

Geometrik Cebir: Etkin Bir Modelleme ve Analiz Yaklaşımı

Geometric Algebra: An Effective Modelling and Analysis Approach

Sedat Doğan^{1*} 

¹Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Harita Mühendisliği Bölümü 55200, Samsun/Türkiye.

ARAŞTIRMA MAKALESİ

*Sorumlu yazar:

Sedat Doğan
sedatdo@omu.edu.tr

doi: 10.48123/rsgis.1415971

Yayın süreci

Geliş tarihi: 07.01.2024

Kabul tarihi: 27.02.2024

Basım tarihi: 28.03.2024

Özet

Bu makalede, iç ve dış çarpım işlemlerini ve bunların tanımladığı iç ve dış çarpım uzaylarının birleştirilmesine olanak sağlayan yeni bir geometri ve bu geometrinin kuruluşunu sağlayan cebir anlatılmıştır. Geometrik cebir adı verilen bu yeni yaklaşım, Clifford cebri olarak da anılmaktadır. Kuaternionlardan daha etkili dönme özellikleri ve tensörlerden daha kolay anlaşılır yapısı ile geometrik cebirin mühendislik alanlarında büyük yenilikler getireceği değerlendirilmektedir. Bu yapının kolay anlaşılabilmesi için gerekli olan ilk kurucu aksiyomların anlaşılması ve bunlarla cebirin nasıl bir düşünce yapısı ile kurulduğunun ortaya konması gerekir. Bu makalede, bu ilk kurucu aksiyomlar ele alınmış ve cebirin kuruluşu anlatılmıştır. Bir kez cebir oluşturulunca, bu cebri daha üst boyutlara genellemek mümkündür. Klasik cebrik yapılarla anlaşılması güç hatta kimi zaman olanaksız olan üst boyutlardaki bazı ilişkilerin açıklanması geometrik cebir ile kolaylaşmaktadır. Örneğin projektif geometri 4-boyutlu geometrik cebrik uzayla, konformal geometri 5-boyutlu geometrik cebrik uzayla kurulabilmekte ve bu uzaylardaki tüm ilişkiler ifade edilebilmektedir. Makale bu konulara girilmeden, geometrik cebirin tanıtılmasını, aksiyomlarla cebirin kuruluşunu ve bu sayede temel mantığının kolay anlaşılmasını amaçlamıştır.

Anahtar kelimeler: Geometrik cebir, Clifford cebri, Grassmann

Abstract

In this paper algebraic construction of a novel geometry, which unifies inner and outer product spaces, as well as inner and outer product operations have been explained. This novel approach is called geometric algebra and also referred as Clifford algebra in the literature. It is expected that geometric algebra will bring novelties to engineering fields with its more effective rotation properties than quaternions and easier structures than tensor algebra. For easy understanding of the structures of the geometric algebra, its first constructive axioms and their use for constructing the algebra, should be clearly understood. In this paper, those constructive axioms are defined and explained how to use them to construct the geometric algebra. Once the algebra is constructed, it is straight to generalize it to upper dimensional spaces. With geometric algebra, it is easier to explain geometric relationships in the upper dimensions than classical algebras, also in situations that the classical approaches are insufficient. For example, the projective geometry can deeply be analyzed by compact structure of the geometric algebra in 4-dimensional algebraic space. In 5-dimensional geometric algebraic space, analysis of the conformal geometry is very effective. The paper aims at introducing geometric algebra with its constructive first axioms and explain the construction of the geometry in a tractable manner.

Keywords: Geometric algebra, Clifford algebra, Grassmann

1. Giriş

1844 yılında Hamilton, kuaternionlar adını verdiği ve karmaşık sayıları 3-boyutlu uzaya genelleme yoluyla elde ettiği keşfini yayımlamıştır. Grassmann, geliştirdiği yeni geometrik operasyonları yayımlamış ve bu operasyonlarla tanımladığı orijinal bir geometriyi önermiştir (Grassman, 1844). Bu yayınında, mevcut geometriyi genişletmiş, bunun için de "dış çarpım" adında yeni bir cebrik çarpma işlemi önermiştir. Bu "genişletme" kavramının Euclides de farkındaydı: İki uzunluğun çarpımının bir alanı, bir uzunlukla bir alanın çarpımının bir hacmi veya bu şekilde devam edildiğinde daha üst boyutlu geometrik nesnelere üretilmesi gerektiğini o da düşünmüştü (Vince, 2009; Dorst vd., 2010).

Grassmann, kendi geometrik hesabının detaylı bir şekilde tanımını yapmış ancak bunu yaparken, vektör analizi, vektörlerin toplanması, çıkarılması, çarpılması ve vektör türevleri gibi konulardaki yeni düşüncelerini, kendisinin inandığı saf düşünce ve varlık felsefesi ile tanımlamak istemesi nedeniyle anlaşılması güç bir yaklaşım ortaya koymuştur. 1864'de Grassmann, bu ilk yaklaşımına ek olarak yeni bir kitap yazmıştır ama o dönemlerde düşünceleri yine de yeterince anlayamamıştır (Hestenes & Sobczyk, 2012).

Clifford (1845-1879), Grassmann'ın parlak fikirlerini o zamanlarda anlayan tek kişi olmuş ve bu fikirleri formel (biçimsel) mantık (formal logic) diliyle ifade etmeyi başarmış ve bugün "geometrik cebir" olarak adlandırılan cebri formel (biçimsel) olarak ortaya koymuştur. Maalesef o dönemlerde Gibbs'in vektör cebri daha kolay anlaşıldığından, yaklaşık 100 yıl boyunca geometrik cebir unutulmuş ve kimsenin dikkatini çekmemiştir.

Geometrik cebir, anlaşılması çok zor kavramlar içeren ve bunun için grup teorisi, küme teorisi, matematiksel mantık, sayılar teorisi vb. birçok konuda kavrayış zenginliği gerektiren bir cebirdir. Geometrik cebir konusunun hangi ihtiyaçtan veya arayıştan ortaya çıktığını ve bunun alışlagelmiş yaklaşımlardan farklı yapısına ikna olma gücünü açıklamaya çalışmak ise çok farklı bir tartışmayı gerektiren içeriklerle dolu bir konudur. Konunun bu denli geniş olması, geometrik cebirin basitçe tanımlanmasını zorlaştırır. Bazı kaynaklar geometrik cebri sadece üst uzayları oluşturan bir cebir olarak veya geometriyi koordinatlardan bağımsız bir cebir haline dönüştüren bir yöntem olarak tanımlamaktadır. Bu tanımlar doğrudur ancak, geometrik cebir bu özelliklerden çok daha fazlasına sahiptir. Geometrik cebir, aynı zamanda bilimde "birleştirme/unification" olarak adlandırılan bir birleştirme teorisidir (Hestenes, 2003). Gerçekte aynı doğaya sahip olduğu izlenimi veren ancak hesaplamalarda farklı formel yapılar ve düşünme biçimleriyle yorumlanan olaylar, aynı formel yapıya sahip tek bir bakış açısıyla ifade edilebilmelidir. Örneğin klasik mekanik ve kuantum fiziği aynı evrenin/doğanın davranış biçimleri iken, her birisi için kullanılan matematik modeller ve bunların fiziksel yorumları ayrı ayrı ele alınmaktadır. Bunların tek bir tane ve aynı modelle ifade edilmesi işi bir "birleştirme" işidir. Einstein'ın uzay ve zamanı birleştiren özel görelilik yasası, kütle çekimi ile zamanı ve enerjiyi birleştiren genel görelilik yasası çok başarılı birleştirmelerdir. Maxwell'in elektrik ve manyetik alanları birleştirme çabası da iyi bir örnektir. Her ne kadar Maxwell elektrik ve manyetik alanları denklem sistemiyle ifade etmiş olsa da, bunları bir tek denklemle birleştirmeyi başaramamıştır. Geometrik cebir ile bunu başarmak mümkündür (Hestenes, 2003). Bu birleştirme bakış açısına göre geometrik cebir, iç çarpım ve dış çarpım işlemlerini ve bunların vektör uzaylarında temsil ettikleri büyüklükler ve o büyüklüklerin ait olduğu geometrik yapıları birleştiren bir cebirdir. Bu birleştirme, reel sayılarla sanal/imaginer sayıları birleştiren karmaşık sayılar teorisinin yaptığı birleştirmeye benzer. Sanki elma ile armudu bir araya getiren, her ne kadar elma ile armut toplanmasa da bunların ikisini birlikte yeni bir yapıymış gibi ele alıp yorumlamamızı sağlayan ve yeni özelliklerini ortaya çıkaran bir sürecin yaptığını yapar geometrik cebir.

Geometrik cebir, vektör cebirine alternatif bir cebrik yapıdır (Perwass, 2009). Bu yapıda; uzunluklar, alanlar, hacimler ve hiper-hacimler bir büyüklük ve bir de yönelime sahip yapılar olarak düşünülür. Her cebrik yapının temelinde, kendiliğinden apaçık ilkelere oluşan bir aksiyom kümesi vardır. Cebir bu ilk aksiyomlardan başlanarak ve bunlarla tutarlı bir şekilde yol alınarak oluşturulur. Aynı yöntem, geometrik cebir için de geçerlidir. Cebirsel yapıların temel aksiyomları, ilk olarak polinom denklemlerinin tamsayı katsayılarının çözümlerinin araştırılması amacıyla ortaya konan grup teorisi aksiyomlarıyla tanımlanır (Grove, 2002). Bu makalede, soyut cebir temeli grup, halka, alan vb. aksiyomlarının bilindiği varsayılarak geometrik cebirin oluşturulması anlatılacaktır. Sonraki bölümde, geometrik cebri oluşturan geometrik çarpım ilişkisi, temel aksiyomlarla birlikte anlatılmaktadır.

2. Geometrik Çarpım

1884'de Grassmann, kendisinin genişletme teorisinde üç vektörün çarpımı ile ilgili üç ayrı çarpma işlemi tanımlamıştır: iç çarpım, dış çarpım ve belirsiz çarpım (Grassmann, 1844).

İdeal dünyada, vektör çarpımları uzaydan bağımsız olmalıdır. Yani çarpımlar 2-boyutlu vektörlere de uygulanabilmelidir n-boyutlu vektörlere de. Ancak klasik vektör cebirinde durum böyle değildir. Örneğin vektörlerin çapraz/vektörel çarpımları sadece 3-boyutlu uzay için tanımlı ve anlamlıdır. Vektörel çarpım 3-boyutlu uzayda çok iyi çalışsa da 2, 4 veya daha üst boyutlu uzaylarda tanımlı ve anlamlı değildir. 4-boyutlu uzayda anlamsızdır çünkü tanımındaki sağ el kuralı, 4-boyutlu uzayda bir elin nasıl olacağını bilmediğimizden anlamsızdır.

Çarpma/toplama işlemi tanımlanmadan önce, bu işlemi oluşturacak aksiyomların var olması gerekir. Bu aksiyomlar, çarpmanın hangi kurullarla yapılacağını ifade eder. Yukarıda ifade edilen sağ el kuralı, çarpımın sonucunda elde edilecek sonuç vektörünün yönünü belirlediğinden ve bu yönün de cebrik olarak çarpılan vektörlerin çarpım sırasına bağlı olmasından dolayı, çarpımın değişme özelliğine yoğunlaşmak mantıklıdır. Diğer taraftan, ilk aksiyomlar oldukça minimum sayıda olmalıdır.

Aşağıdaki aksiyomların ilk ikisi, vektörlerin birbiriyle nasıl etkileşime gireceğini ifade eder (Vince, 2009; Hestenes & Sobczyk, 2012; Vince, 2008).

1. Aksiyom: Birleşme özelliği $\mathbf{a}(\mathbf{bc}) = (\mathbf{ab})\mathbf{c}$

2. Aksiyom: Soldan ve sağdan dağılma özelliği $\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{ab} + \mathbf{ac}$ ve $(\mathbf{b} + \mathbf{c})\mathbf{a} = \mathbf{ba} + \mathbf{ca}$

Sonraki dört aksiyom ise vektörlerin skaler büyüklükler ile nasıl etkileştiğini ifade eder:

3. Aksiyom: $(\lambda\mathbf{a})\mathbf{b} = \lambda(\mathbf{ab}) = \lambda\mathbf{ab}$, $(\lambda \in \mathcal{R})$

4. Aksiyom: $\lambda\varepsilon\mathbf{a} = (\lambda\varepsilon)\mathbf{a}$, $(\lambda, \varepsilon \in \mathcal{R})$

5. Aksiyom: $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$, $(\lambda \in \mathcal{R})$

6. Aksiyom: $(\lambda + \varepsilon)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \varepsilon\mathbf{a}$, $(\lambda, \varepsilon \in \mathcal{R})$

7. Aksiyom: $\mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}|^2$

8. Aksiyom: $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = -\mathbf{e}_j\mathbf{e}_i$ (gösterim kolaylığı bakımından $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_{ij}$ şeklinde yazalım.)

Yukarıdaki aksiyomlardan başlayarak, bir vektör uzayının cebirinin ilginç bir yapıya dönüştüğünü gösterebiliriz. Bunun için \mathcal{R}^3 vektör uzayı ile bu aksiyomlarla tanımlanan geometrik çarpma işlemi iki vektöre uygulayalım. \mathcal{R}^3 'ün üç ortogonal çatı/temel vektörü $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ olsun. Klasik vektör cebirine göre $\|\mathbf{e}_1\| = \|\mathbf{e}_2\| = \|\mathbf{e}_3\| = 1$ ve $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 = 0$ olur. Burada $(.)$ sembolü, vektörlerin skaler ya da noktalı çarpımını göstermektedir. Herhangi bir vektör, bu çatı vektörlerin lineer kombinasyonu şeklinde tek anlamlı ifade edilebilir. Buna göre, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{R}^3$ iki vektör olsun. Bu vektörler, çatı vektörlerin lineer kombinasyonu ile

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{b} &= b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3\end{aligned}\quad (1)$$

şeklinde ifade edilir. \mathbf{a} ve \mathbf{b} vektörleri \mathbf{ab} ikilisi (dyadic) şeklinde aksiyomlara göre çarpılırsa aşağıdaki çarpma işlemi elde edilir.

$$\begin{aligned}\mathbf{ab} &= (a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3)(b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3) \\ &= a_1b_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + a_1b_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + a_1b_3\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + a_2b_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + a_2b_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + a_2b_3\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + a_3b_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 + a_3b_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 + a_3b_3\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3\end{aligned}\quad (2a)$$

Bu aşamada, yukarıdaki çarpımı klasik vektör cebriyle eşdeğer yapacak bir geçici ek aksiyom koyalım.

Geçici Aksiyom: $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$

Çatı vektörlerin normları bir olduğundan (7.) aksiyoma göre $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i^2 = |\mathbf{e}_i|^2 = 1$ ve çatı ortogonal olduğu için de skaler çarpımları $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0$ ($i \neq j$) olacağı için (2a) bağıntısı aşağıdaki gibi sadeleşir.

$$\mathbf{ab} = (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) + a_1b_2\mathbf{e}_{12} + a_1b_3\mathbf{e}_{13} + a_2b_1\mathbf{e}_{21} + a_2b_3\mathbf{e}_{23} + a_3b_1\mathbf{e}_{31} + a_3b_2\mathbf{e}_{32}\quad (2b)$$

Bu ifadeye ayrıca (8.) aksiyomu da uygularsak,

$$\mathbf{ab} = (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) + a_1b_2\mathbf{e}_{12} - a_1b_3\mathbf{e}_{31} - a_2b_1\mathbf{e}_{12} + a_2b_3\mathbf{e}_{23} + a_3b_1\mathbf{e}_{31} - a_3b_2\mathbf{e}_{23}\quad (2c)$$

elde edilir. Bu son ifade, ilk aksiyomlarla tanımlanan \mathcal{R}^3 vektör uzayının geometrik cebirdeki geometrik çarpımıdır. Geometrik cebri vektör cebirinden ayırmak için sembolik olarak $\mathcal{G}(\mathcal{R}^3)$ şeklinde veya kısaca \mathcal{G}_3 şeklinde gösterebiliriz (Perwass, 2009). Bu gösterimin anlamı şudur: n-boyutlu bir \mathcal{R}^n vektör uzayının geometrik cebri/geometrik cebir uzayı $\mathcal{G}(\mathcal{R}^n) \equiv \mathcal{G}_n$ 'dir. Artık $\mathcal{G}(\mathcal{R}^n)$ ile \mathcal{R}^n aynı değil iki farklı cebrik uzaydır. İlki geometrik cebrik uzay, ikincisi vektör cebri uzayı (vektör uzayı)'dir. (2c) bağıntısına bakılırsa, parantez içerisindeki toplama ifadesinin bir skaler sayıya eşit olduğu ve bu skaler sayının da \mathbf{a} ve \mathbf{b} vektörlerinin $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ skaler çarpımını ifade ettiği açıktır. O zaman;

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cdot \cos \theta_{ab}\quad (3)$$

yazabiliriz. (2c)'nin geriye kalan terimlerini yorumlamak için geçici aksiyomu (2c) bağıntısına uygularsak, \mathcal{G}_3 ile \mathcal{R}^3 arasındaki ilişkiyi görebiliriz. Geçici aksiyom aslında \mathcal{R}^3 vektör uzayında tanımlı olan vektörel/çapraz çarpım tanımının geometrik çarpımla ifadesinden başka bir şey değildir. Geçici aksiyom uygulandığında, (2c) 'nin kalan terimleri,

$$\begin{aligned} a_1 b_2 e_{12} - a_1 b_3 e_{31} - a_2 b_1 e_{12} + a_2 b_3 e_{23} + a_3 b_1 e_{31} - a_3 b_2 e_{23} &= \\ a_1 b_2 e_3 - a_1 b_3 e_2 - a_2 b_1 e_3 + a_2 b_3 e_1 + a_3 b_1 e_2 - a_3 b_2 e_1 &= \\ (a_2 b_3 - a_3 b_2) e_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) e_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) e_3 &= \mathbf{a} \times \mathbf{b} \\ &= \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cdot \sin \theta_{ab} \end{aligned} \quad (4)$$

elde edilir. Bu ifade görüldüğü gibi \mathbf{a} ve \mathbf{b} vektörlerinin taradığı paralelkenarın alanına eşit büyüklükteki vektörel çarpım vektörü (aksiyal vektör)'dür. Başka bir ifadeyle, eğer geçici aksiyom da cebir içinkurucu aksiyom olarak kabul edilseydi, (2) bağıntılarında verilen iki tane 3-boyutlu vektörün geometrik çarpımı aşağıdaki gibi olurdu:

$$\mathbf{ab} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{b} \quad (5)$$

Bu durumda, (5) bağıntısındaki $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ifadesi klasik vektörel çarpım olurdu ve bu ifade sadece \mathcal{R}^3 vektör uzayında geçerli olurdu. Ancak buradan anlaşılması gereken şey, ikinci ifadenin vektörel çarpımla ilişkili olduğunu görmektir. Geometrik cebirde geçici aksiyom yoktur (Vince, 2009). Bu geçici aksiyom olmadığında (5) bağıntısı aşağıdaki gibi gösterilebilir ve bu gösterimde ikinci terimin hala vektörel çarpımı andıran bir role sahip olduğunu söylememiz gerekir. Geçici aksiyom olmadığında geometrik çarpım,

$$\mathbf{ab} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \quad (6)$$

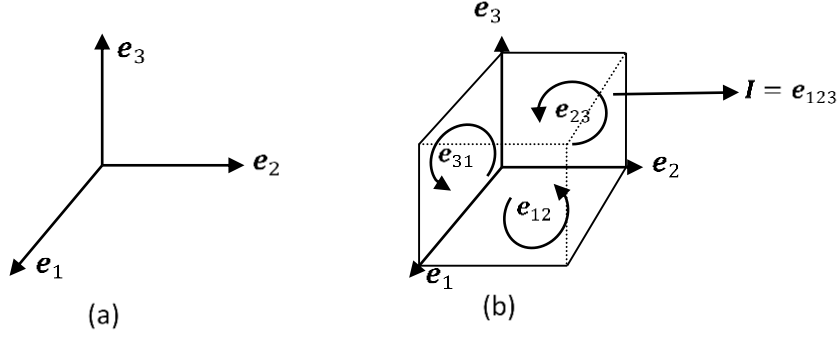
şeklinde gösterilir. Burada \wedge sembolü (wedge) sembolü olarak adlandırılır ve bu sembolle gösterilen çarpıma da *dış çarpım* adı verilir. Burada (6) bağıntısıyla verilen geometrik çarpımın bir skaler çarpım (iç çarpım) ve bir de dış çarpım terimlerinden oluştuğunu ve bu sayede geometrik çarpımın iç ve dış çarpımları birleştiren yeni bir cebrik çarpım olduğunu vurgulamak gerekir. $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ dış çarpımı $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{R}^3$ vektörlerinin oluşturduğu düzlemi ifade eder ve büyüklüğü de (4) bağıntısında gösterildiği gibi, bu iki vektörün oluşturduğu paralelkenarın alanına eşittir. Bu yeni bir elemandır ancak bu yeni eleman \mathcal{R}^3 vektör uzayının değil \mathcal{G}_3 geometrik uzayının elemanıdır deriz. Bu yeni \mathcal{G}_3 elemanı, iki vektörden oluştuğu için buna *bivektör (ikivektör veya grade2-vector)* adı verilir (Vince, 2009; Hestenes & Sobczyk, 2012; Perwass, 2009; Vince, 2008; Artin, 2016).

\mathcal{R}^3 vektör uzayının temel vektörlerinin üçünün geometrik çarpımı da mümkündür. Bu geometrik çarpım aşağıdaki gibi olur:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 &= (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2) \mathbf{e}_3 = (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) \mathbf{e}_3 = (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) \mathbf{e}_3 = (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \\ &= (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3) \wedge (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3) + \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (7)$$

Bu son bağıntı, $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0$ ($i \neq j$) olduğu yani ortogonal vektörlerin skaler çarpımlarının sıfır olduğu gerçeği, birleşme ve dağılma özellikleri aksiyomları (6) bağıntısındaki geometrik çarpım tanımına uygulanarak elde edilmiştir. (7) bağıntısı, $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_{123}$ olduğunu gösterir. Yani, ortogonal vektörlerin geometrik çarpımları, bunların dış çarpımlarına eşit olur. Çünkü iç çarpımları sıfırdır. (7) bağıntısında elde edilen $\mathbf{e}_{123} = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$ ifadesi, yeni bir elemandır. Bu yeni eleman, üç tane vektörden oluşan bir hacim elemanı olduğu için buna "*trivektör/üç-vektör veya grade 3 vektör*" adı verilir. Bu trivektör, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ temel çatı vektörlerinin oluşturduğu birim hacme eşit büyüklüğe ve saatin tersi yönünde bir yönelime sahip bir temel çatı hacim elemanıdır. Bu aşamada, \mathcal{R}^3 'ün üç tane çatı vektörüne geometrik çarpım uygulandığında, sonuç olarak şu elemanların elde edilebileceğini, başka olasılıkların bulunmadığını söyleyebiliriz: $\mathcal{G}_3 = \{\alpha, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_{12}, \mathbf{e}_{23}, \mathbf{e}_{31}, \mathbf{e}_{123}\}$. Burada $\alpha \in \mathcal{R}$ şeklinde skaler bir sayıdır. Bu kümeye, \mathcal{G}_3 *cebrik uzayının temel/çatı elemanları* denir. Buradan şunu da not etmek yerindedir. 3-boyutlu \mathcal{R}^3 vektör uzayının \mathcal{G}_3 cebirinin toplam $2^3=8$ tane çatı elemanı vardır. Benzer şekilde 2-boyutlu \mathcal{R}^2 vektör uzayının \mathcal{G}_2 cebirinin toplam $2^2=4$ tane çatı elemanı vardır. Yani $\mathcal{G}_2 = \{\alpha, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_{12}\}$ şeklindedir.

Aynı kural daha üst ve alt boyutlara genelleştirilebilir. İlerleyen bölümde, geometrik cebir uzayının en yüksek düzeyli elemanının ilginç özelliklerini göstereceğiz. Şekil 1'de, \mathcal{R}^3 ve \mathcal{G}_3 'ün çatı elemanları gösterilmiştir (Vince, 2008; Vince, 2009).



Şekil 1: a) \mathcal{R}^3 vektör uzayının çatısı, b) \mathcal{G}_3 cebrik uzayının çatısı
Her iki uzayda da orijin noktası, skaler sayıların çatısıdır (sıfır/null alt uzayı)

$$\begin{aligned} e_{12} &= e_1 \wedge e_2, e_{23} = e_2 \wedge e_3, e_{31} = e_3 \wedge e_1, \\ I &= e_{123} = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3. \end{aligned}$$

Şekil 1b'ye dikkat edilirse, geometrik çarpım anti-commutative değişme özelliğine sahiptir. Yani $e_{ij} = -e_{ji}$ olduğu için temel bivektörlerin dış çarpım sırası önemlidir. Saat ibresinin tersi yönü pozitif yön olarak alınır.

3. Geometrik Cebirin Temel Özellikleri

Bu bölümde, geometrik cebirin ilginç özellikleri özetle ele alınacaktır. En önemli özelliklerinden birisi, skaler sayıları, vektörleri, bivektörleri, trivektörleri, vb. lineer toplam şeklinde toplayarak "*multivector/çoklu vektör*" adı verilen yapıyı oluşturmasıdır. Bir çoklu vektör, herhangi bir cebir elemanı gibi cebrik işlemlere sokulup işlenebilir. Geometrik cebirin bir başka özelliği ise bivektörlerin ve trivektörlerin sanal sayı gibi davranmalarıdır. Bu özellik sayesinde geometrik cebrik uzaylara, karmaşık düzlemin üst uzaylara genelleştirilmiş hali olarak bakılabilir. Bu konuların anlaşılabilmesi için düzeyler (grades) ve sahte sayılar (pseudoscalars) kavramlarını incelemek gerekir.

3.1. Düzeyler (Grades) ve Sahte Sayılar (Pseudoscalars)

Geometrik cebirde cebrik elemanlar, düzeylerine (veya derecelerine/grade'lerine) göre şöyle adlandırılırlar: Skaler sayılar grade-0, vektörler grade-1, bivektörler grade-2, trivektörler grade-3 vb. şekilde adlandırılırlar. Farklı düzeylerdeki elemanların toplamından oluşan cebrik elemanlara ise *çoklu-vektör/multivector* denir (Vince, 2009; Perwass, 2009; Vince, 2008; Bayro-Corrochano & Scheuermann, 2010; Kanatani, 2015). Geometrik cebir gibi farklı düzey hiyerarşisine sahip cebirlerde cebirin en yüksek düzeyli elemanına *sahte sayı/sahte skaler/pseudoscalar* adı verilir. Buna göre \mathcal{G}_2 'nin sahte skaleri e_{12} , \mathcal{G}_3 'ün sahte skaleri e_{123} , \mathcal{G}_4 'ün ki e_{1234} olur ve daha üst boyutlar için de aynı kural geçerlidir.

Bir cebrik ifade, aşağıdaki gibi farklı düzeyli elemanların toplamından oluşan bir çoklu-vektördür:

$$A = 5 + 3e_1 + 4e_2 - 5e_{12} + 7e_{123} \quad (8)$$

Böyle bir ifadeden, istenen düzeydeki elemanları seçmek için $\langle A \rangle_{\text{düzey}}$ şeklinde bir operatör tanımlayabiliriz. Burada *düzey*, seçilecek terimin düzeyi/grade'idir. (8) bağıntısını ele alırsak $\langle A \rangle_0 = 5$, $\langle A \rangle_1 = 3e_1 + 4e_2$, $\langle A \rangle_2 = 5e_{12}$, $\langle A \rangle_3 = 7e_{123}$ olur. İki tane grade-1 elemanın iç çarpımı grade-0 yani skaler üretir. Dış çarpımları ise grade-2 eleman üretir. Başka bir ifadeyle, iki tane grade-n elemanın iç çarpımı bunları grade-(n-1) elemana, dış çarpımı ise grade-(n+1) elemana çevirir. Buna göre iç çarpım "*düzey azaltıcı işlem*", dış çarpım ise "*düzey arttırıcı işlem*" deriz. Bu özellik tüm düzeyler için geçerlidir.

3.2. Çoklu-vektörler (Multivectors)

Farklı düzeylerden elemanların kombinasyonuna/toplamına "*çoklu-vektör/multivector*" denir. Herhangi düzeye sahip bir tane eleman da çoklu-vektör olabileceği gibi, iki ya da daha fazla düzeyli elemanların toplamı da bir çoklu-vektördür. A ve B gibi iki çoklu-vektör için $A+B$, $A-B$, AB ve A/B şeklinde sırasıyla toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemleri yapılabilir. Bunun için temel aksiyomları uygulamak yeterlidir.

Ancak bölme için ters/inverse hesabı gerekir ve bunu sonraki bölümlerde tanımlayacağız. Bir örnek olarak $A = 3 + e_1 + 2e_2 + 5e_{12}$ ve $B = 1 + 2e_1 + 2e_2 + 6e_{12}$ iki çoklu-vektör olsun. Buna göre bu ikisinin toplamı,

$$A + B = 4 + 3e_1 + 4e_2 + 11e_{12} \quad (9)$$

şeklinde, cebrik toplama işlemi yapılarak elde edilir. AB geometrik çarpımı ise;

$$\begin{aligned} AB &= (3 + e_1 + 2e_2 + 5e_{12})(1 + 2e_1 + 2e_2 + 6e_{12}) \\ &= 3 + 6e_1 + 6e_2 + 18e_{12} + e_1 + 2e_{11} + 2e_{12} + 6e_{112} + \\ &\quad 2e_2 + 4e_{21} + 4e_{22} + 12e_{212} + 5e_{12} + 10e_{121} + 10e_{122} + 30e_{1212} \\ &= 3 + 6e_1 + 6e_2 + 18e_{12} + e_1 + 2 + 2e_{12} + 6e_2 + 2e_2 - 4e_{12} + 4 - 12e_1 + 5e_{12} - 10e_2 + 10e_1 - 30 \\ &= -21 + 5e_1 + 4e_2 + 21e_{12} \end{aligned} \quad (10)$$

elde edilir. (10) bağıntısında işlemler, aksiyomlara göre yapılmıştır. Örneğin, $e_{112} = e_1e_1e_2 = e_{11}e_2 = e_2$ 'dir. $e_{212} = -e_{221} = -e_1$ vb. olur. Burada görüldüğü gibi çoklu-vektörlerle her türlü işlem yapılabilir.

3.3. Ters Çevirme (Reversion) İşlemi

Geometrik cebirin, elemanların işlem sırasına duyarlı olduğunu biliyoruz. Bu özellikle ilgili yararlı bir operatör tanımlanabilir. Cebrik işlem sırasını değiştiren ters çevirme (reverse) operatörü $'\dagger'$ (dagger) sembolü veya $'\sim'$ (tilde) sembolü ile gösterilir (Vince, 2008; Vince, 2009). $A = ab$ şeklinde iki vektörün çarpılması işlemine reverse operatörü uygulanırsa,

$$A^\dagger = ba \quad (11)$$

olur. Bu işlem, $\tilde{A} = ba$ şeklinde de yazılabilir. Her iki gösterim de literatürde kullanılır. Skaler elemanlar ve vektörler reverse işleminden etkilenmez. Bi-vektörler ve tri-vektörler işaret değiştirirler. Örneğin,

$$(e_1e_2e_3)^\dagger = e_{123}^\dagger = e_3e_2e_1 = e_{321} = -e_{123} \quad (12)$$

Grade-4 ve grade-5 elemanlar işaret değiştirmezler. Örneğin;

$$(e_1e_2e_3e_4)^\dagger = e_{1234}^\dagger = -e_{1243} = e_{1423} = -e_{4123} = e_{4132} = -e_{4312} = e_{4321} = e_{1234} \quad (13)$$

olur. (13) bağıntısında görüldüğü gibi, $e_{ijkl\dots}$ ifadesinde, herhangi bir tane indis bir sola ya da bir sağa kaydırıldığında işaret değişir. $e_{ijkl\dots} = -e_{jikl\dots}$ gibi. Bu durum, anti-komütatif değişme özelliği nedeniyle böyledir ve bu kuralın tensör cebri kurallarıyla aynı olduğu görülmektedir. Buna göre kolaylık olması için işaretin ne olacağını belirleyen bir formül yazılabilir. Bir elemanın düzeyi k ise (yani eleman grade- k elemanı ise),

$$(e_k)^\dagger = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} e_k \quad (14)$$

Şeklinde reverse işleminin sonucunun işaretini kolayca bulabiliriz.

3.4. Bir Çoklu-vektörün Tersisi

Bir A çoklu-vektörünün tersi/inversi $A^{-1}A = AA^{-1} = 1$ şeklinde tanımlanır. $A^{-1}A$ ifadesinde ters çoklu-vektör soldan çarpıldığı için buna "sol invers", AA^{-1} ifadesindeki gibi sağdan çarpılırsa "sağ invers" adı verilir. Değişme özelliği bulunan cebirlerde sağ ve sol inversler eşittir yani simetriktir. Ancak anti-komütatif değişme özelliği bulunan cebirlerde her zaman simetrik olmayabilir.

Geometrik cebir de anti-komütatif değişme özelliğine sahiptir ancak, her durumda A çoklu-vektörünün sol inversi vardır. Çoğu durumda sağ inversi de vardır ve simetriktir ancak sağ inversin bulunmadığı durumlar da mümkündür. Çoklu vektörlerden aşağıdaki formda olan tiplere *versör* adı verilir:

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_n \quad (15)$$

Burada \mathbf{A} çoklu vektörü, $\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n$ vektörlerinin çarpımı ile oluşmuştur. Bu versörün tersini hesaplamak kolaydır. Önce \mathbf{A} versörüne ters çevirme (reverse) işlemi uygulayıp bunu kendisi ile çarpalım.

$$\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{a}_n \mathbf{a}_{n-1} \dots \mathbf{a}_1 \quad (16)$$

$$\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} = (\mathbf{a}_n \mathbf{a}_{n-1} \dots \mathbf{a}_1) (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_n) \quad (17)$$

elde edilir. Çarpma işlemi içten dışa doğru gerçekleştirilirse,

$$\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} = (\mathbf{a}_n \mathbf{a}_{n-1} \dots (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1) \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_n) \quad (18)$$

$$\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} = |\mathbf{a}_1|^2 (\mathbf{a}_n \mathbf{a}_{n-1} \dots (\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2) \dots \mathbf{a}_n) \quad (19)$$

elde edilir. Tüm elemanlar için çarpımlar benzer şekilde yapılırsa, sonuç olarak;

$$\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} = (|\mathbf{a}_1|^2 + |\mathbf{a}_2|^2 + \dots + |\mathbf{a}_n|^2) \quad (20)$$

olur. Ayrıca, $\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^\dagger$ olduğundan $\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} = 1$ olmalıdır. Yani;

$$(\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}) \mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}^\dagger \quad (21)$$

$$\mathbf{A}^{-1} (\mathbf{A} \mathbf{A}^\dagger) = \mathbf{A}^\dagger \quad (22)$$

ve buradan da,

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\mathbf{A}^\dagger}{\mathbf{A} \mathbf{A}^\dagger} \quad (23)$$

Şeklinde inversi elde edilir. (23) bağıntısında, $\mathbf{A} \mathbf{A}^\dagger$ ifadesinin bir skaler sayı olduğunu biliyoruz. O zaman bir versörün tersi, ters çevrilmiş halinin $\mathbf{A} \mathbf{A}^\dagger$ veya $\mathbf{A} \mathbf{A}^\dagger$ ifadesine bölünmesine eşittir deriz. Buradan da sağdan ve soldan terslerinin eşit olduğu açıkça görülmektedir.

Bu son anlatılanlara göre şunu söylemek mümkündür: Eğer iki vektörün geometrik çarpımı $\mathbf{A} = \mathbf{a} \mathbf{b}$ verildiğinde, \mathbf{a} biliniyorsa \mathbf{b} 'yi, \mathbf{b} biliniyorsa \mathbf{a} 'yı kolayca bulabiliriz. Buna göre $\mathbf{b} = \mathbf{a}^{-1} \mathbf{A}$ ve $\mathbf{a} = \mathbf{b}^{-1} \mathbf{A}$ şeklinde \mathbf{b} ve \mathbf{a} hesaplanabilir. Bu yaklaşımla daha genel çoklu vektörlerin de tersleri hesaplanabilir. Ancak burada bu konuya girmeyecektir.

Geometrik cebirde ters alma (inverse) işlemi ile birlikte çarpmanın birim elemanı da tanımlandığı için artık geometrik cebirin aksiyomlarının tam cebir oluşturduğu görülmektedir. Bu cebirde, geometrik elemanların türevlerinin de kolayca tanımlanabileceği görülmelidir.

3.5. Sahte Skalerlerin İmajiner Özellikleri

Geometrik cebirin en yüksek düzeyli çatı elemanına sahte sayı dendiği önceki bölümlerde anlatılmıştır. 2 boyutlu geometrik cebirde \mathbf{e}_{12} bi-vektörü, 3 boyutlu geometrik cebirde \mathbf{e}_{123} tri-vektörü ve n-boyutlu cebirde de $\mathbf{e}_{12\dots n}$ çoklu vektörü sanal sayı gibi davranır. Örneğin \mathbf{e}_{12} bi-vektörünün karesi -1'e eşittir:

$$(\mathbf{e}_{12})^2 = \mathbf{e}_{12} \mathbf{e}_{12} = \mathbf{e}_{1212} = -\mathbf{e}_{1221} = -\mathbf{e}_{11} = -1 \quad (24)$$

Benzer şekilde \mathbf{e}_{123} tri-vektörünün de karesi -1'e eşittir.

$$(\mathbf{e}_{123})^2 = \mathbf{e}_{122} \mathbf{e}_{122} = \mathbf{e}_{123123} = -\mathbf{e}_{123132} = \mathbf{e}_{123312} = \mathbf{e}_{1212} = -1 \quad (25)$$

Daha üst boyutlarda bu durum değişebilir. Örneğin 4-boyutlu uzayda \mathbf{e}_{1234} 'ün karesi +1'dir. Bu özellik, pozitif ve negatif normlara sahip koordinat çatıları tanımlamayı mümkün yapar. Pozitif ve negatif normlar çok farklı alanlarda kullanılabilir.

Örneğin uzay-zaman geometrisini bir tek geometrik cebir ile ve uygun seçilen pozitif ve negatif normlu çatılarla ifade etmek mümkündür (Hestenes & Sobczyk, 2012; Hestenes, 2003; Hitzer vd., 2013). Bu sayede, üst boyutların özelliklerini geometrik cebir ile anlamak daha kolaydır. 5- boyutlu konformal geometri geometrik cebir ile eksiksiz ifade edilebildiği gibi, klasik yöntemlerle görülmesi mümkün olmayan birçok özelliğin de açıkça anlaşılır hale gelmesini sağlamaktadır (Perwass, 2009).

Sahte sayıların imajiner özelliklere sahip olmasının bir başka önemi de, karmaşık sayıların vektörleri döndürme özelliğine sahip olmasıdır. 2 ve 3 boyutlu uzaylardaki dönme olayı, bi-vektörler ve tri-vektörlerle kolayca ifade edilebilir. Hatta bu ifadeler koordinatlardan bağımsız bir şekilde bile gerçekleştirilebilir (Vince, 2009; Du Val, 1964). Bu anlamda fotogrametri, bilgisayarla görme, bilgisayar grafikleri ve daha birçok alanda kolaylıklar sağlayacağı anlaşılmalıdır.

5. Sonuç

Makalede geometrik cebir tanıtılmış, kolay anlaşılabilirliği için aksiyomlara dayalı olarak cebirin nasıl tanımlanacağı detaylıca açıklanmıştır. Geometrik cebir son 10-15 yıl içerisinde genel olarak yeniden fark edilmiş ve farklı alanlarda geometrik cebir ile klasik modellerin yeniden yorumlanması için çalışmalar başlamıştır. Geometrik cebirde henüz çözülememiş çok sayıda problem de vardır. Mühendisliğin her alanında, mevcut modeller geometrik cebir ile yeniden yorumlanabilir ve bu sayede bu zamana kadar çözülemeyen problemlerin çözümü için yeni bakış açıları sunabilir. Perwass (2009)'da mühendislik uygulamaları (özellikle bilgisayarla görme / computer vision) ile ilgili bir kitap yayımlamıştır. Doğrudan fotogrametri ve uzaktan algılama ile ilgili çalışmalar yeni başlamıştır (Khan vd., 2020). Fotogrametrik modellerin yeniden yorumlanması için çalışmalarımız devam etmektedir.

Kaynaklar

- Artin, E. (2016). *Geometric Algebra*. Dover Publications.
- Bayro-Corrochano, E., & Scheuermann, G. (2010). *Geometric Algebra Computing: in Engineering and Computer Science*. Springer London.
- Dorst, L., Fontijne, D., & Mann, S. (2010). *Geometric Algebra for Computer Science: An Object-Oriented Approach to Geometry*. Elsevier Science.
- Du Val, P. (1964). *Homographies, Quaternions, and Rotations*. Clarendon Press.
- Grassmann, H. (1844). *Die Wissenschaft der extensiven Grössen oder die Ausdehnungslehre Erster Teil, die lineale Ausdehnungslehre*. Verlag von Otto Wigand.
- Grove, L.C. (2002). *Classical Groups and Geometric Algebra*. American Mathematical Society.
- Hestenes, D., & Sobczyk, G. (2012). *Clifford Algebra to Geometric Calculus: A Unified Language for Mathematics and Physics*. Springer Netherlands.
- Hestenes, D. (2003). Oersted Medal Lecture 2002: Reforming the mathematical language of physics. *American Journal of Physics*, 71(2), 104–121. <https://doi.org/10.1119/1.1522700>
- Hitzer, E., Nitta, T., & Kuroe, Y. (2013). Applications of Clifford's Geometric Algebra. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 23(2), 377–404. <https://doi.org/10.1007/s00006-013-0378-4>
- Kanatani, K. (2015). *Understanding Geometric Algebra: Hamilton, Grassmann, and Clifford for Computer Vision and Graphics*. CRC Press.
- Khan, P.W., Byun, Y-C., & Latif, M. A. (2020). Clifford Geometric Algebra-Based Approach for 3D Modeling of Agricultural Images Acquired by UAVs. *IEEE Access*, 8, 226297–226308.
- Perwass, C. (2009). *Geometric Algebra with Applications in Engineering*. Springer Berlin Heidelberg.
- Vince, J. (2008). *Geometric Algebra for Computer Graphics*. Springer London.
- Vince, J. (2009). *Geometric Algebra: An Algebraic System for Computer Games and Animation*. Springer London.