$\mathcal{M}(u_k - u, t) \to 1$ ve $\mathcal{N}(u_k - u, t) \to 0$

dir. (u_k) dizisi sezgisel bulanık normlu uzayında u ya yakınsak ise $u_k \xrightarrow[(\mathcal{M},\mathcal{N})]{} u$ şeklinde gösterilir (Saadati ve Park 2006).

Tanım 3.2: $(X, \mathcal{M}, \mathcal{N}, *, \lozenge)$ sezgisel bulanık normlu bir uzay olsun. Eğer $(X, \mathcal{M}, \mathcal{N}, *, \lozenge)$ deki her Cauchy dizisi yakınsaksa $(X, \mathcal{M}, \mathcal{N}, *, \lozenge)$ sezgisel bulanık normlu uzayına tamdır denir (Saadati ve Park 2006).

Tanım 3.3: X ve Y iki sezgisel bulanık normlu uzay ve $f: X \to Y$ bir fonksiyon ve $u_0 \in X$ olsun. Eğer, X teki herhangi bir (u_k) dizisi u_0 a yakınsak iken $f(u_k)$ dizisi de Y de $f(u_0)$ a yakınsak ise f e $u_0 \in X$ de süreklidir denir. Ayrıca f, X in her noktasında sürekliyse bu taktirde f e X üzerinde süreklidir denir (Mursaleen ve Mohiuddine 2009).

Tanım 3.4: $(X, \mathcal{M}, \mathcal{N}, *, \lozenge)$ sezgisel bulanık normlu bir uzay ve $A \subset X$ olsun. $\forall u \in X$ için $u_k \xrightarrow[(\mathcal{M},\mathcal{N})]{} u$ olacak şekilde A da bir (u_k) dizisi var ise A ya X de yoğundur denir (Mursaleen vd. 2010).

Lemma 3.5: $(X, \mathcal{M}, \mathcal{N}, *, \lozenge)$ sezgisel bulanık normlu uzay olsun. Bu taktirde, aşağıdakiler sağlanır:

- **I.** $u \in X$ için sırasıyla $\mathcal{M}(u,\cdot)$ ve $\mathcal{N}(u,\cdot)$ azalmayan ve artmayan fonksiyonlardır.
- **II.** Herhangi bir $t > 0$ için

$\mathcal{M}(u-v,t)=\mathcal{M}(v-u,t)$,
$\mathcal{N}(u-v,t)=\mathcal{N}(v-u,t)$,

(Saadati ve Park 2006).

Tanım 3.6: $(X,\mathcal{M},\mathcal{N},*,\lozenge)$ sezgisel bulanık normlu uzay, $f:X\to X$ bir fonksiyon olsun. Şu halde verilen bir $\varepsilon>0$ ve $\forall\, t>0$ için

$$\mathcal{M}(f(u_0)-u_0\,,t)>1-\varepsilon$$

ve

$$\mathcal{N}(f(u_0)-u_0\,,t)<\varepsilon$$

ise $u_0\in X$, f nin bir sezgisel bulanık yaklaşık sabit noktası veya ε-sabit noktası olarak adlandırılır. f nin sezgisel bulanık yaklaşık sabit noktalarının kümesi $F_\varepsilon^{(\mathcal{M},\mathcal{N})}(f)$ ile gösterilir (Ertürk vd. 2022).

Örnek 3.7: $T:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $T(u)=u+\frac{1}{3}$ ile verilsin. $|\cdot|$, $\mathbb{R}$ üzerinde alışılmış mutlak değer normunu göstersin. $\forall\, a,b\in[0,1]$ için $a*b=a.b$, $a\lozenge b=min\{1,a+b\}$ ise

$$\mathcal{M}(u,t)=\frac{t}{t+|u|} \text{ ve } \mathcal{N}(u,t)=\frac{|u|}{t+|u|}$$

olarak tanımlansın. Şu halde $(\mathbb{R},\mathcal{M},\mathcal{N},*,\lozenge)$ bir sezgisel bulanık normlu uzaydır. T bir sabit noktaya sahip değildir. Eğer $\varepsilon>\frac{1}{3t+1}$ ve $t>0$ için

$$\mathcal{M}(T(u)-u,t)=\frac{t}{t+|T(u)-u|}>1-\varepsilon$$

ve

$$\mathcal{N}(T(u)-u,t)=\frac{|T(u)-u|}{t+|T(u)-u|}<\varepsilon$$

olduğundan dolayı her $u\in\mathbb{R}$, T için bir sezgisel bulanık yaklaşık sabit noktadır. Fakat $\varepsilon<\frac{1}{3t+1}$ ve $t>0$, $F_\varepsilon^{(\mathcal{M},\mathcal{N})}(T)=\emptyset$ dur.

Tanım 3.8: $(X,\mathcal{M},\mathcal{N},*,\lozenge)$ sezgisel bulanık normlu uzay ve $f:X\to X$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall u\in X,\, t>0$ için

$$\lim_{k\to\infty}\mathcal{M}(f^{k+1}(u)-f^k(u),t)=1$$

ve

$$\lim_{k\to\infty}\mathcal{N}(f^{k+1}(u)-f^k(u),t)=0$$

ise f e sezgisel bulanık asimptotik regüler denir (Ertürk vd. 2022).

Tanım 3.9: Eğer her $\varepsilon>0$ için $F_\varepsilon^{(\mathcal{M},\mathcal{N})}(f)\neq\emptyset$ ise f sezgisel bulanık yaklaşık sabit nokta özelliğine sahiptir denir (Ertürk vd. 2022).

Aşağıdaki teorem sezgisel bulanık asimptotik regülerlik ile sezgisel bulanık yaklaşık sabit nokta arasındaki önemli bir bağlantıyı ortaya koymaktadır.

Teorem 3.10: $(X,\mathcal{M},\mathcal{N},*,\lozenge)$ sezgisel bulanık normlu uzay, $f:X\to X$ bir fonksiyon olsun. f sezgisel bulanık asimptotik regüler ise f sezgisel bulanık yaklaşık sabit nokta özelliğine sahiptir (Ertürk vd. 2022).

Literatüre bakıldığında Kannan, Chatterjea, Zamfrescu, zayıf daralma ve R-daralma gibi dönüşümlerin sezgisel bulanık versiyonları tanımlanarak bu dönüşümlerin sezgisel bulanık normlu uzaylarda hangi koşullar altında yaklaşık sabit noktaya sahip olduğunu ortaya konmuştur (Ertürk vd. 2022, Cona 2023). Bu çalışmada ilk olarak Tanım 2.11'de verilen dönüşüm sınıfının sezgisel bulanık versiyonunu tanımlanacak. Daha sonra bu dönüşümün hangi şartlar altında yaklaşık sabit nokta özelliğini sağladığını veren teorem ispatlanacaktır.

Tanım 3.11 (Sezgisel $\psi-$ Bulanık Daralma Dönüşümü): $(X,\mathcal{M},\mathcal{N},*,\lozenge)$ bir sezgisel bulanık normlu uzay, $T:X\to X$ bir dönüşüm ve ψ −bulanık daralma dönüşümü olsun. Eğer $\forall u,v\in X$ ve $t>0$ için

$$\mathcal{M}(T(u)-T(v),t)\geq\ \psi\big(\mathcal{M}(u-v,t)\big)$$
$$\mathcal{N}(T(u)-T(v),t)\leq\ \psi\big(\mathcal{N}(u-v,t)\big)$$

olacak şekilde ψ fonksiyonu varsa T dönüşümüne sezgisel ψ −bulanık daralma dönüşümü adı verilir.

Teorem 3.12: $(X,\mathcal{M},\mathcal{N},*,\lozenge)$ bir sezgisel bulanık normlu uzay, $T:X\to X$ bir sezgisel ψ −bulanık daralma dönüşümü olsun. Eğer $\forall u,v\in X$ için

$$\mathcal{M}(T(u)-T(v),t)\geq\psi\left(\mathcal{M}\left(u-v,\frac{t}{\lambda}\right)\right)$$
$$\mathcal{N}(T(u)-T(v),t)\leq\ \psi\left(\mathcal{N}\left(u-v,\frac{t}{\lambda}\right)\right)$$

olacak şekilde her $t=0$ için $\lim_{k\to\infty}\psi^k\,(t)=0$ ve $\lambda\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ sayısı var ise bu taktirde $\forall\varepsilon\in(0,1)$ için $F_\varepsilon^{(\mathcal{M},\mathcal{N})}(T)\neq\emptyset$ dır.

İspat: $u \in X, \varepsilon \in (0,1)$ ve $t > 0$ olsun. Sezgisel bulanık normlu uzayın ve T sezgisel $\psi-$bulanık daralma dönüşümünün özellikleri kullanılarak,

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{M}(T^k(u) - T^{k+1}(u), t) = \\
&= \mathcal{M}\left(T\left(T^{k-1}(u)\right) - T\left(T^k(u)\right), t\right) \\
&\geq \psi\left(\mathcal{M}\left(T^{k-1}(u) - T^k(u), \frac{t}{\lambda}\right)\right) \\
&= \psi\left(\mathcal{M}\left(\begin{matrix} T^{k-1}(u) - T^{k-1}(u) \\ +T^{k-1}(u) - T^k(u), \frac{t}{2\lambda} + \frac{t}{2\lambda} \end{matrix}\right)\right) \\
&\geq \psi\left(\underbrace{\mathcal{M}\left(T^{k-1}(u) - T^{k-1}(u), \frac{t}{2\lambda}\right)}_{1} * \mathcal{M}\left(T^{k-1}(u) - T^k(u), \frac{t}{2\lambda}\right)\right) \\
&= \psi\left(\mathcal{M}\left(T^{k-1}(u) - T^k(u), \frac{t}{2\lambda}\right)\right) \\
&> \mathcal{M}\left(T^{k-1}(u) - T^k(u), \frac{t}{2\lambda}\right) \\
&= \mathcal{M}\left(T(T^{k-2}(u)) - T(T^{k-1}(u)), \frac{t}{2\lambda}\right) \\
&\geq \psi\left(\mathcal{M}\left(T^{k-2}(u) - T^{k-1}(u), \frac{t}{2\lambda^2}\right)\right) \\
&\geq \psi\left(\mathcal{M}\left(\begin{matrix} T^{k-2}(u) - T^{k-2}(u) \\ +T^{k-2}(u) - T^{k-1}(u), \frac{t}{4\lambda^2} + \frac{t}{4\lambda^2} \end{matrix}\right)\right) \\
&\geq \psi\left(\underbrace{\mathcal{M}\left(T^{k-2}(u) - T^{k-2}(u), \frac{t}{4\lambda^2}\right)}_{1} * \mathcal{M}\left(T^{k-2}(u) - T^{k-1}(u), \frac{t}{4\lambda^2}\right)\right) \\
&= \psi\left(\mathcal{M}\left(T^{k-2}(u) - T^{k-1}(u), \frac{t}{(2\lambda)^2}\right)\right) \\
&> \mathcal{M}\left(T^{k-2}(u) - T^{k-1}(u), \frac{t}{(2\lambda)^2}\right) \\
&\quad \vdots \\
&> \mathcal{M}\left(u - T(u), \frac{t}{(2\lambda)^k}\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece, $\lambda \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ olduğundan $k \to \infty$ iken $\frac{t}{(2\lambda)^k} \to \infty$ dir. Sezgisel bulanık normun (vii) özelliklerinden

$$
\lim_{k\to\infty} \mathcal{M}\left(u - T(u), \frac{t}{(2\lambda)^k}\right) = 1
$$

olup

$$
\lim_{k\to\infty} \mathcal{M}(T^k(u) - T^{k+1}(u), t) = 1 \tag{1}
$$

dir. Ayrıca,

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{N}(T^k(u) - T^{k+1}(u), t) \\
&= \mathcal{N}\left(T\left(T^{k-1}(u)\right) - T\left(T^k(u)\right), t\right) \\
&\leq \psi\left(\mathcal{N}\left(T^{k-1}(u) - T^k(u), \frac{t}{\lambda}\right)\right) \\
&= \psi\left(\mathcal{N}\left(T(T^{k-2}(u)) - T(T^{k-1}(u), \frac{t}{\lambda}\right)\right) \\
&\leq \psi\left(\psi\left(\mathcal{N}\left(T^{k-2}(u) - T^{k-1}(u), \frac{t}{\lambda^2}\right)\right)\right) \\
&= \psi^2\left(\mathcal{N}\left(T^{k-2}(u) - T^{k-1}(u), \frac{t}{\lambda^2}\right)\right) \\
&= \psi^2\left(\mathcal{N}\left(T\left(T^{k-3}(u)\right) - T\left(T^{k-2}(u)\right), \frac{t}{\lambda^2}\right)\right) \\
&\leq \psi^2\left(\psi\left(\mathcal{N}\left(T^{k-3}(u) - T^{k-2}(u), \frac{t}{\lambda^3}\right)\right)\right) \\
&= \psi^3\left(\mathcal{N}\left(T^{k-3}(u) - T^{k-2}(u), \frac{t}{\lambda^3}\right)\right) \\
&\quad \vdots \\
&\leq \psi^k\left(\mathcal{N}\left(u - T(u), \frac{t}{\lambda^k}\right)\right)
\end{aligned}
$$

olup $\lambda \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ olduğundan $k \to \infty$ iken $\frac{t}{\lambda^k} \to \infty$ dir. Sezgisel bulanık normun (xiii) özelliklerinden $\lim_{k\to\infty} \mathcal{N}\left(u - T(u), \frac{t}{\lambda^k}\right) = 0$ ve her $t = 0$ için $\lim_{k\to\infty} \psi^k(t) = 0$ olduğundan

$$
\lim_{k\to\infty} \psi^k\left(\mathcal{N}\left(u - T(u), \frac{t}{\lambda^k}\right)\right) = 0
$$

dir. Böylece,

$$
\lim_{k\to\infty} \mathcal{N}(T^k(u) - T^{k+1}(u), t) = 0 \tag{2}
$$

bulunur. Dolayısıyla (1) ve (2) den sezgisel $\psi-$bulanık daralma dönüşümü sezgisel bulanık yaklaşık sabit nokta özelliğine sahiptir.

Şimdi de Tanım 2.9 da verilen dönüşüm sınıfının sezgisel bulanık versiyonunu tanımlayalım.

Tanım 3.13 (Sezgisel f −Bulanık Daralma Dönüşümü): $(X, \mathcal{M}, \mathcal{N}, *, \Diamond)$ bir sezgisel bulanık normlu uzay ve $f, T: X \to X$ iki dönüşüm olsun. $\forall u, v \in X$, $t > 0$ için

$$
\mathcal{M}(fT(u) - fT(v), t) \geq \mathcal{M}\left(f(u) - f(v), \frac{t}{\lambda}\right)
$$

$$
\mathcal{N}(fT(u) - fT(v), t) \leq \mathcal{N}\left(f(u) - f(v), \frac{t}{\lambda}\right)
$$

olacak şekilde $\lambda \in (0,1)$ sayısı varsa T dönüşümüne sezgisel f −bulanık daralma dönüşümü denir.

Sezgisel f − bulanık daralma dönüşümleri $f = I$ (I birim dönüşüm) alınması halinde sezgisel bulanık daralma dönüşümlerine denk olur.

Aşağıdaki teoremde ise sezgisel f −bulanık daralma dönüşümünün yaklaşık sabit nokta özelliğini sağladığı ispatlanacaktır.

Teorem 3.14: $(X, \mathcal{M}, \mathcal{N}, *, \lozenge)$ sezgisel bulanık normlu uzay. $f, T: X \to X$ iki dönüşüm ve T bir sezgisel $f-$ bulanık daralma dönüşümü olsun. Bu durumda $\forall \varepsilon \in (0,1)$ için $F_\varepsilon^{(\mathcal{M},\mathcal{N})}(T) \neq \emptyset$ dır.

İspat: $u \in X,\ \varepsilon \in (0,1)$, $t > 0$ olsun. Burada T sezgisel f −bulanık daralma dönüşümünün tanımı kullanılarak

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{M}(fT^k(u) - fT^{k+1}(u), t) = \\
&\mathcal{M}\big(f\big(TT^{k-1}(u)\big) - f\big(TT^k(u)\big), t\big) \\
&\geq \mathcal{M}\left(fT^{k-1}(u) - fT^k(u), \frac{t}{\lambda}\right) \\
&= \mathcal{M}\left(f\big(TT^{k-2}(u)\big) - f\big(TT^{k-1}(u)\big), \frac{t}{\lambda}\right) \\
&\geq \mathcal{M}\left(f\big(T^{k-2}(u)\big) - f\big(T^{k-1}(u)\big), \frac{t}{\lambda^2}\right) \\
&\geq \ \vdots \\
&\geq \mathcal{M}\left(fT(u) - fT^2(u), \frac{t}{\lambda^{k-1}}\right) \\
&\geq \mathcal{M}\left(f(u) - fT(u), \frac{t}{\lambda^k}\right)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{N}(fT^k(u) - fT^{k+1}(u), t) \\
&= \mathcal{N}\big(f\big(TT^{k-1}(u)\big) - f\big(TT^k(u)\big), t\big) \\
&\leq \mathcal{N}\left(fT^{k-1}(u) - fT^k(u), \frac{t}{\lambda}\right) \\
&= \mathcal{N}\left(f\big(TT^{k-2}(u)\big) - f\big(TT^{k-1}(u)\big), \frac{t}{\lambda}\right) \\
&\leq \mathcal{N}\left(f\big(T^{k-2}(u)\big) - f\big(T^{k-1}(u)\big), \frac{t}{\lambda^2}\right) \\
&\leq \quad \vdots \\
&\leq \mathcal{N}\left(fT(u) - fT^2(u), \frac{t}{\lambda^{k-1}}\right) \\
&\leq \mathcal{N}\left(f(u) - fT(u), \frac{t}{\lambda^k}\right)
\end{aligned}
$$

olduğundan T bir sezgisel f − bulanık daralma dönüşümdür. Her $\varepsilon > 0$, her $t > 0$ için

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}(u - T(u), t) &= \mathcal{M}\left(u - \frac{u}{3}, t\right) \\
&= \mathcal{M}\left(\frac{2u}{3}, t\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. $\lambda \in (0,1)$ ve $k \to \infty$ iken $\frac{t}{\lambda^k} \to \infty$ dur. Sezgisel bulanık normun (vii) ve (xiii) özelliklerinden

$$
\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty} \mathcal{M}(fT^k(u) - fT^{k+1}(u), \lambda t) \\
&\geq \lim_{k\to\infty} \mathcal{M}\left(f(u) - fT(u), \frac{t}{\lambda^k}\right) = 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty} \mathcal{N}(fT^k(u) - fT^{k+1}(u), \lambda t) \\
&\leq \lim_{k\to\infty} \mathcal{N}\left(f(u) - fT(u), \frac{t}{\lambda^k}\right) = 0
\end{aligned}
$$

elde edilir. Şu halde,

$$\lim_{k\to\infty} \mathcal{M}(fT^k(u) - fT^{k+1}(u), t) = 1 \tag{3}$$
$$\lim_{k\to\infty} \mathcal{N}(fT^k(u) - fT^{k+1}(u), t) = 0 \tag{4}$$

olup (3) ve (4) den sezgisel $f-$ bulanık daralma dönüşümünün sezgisel bulanık yaklaşık sabit nokta özelliğine sahip olduğu görülür.

Örnek 3.15: Örnek 3.7'de verilen sezgisel bulanık norm, sürekli t-norm ve sürekli t-conorm ile $X = (-\infty, +\infty)$ kümesi bir sezgisel bulanık normlu uzaydır. Şu halde

$$
\begin{aligned}
&T: X \to X\,,\ \ T(u) = \frac{u}{3}, \\
&f: X \to X\,,\ \ f(u) = u\,,
\end{aligned}
$$

dönüşümleri verilsin. T dönüşümün sabit noktası yoktur. Fakat her $u, v \in X, u \neq v$ ve her $t > 0$ için

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}(fT(u) - fT(v), t) &= \frac{t}{t + \left|\frac{u}{3} - \frac{v}{3}\right|} \\
&= \mathcal{M}(f(u) - f(v), t)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\mathcal{N}(fT(u) - fT(v), t) &= \frac{\left|\frac{u}{3} - \frac{v}{3}\right|}{t + \left|\frac{u}{3} - \frac{v}{3}\right|} \\
&= \mathcal{N}(fT(u) - fT(v), t)
\end{aligned}
$$

$$= \frac{t}{t + \left|\frac{2u}{3}\right|} > 1 - \varepsilon$$

ve

$$\mathcal{N}(u - T(u), \mathrm{t}) = \mathcal{N}\left(u - \frac{u}{3}, \mathrm{t}\right)$$

$$= \mathcal{N}\left(\frac{2u}{3}, \mathrm{t}\right)$$
$$= \frac{\left|\frac{2u}{3}\right|}{t + \left|\frac{2u}{3}\right|} < \varepsilon$$

eşitsizliklerinden $\frac{u}{3} < \frac{\varepsilon t}{2(1-\varepsilon)}$ yazılır. Her $\varepsilon > 0$ ve her $t > 0$ için $\frac{u}{3} < \frac{\varepsilon t}{2(1-\varepsilon)}$ olacak şekilde $u \in (0,1)$ olduğundan T dönüşümü yaklaşık sabit nokta özelliğine sahiptir.

4. Sonuçlar ve Tartışma

Bulanık kümelerde yaklaşık sabit nokta kavramı, sabit nokta kavramı kadar son dönemlerde araştırmalarda ön plana çıkmaktadır. Özellikle disiplinler arası bir araştırma konusu olması ve sonuçların uygulanabilir olması araştırmacıları bu konu üzerine çalışmaya teşvik etmektedir. Bu nedenle bu çalışmanın da özünü yaklaşık sabit nokta özelliği oluşturmaktadır. Öncelikle, klasik analizde sabit nokta teorisinde tanımlı bazı dönüşüm sınıflarının sezgisel bulanık versiyonları tanımlanmıştır. Daha sonra ise bu dönüşümlerin hangi koşullar altında yaklaşık sabit nokta özelliğini sağladığı kanıtlanmıştır. Şu halde sezgisel bulanık normlu uzaylarda, farklı dönüşüm sınıfları için de yaklaşık sabit nokta özelliği araştırılabilir.

Etik Beyanı

Bu çalışma Dr. Öğretim Üyesi Lale CONA danışmanlığında Gizem GÜZEL TAN tarafından 14/12/2023 tarihinde tamamlanan "Sezgisel Bulanık Normlu Uzaylarda Yaklaşık Sabit Nokta Özelliği " başlıklı ve 845848 tez no'lu yüksek lisans tezinden türetilmiştir.

Çıkar Çatışması Beyanı

Yazarların bu makalenin içeriğiyle ilgili olarak beyan edecekleri hiçbir çıkar çatışması yoktur.

Verilerin Kullanılabilirliği

Yazarlar, bu çalışmanın bulgularını destekleyen ana verilerin makale içerisinde mevcut olduğunu beyan ederler.

Teşekkür

Bu makaleye yorum ve önerileriyle katkıda bulunan hakemlere teşekkür ederiz.

5. Kaynaklar

Abu Osman, M.T., 1983. Fuzzy metric spaces and fixed fuzzy set theorem, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc*., **6**(1), 1-4.

Abbas, M., Imdad, M. and Gopal, D., 2011. ψ −Weak contractions in fuzzy metric spaces. *Iran. J. Fuzzy Syst.,* **8**, 141-148.

Alaca, C., Turkoglu, D. and Yildiz, C. 2006. Fixed points in intuitionistic fuzzy metric spaces. *Chaos, Solitons & Fractals*, **29**(5), 1073-1078 https://doi.org/10.1016/j.chaos.2005.08.066

Anoop, S. and Ravindran, K., 2011. On approximate fixed point property and fixed points. *International Mathematical Forum*, **6**, pp. 281-288.

Atanassov, K., 1986. Intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems,* **20** (1): 87 – 96. https://doi.org/10.1016/S0165-0114(86)80034-3

Atanassov K., 1994. New operations defined over the intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems,* **61**, 137–142. https://doi.org/10.1016/0165-0114(94)90229-1

Banach., S., 1922. Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur applications aux equations intégrales. *Fund. Math*, 3: 49. https://doi.org/10.4064/fm-3-1-133-181

Berinde, M., 2006. Approximate fixed point theorems. *Studia Univ. "Babeş-Bolyai" Mathematica*, LI (1), 11-15.

Berinde, V., 2007. Iterative Approximation of Fixed Points: Springer, Berlin. https://doi.org/10.1109/SYNASC.2007.49

Beiranvand, A., Moradi, S., Omid, M. and Pazandeh. H., 2009. Two fixed-point theorems for special mappings., arXiv:0903.1504v1. math.FA.

Chang, C. L., 1968. Fuzzy topological spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **24**, 182-190. https://doi.org/10.1016/0022-247X(68)90057-7

Cho, Y. J., Rassias, T. M. and Saadati, R., 2018. Generalized distances and fixed point theorems in fuzzy metric spaces. *In Fuzzy Operator Theory in Mathematical Analysis. Springer, Cham*., 155-176. https://doi.org/10.1007/978-3-319-93501-0_6

Cona, L., 2023. Approximate fixed point property for intuitionistic fuzzy R-Contractıon map in intuitionistic fuzzy normed spaces. Explorations in Mathematical Analysis: A Collection of Diverse Papers, Prof. Dr. İlker Eryılmaz (Editor), Bidge Publications, 298-316.

Dey, D. and Saha, M., 2013. Approximate fixed point of reich operator. *Acta Math. Univ. Comenianae,* **82**,119-123.

Dey, D., Laha, A. K. and Saha, M., 2013. Approximate coincidence point of two nonlinear mappings. *Journal of Mathematics,* Vol **2013**, Article ID 962058, 1-4. https://doi.org/10.1155/2013/962058

Di Bari, C. and Vetro, C., 2005. Fixed points, attractors and weak fuzzy contractive mappings in a fuzzy metric space. *J. Fuzzy Math.,* **13**, 973-982.

Dinda, B. ve Samanta, T., 2010. Intuitionistic fuzzy continuity and uniform convergence. *Int. J. Open Problems Compt. Math*, **3**(1), 8-26.

El Naschie, M. S., 1998. On the uncertainty of cantorian geometry and two-slit experiment. *Chaos, Solitons & Fractals,* **9**, 517–29. https://doi.org/10.1016/S0960-0779(97)00150-1

El Naschie, M.S., 2000. On the verifications of heterotic strings theory and E(oo) theory. *Chaos, Solitons & Fractals*, **11**, 2397–407. https://doi.org/10.1016/S0960-0779(00)00108-9

El Naschie, M.S., 2005. On a fuzzy Khaler-Like manifold which is consistent with two slit experiment, *Int. J. Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, **6**, 95-98. https://doi.org/10.1515/IJNSNS.2005.6.2.95

Ertürk, M., Karakaya, V., 2013. Correction: n-tuplet fixed point theorems for contractive type mappings in partially ordered metric spaces. *Journal of Inequalities and Applications*, **2013**: 196. https://doi.org/10.1186/1029-242X-2013-196

Ertürk, M., Karakaya, V., 2014. n −tuplet coincidence point theorems in intuitionistic fuzzy normed spaces. *Jour. Function Spaces Appl*., Volume **2014**, Article number 821342, pp. 1-14. https://doi.org/10.1155/2014/821342

Ertürk, M., Karakaya, V. and Mursaleen, M., 2022. Approximate fixed Point property in Ifns. *TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics,* **12**(1), 329-346.

George, A., Veermani, P. 1997. On some results of analysis for fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, **90**(3), 365-368. https://doi.org/10.1016/S0165-0114(96)00207-2

Grabiec, M., 1988. Fixed points in fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, **27**, 385-389. https://doi.org/10.1016/0165-0114(88)90064-4

Gregori, V. and Romaguera S., 2000. Some properties of fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems,* **115**, 485-489. https://doi.org/10.1016/S0165-0114(98)00281-4

Gregori, V. and Sapena, A., 2002. On fixed-point theorems in fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems,* **125**, 245-252. https://doi.org/10.1016/S0165-0114(00)00088-9

Gregori V. and Romaguera, S., 2004. Charancterizing completable fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, **144**, 411-420. https://doi.org/10.1016/S0165-0114(03)00161-1

Gregori, V., Miñana, J.J., Morillas, S. and Sapena, A., 2016. Characterizing a class of compltable fuzzy metric spaces. *Topology and its Applications*, **203**, 3-11. https://doi.org/10.1016/j.topol.2015.12.070

Gregori, V. and Miñana, J.J., 2016. On Fuzzy ψ −Contractive Sequences and Fixed Point Theorems. Fuzzy Sets Syst., **300**, 93–101. https://doi.org/10.1016/j.fss.2015.12.010

Gregori, V., Miñana J.J., Roig B. and Sapena, 2024. On completeness and fixed point theorems in fuzzy metric spaces. *Mathematics,* **12**(2), 287. https://doi.org/10.3390/math12020287

Hadzic O., Pap, E., 2002. A fixed point theorem for multivalued mapping inpropbalitistic metric spaces and an application in fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems,* **127**, 333-344. https://doi.org/10.1016/S0165-0114(01)00144-0

Karakaya, V., Şimşek, N., Ertürk, M. and Gürsoy, F., 2012. Statistical convergence of sequences of functions in intuitionistic fuzzy normed spaces. *Abstract and Applied Analysis,* Vol. **2012**, Issue 2012, 1-19. https://doi.org/10.1155/2012/157467

Kramosil, O., Michalek, J., 1975. Fuzzy metric and statistical metric spaces. *Kybernetica,* **11**, 326-334.

Mahmood, Q., Shoaib, A., Rasham, T. and Arshad, M., 2019. Fixed point results for the family of multivalued F-contractive mappings on closed ball in complete dislocated b-metric spaces. *Mathematics, 7*(1), 56. https://doi.org/10.3390/math7010056

Matouskova, E. and Reich, S., 2003. Reexivity and approximate fixed points. *Studia Math.,* **159**, 403-415. https://doi.org/10.4064/sm159-3-5

Mihet, D., 2004. A Banach contraction theorem in fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, **144**, 431–439. https://doi.org/10.1016/S0165-0114(03)00305-1

Mihet, D., 2008. Fuzzy φ −contractive mappings in non-Archimedean fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems,* **159**, 739-744. https://doi.org/10.1016/j.fss.2007.07.006

Mursaleen, M. and Mohiuddine, S., 2009. Nonlinear operators between intuitionistic fuzzy normed spaces and Frechet derivative. *Chaos, Solitons & Fractals*, **42**(2), 1010-1015. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2009.02.041

Mursaleen, M., Lohani, Q.M.D. and Mohiuddine, S.A., 2009. Intuitionistic fuzzy 2-Metric space and its completion. *Chaos Solitons Fractals*, **42**(2), 1258-1265. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2009.03.025

Mursaleen, M., Karakaya, V. and Mohiuddine, S. A., 2010. Schauder basis, separability, and approximation property in intuitionistic fuzzy normed space. *Abstr. Appl. Anal.,* Vol **2010**, Article ID 131868, 1-14. https://doi.org/10.1155/2010/131868

Pacurar, M. and Pacurar, R.V., 2007. Approximate fixed point theorems for weak contractions on metric spaces. *Carpathian Journal of Mathematics*, **23**, 149-155.

Park, J.H., 2004. Intuitionistic fuzzy metric spaces, *Chaos, Solitons & Fractals,* **22**, 1039-1046. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2004.02.051

Radu, V., 2002. Some remarks on the probabilistic contractions on fuzzy Menger spaces. *Automat.Comput.Appl.Math*., **11**(2002)125131.

Saadati, R. and Vaezpour, S.M., 2005. Some results on fuzzy Banach spaces. *J. Appl. Math. & Computing,* **17**, No.1-2, 475-484. https://doi.org/10.1007/BF02936069

Saadati, R. and Park, J. H., 2006. On the intuitionistic fuzzy topological spaces. *Chaos Solitons Fractals*, **27**(2), 331-344. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2005.03.019

Sangurlu Sezen, M and Turkoglu, D. 2017. Some fixed point theorems of $(F,\phi)-$ fuzzy contractıons in fuzzy metric spaces. *Journal of Inequalities and Special Functions*, **4**(2017), 10-20.

Sedghi, S., Shobkolaei, N., Došenović, T. and Radenović, S., 2018. Suzuki-type of common fixed point theorems in fuzzy metric spaces. *Mathematica Slovaca*, **68**(2), 451-462. https://doi.org/10.1515/ms-2017-0115

Schwiezer, B. and Sklar, A., 1960. Statistical metric spaces. *Pacific Journal of Mathematics*, **10**, 314-334. https://doi.org/10.2140/pjm.1960.10.313

Sola Erduran, F., Yildiz, C. and Kutukcu, S. 2014. A common fixed point theorem in weak nonArchimedean intuitionistic fuzzy metric spaces. *International Journal of Open Compt. Math.,* **7**, 1-15. https://doi.org/10.12816/0007248

Sola Erduran, F., 2020. Sabit fuzzy nokta teoremleri, *Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, **10** (3), 641-650. https://doi.org/10.17714/gumusfenbil.621967

Tiwari, V. and Som, T., 2019. Fixed points for (ϕ, ψ)-contractions in Menger probabilistic metric spaces. *In Advances in Mathematical Methods and High Performance Computing. Springer, Cham*.,**3**, 201-208. https://doi.org/10.1007/978-3-030-02487-1_12

Turkoglu, D., Alaca, C., Cho, Y. J. and Yildiz, C. 2006. Common fixed point theorems in intuitionistic fuzzy metric spaces. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, **22**, 411-424. https://doi.org/10.1007/BF02896489

Zadeh, L. A., 1965. Fuzzy sets, *Information and Control*, **8**, 338-353. https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X

Wang, G., Zhu, C. and Wu, Z., 2019. Some new coupled fixed point theorems in partially ordered complete Menger probabilistic G-metric spaces. *Journal of Computational Analysis & Applications,* **26**, 326.

Wardowski, D., 2013. Fuzzy contractive mappings and fixed Points in fuzzy metric spaces, *Fuzzy Sets Syst*., **222**, 108-114. https://doi.org/10.1016/j.fss.2013.01.012