Volume: 10 Number: 01 Page: 17-28 ISSN No: 1303-6319 Cilt: 10 Sayı: 01

SİHİRLİ KARELER VE LATİN KARELER

Fikri AKDENİZ*

ÖZET

Bu makalede 4000 yıldır bilinen sihirli kareler ele alınmıştır. Özellikle singüler matrisleri veren $2n \times 2n$ $(n \geq 2)$ *boyutlu sihirli matrislerin Moore-Penrose inversi ve özdeğerlerinin özellikleri incelenmiştir. Ayrıca, Latin kare tasarım modelleri pullar yardımıyla görsel olarak verilmiştir.*

Anahtar Kelimeler: Latin kare, Moore-Penrose invers, Sihirli sabit, Sihirli kare, Yarı-sihirli kare.

1. GİRİŞ

Yazımıza ünlü düşünür, filozof ve matematikçi Bertrand Russel (1872-1970)'ın matematik hakkındaki düşüncesi ile başlamak istiyorum. B. Russel "Matematik, aynı şeyi değişik sözcüklerle söyleme sanatıdır. Doğru algılandığında yalnız gerçeği değil, bir heykeldeki gibi yüceltilmiş, donuk ve süssüz bir güzelliği içerir." demiştir. Ayrıca, M.S. 411 yılında İstanbul'da doğmuş ve 485 yılında Atina'da ölen Yunan filozofu Proclus Diadoclus "Bir yerde sayı varsa orada güzellikte vardır" özdeyişiyle matematiğin yalınlığını vurgulamıştır. Matematik evrensel bir dildir. Bunun anlamı eksilme ve bozulma olmaksızın daima var olacaktır. Kümeler kuramının kurucusu Alman matematikçi Georg Cantor (1845-1918)'in deyimiyle "Matematiğin özü özgürlüğünde aranmalıdır". Bu yazımızla sayılardaki yalınlığı ve matematiksel güzelliği paylaşmak istiyorum. Bilgilerin bir kısmını Akdeniz (2011)'de bulabilirsiniz. Bir soru ile konumuza gireceğim.

2. SİHİRLİ KARE NEDİR?

TANIM: $1,2,3,\ldots,n^2$ sayılarının n satır ve n sütundan oluşan n^2 sayıda kutucuktan oluşan bir kare içine her satır, sütun ve köşegen üzerindeki sayılar toplamı aynı S sayısına eşit olacak şekildeki düzenlenmesine n-ci mertebeden **sihirli kare** (magic square) denir. 1 den n e kadar tamsayıların toplamının $1+2+3+\ldots+n=n(n+1)/2$ olduğunu biliyoruz. Benzer biçimde $1^2+2^2+\ldots+n^2$ toplamı için n yerine n^2 alınırsa n satırın toplamı nS olur. O halde $nS=1+2+3+\ldots n^2 = n^2((n^2+1)/2$ olduğundan $S=n(n^2+1)/2$ bulunur. S sayısına "**sihirli sabit**" denir. Yalnız satır ve sütun toplamlarının tümü sabit bir S sayına eşit olan kare matrise **yarı-sihirli kare** (semi-magic square) denir. Buradaki gibi ardışık pozitif tam sayılarla oluşturulan sihirli kareye **doğal sihirli kare** denir. Bu yazıda öncelikli olarak doğal sihirli kareleri inceleyeceğiz.

Örneğin: n=3 için 1 den 9 a kadar sayılarla oluşturulan sihirli kare için sihirli sabit sayı: $S=3(3^2+1)/2=15$ tir. n=3 için sihirli kare örneği vereceğim. 3x3 tipindeki ilk sihirli kare aşağıdaki gibi sayılardan oluşmuştur. Bilinen en eski sihirli kare:

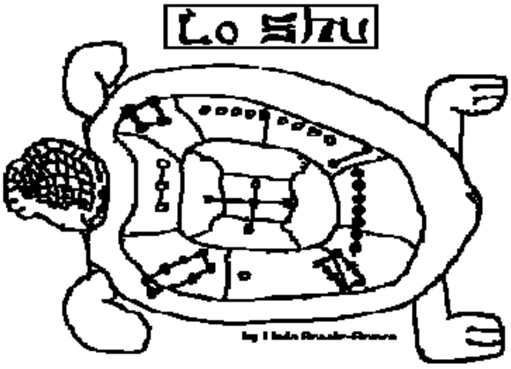
$$M = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

* Prof. Dr., Çukurova Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü Emekli Öğretim Üyesi, e-posta: akdeniz@cu.edu.tr, fikriakdeniz@gmail.com

dir. Bu sihirli karedeki sayıların oluşturduğu yukarıdaki M gösterimine **sihirli matris** denir.

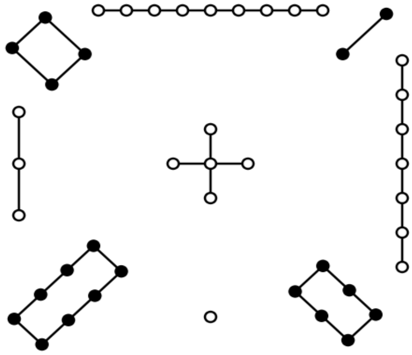
3. SİHİRLİ KARELERİN KISA TARİHİ

Sihirli kareler M.Ö. 21. asırdan beri bilinmektedir. Çin'in eski dönemlerinde çok sayıda taşkınlara yol açan nehirler varmış. İnsanlar bu nehirlerden "Nehir Tanrısı "olarak bilinen ve su taşkınlarına neden olan "LUO" adlı nehrin kızgınlığını önlemek için nehir kıyısına gidip ona kurban sunmaya çalışırlarmış. Çin mitolojisine göre her bir tören anında nehirden bir kaplumbağa çıkıp kurbanın etrafında dolaşırmış. Nehir tanrısı her defasında kurbanı kabul etmezmiş. Bu durum orada bulanan bir çocuğun, kaplumbağanın üzerindeki ilginç şekilleri işaret edene kadar böyle sürüp gitmiş. Kabuk üzerindeki işaretler 15 sayısını ifade ediyormuş. O günden sonra insanlar kurban sayısının kaplumbağa kabuğu üzerindeki miktar kadar, yani 15 olması gerektiği sonucuna varmışlar.



Şekil 1. Kutsal Kaplumbağa (The Divine Turtle)

Diğer bir Çin mitine göre, M.Ö. 21. asırda Antik Çinde taşkınların kontrolu için hendekler yaptırıp ve kanallar açtırıp efsanevi kural koyucu olarak bilinen büyük Çin İmparatoru Yu bu ilginç sayısal şekle "LUO-SHU" adını verir. Çince "Luoshu" nun anlamı Luo nehri demektir. Çok daha önceleri bulunmasına rağmen bu sihirli kare ve Luo Shu hikayesi M.S. 1. yüzyılda Yih King başlıklı kitapta bulunmuştur.



Şekil 2. Luo Shu 3X3 Sihirli Kare

Sihirli kareler tarihsel süreç içinde Çin, Hindistan, Araplar, Antik Yunan ve Japonya'da düzenlenmişti. Hindistan'da 4x4 tipinde ilk sihirli kare ikinci asırda yaşamış Budist filozof Nagarjuna tarafından yazılmış Kaksaputta adlı eserde bulunmuştur. Orta Hindistan'da Khajuraho'da 10. asırdan kalma Parsvanath Hindu Tapınağındaki 4x4'lük sihirli karede her bir satır, sütun ve köşegenlerdeki sayılar toplamı 34 tür. Ayrıca 2x2'lik alt karelerin toplamı ve 3x3, 4x4 karenin köşelerindeki sayılar toplamı da 34 olur.

Şekil 3. Hint sayılarıyla 4X4 Sihirli Kare

$$\begin{bmatrix} 7 & 12 & 1 & 14 \\ 2 & 13 & 8 & 11 \\ 16 & 3 & 10 & 5 \\ 9 & 6 & 15 & 4 \end{bmatrix}$$

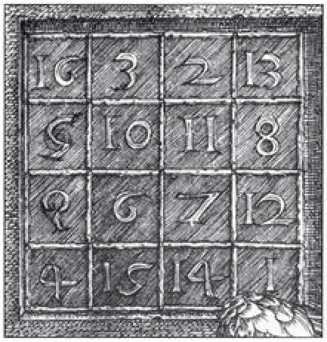
Şekil 4. 4X4 (yukarıdaki) Sihirli Kare

Arap matematikçisi Ahmad Al-Buni 1250'li yıllarda sihirli karelerin özelliklerini incelemiştir. Avrupa'nın sihirli karelerle tanışması 13. asrın sonları 14. asırda İstanbul'da yaşamış olan Yunan matematikçi Manuel Moschopulos ile gerçekleşmiştir. Manuel, sihirli kareler üzerine bilimsel inceleme yaptı. Daha sonraları 1450'lerde İtalyan matematikçi Fra Luca Bartolomeo de Pacioli (1446/7-1517) çok sayıda sihirli kare örneği toplamıştır. Avrupa'da sihirli karelerin ortaya çıkışı Alman sanatçısı Albrecth Dürer (1471-1528)'in kabartma resminde görülmektedir. Dürer 1514 yılında bakır plaket kabartma üzerine sağ üst köşesine sihirli kareyi yerleştirerek Melencolia'ı *(Melancholia I)* yapmıştır. Bir ressam olan Albrecth Dürer matematik ve sanat arasındaki ilişkiyi incelemiştir.

Şimdi Dürer'in bakır oymacılığı ile tabloyu yaptığı tarihi ve annesinin ölüm tarihi (1451-1514) 1514 yılını da içeren sihirli kareyi inceleyelim. 1 de 16 ya kadar tam sayılardan oluşan bir doğal sihirli karedir. Sihirli sabit= S=34 tür. En alt satırda 15 ve 14 sayıları yan yana gelerek sihirli kare özel olarak 1514 yılını vurgulamaktadır.

Bu güne kadar 880 adet farklı 4x4 sihirli kare hesaplanmış durumdadır. Sihirli kareler matematik tarihi içinde pek çok araştırmacının ilgisini çekti. Bunların arasında Leonhard Euler (1707-1783) ve 19. yüzyılda Ludwig Bieberbach (1886-1982). Ayrıca Henry Dudeney (1857-1930) ve Martin Gardner (1914-2010) gibi bulmaca çözerlerin çalışmalarını da eklemek gerekir.

Şekil 5. Melencolia I Albrecht Dürer (1514)



Şekil 6. Dürer'in 4×4 sihirli karesi

3.1 Benjamin Franklin 8x8 Sihirli Kareleri

Matematik dünyasında bir çoğu hala bilinmeyen bazı sihirli kareler 18. yüzyılda yaşamış olan Benjamin Franklin (1706-1790) tarafından oluşturulmuştur. Franklin sabun yapma işi ile uğraşan Josiah Franklin'in 17 çocuğundan biridir. Bir yazar, diplomat ve bilim adamı (Fizikçi ve Matematikçi) olarak Franklin kendi yaşadığı dönemde ve günümüzde övgüye değer biridir (Pasles, 2001). Örneğin, Londra ve Paris bilimler akademilerinin bilimsel üyeliğe seçtiği tek Amerikan'dı ve uzun yıllar da tek kalmıştı. Franklin'in matematiksel yaşamı karelerin kendileri ve almanaklardır. Franklin'in formal okul eğitimi 2 yıldan daha kısa bir sürede son bulmuş fakat onun eğitimi asla son bulmamıştır. Esas itbariyle kendi kendini yetiştirmiştir. Başarılı bir insanın diğer insanlardan daha çok çalışması gerektiğine inanırdı. ABD 100 dolarında resmi olan kişidir. Franklin aşağıdaki gibi kareleri nasıl yazmıştı? El yazması dışında karşılaştırmak için elimizde bir belge de yoktur. Günümüze kadar bir çok araştırmacı Franklin karelerini incelediler. Bunlardan en ilginci 8x8 yarı sihirli karedir. Bu karedeki satır ve sütunların toplamı $S=8(8^2+1)/2=260$ tır. Köşegen toplamları 260 değildir. Değişik renklerdeki simetrik yapıdaki sayılar toplamının da 260 olduğu görülmektedir.

Volume: 10 Number: 01 Page: 17-28 ISSN No: 1303-6319 Cilt: 10 Sayı: 01

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

Şekil 7. Yukarıda 8x8 lik yarı-sihirli Franklin kareleri görülmektedir. S=260

3.2 Pandiagonal Sihirli Kareler

Tanım. Bir matrisin, satır, sütun ve köşegen elemanlarının toplamlarının aynı sayıya eşit olması özelliğine ek olarak "kırılmış" köşegenlerin toplamı da aynı sihirli sayıya eşit ise bu sihirli kareye "pandiagonal" denir

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 15 & 4 & 14 \\ 8 & 10 & 5 & 11 \\ 13 & 3 & 16 & 2 \\ 12 & 6 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

Yukarıdaki P matrisinde 6 adet kırılmış köşegen:
(1, 6, 16, 11); (8, 15, 9, 2); (13, 10, 4, 7); (14, 8, 3, 9); (4,11, 13, 6); (15, 5, 2, 12)
dir. Bu sayıların toplamı da sihirli sabite, S=34 e eşittir (Henrich, 1991).

3.3 Ramanujan'ın Sihirli Karesi

Cumhuriyet Bilim Teknik Dergisinin 12.01.2002 tarihli, 773. Sayısında yayınlanan "Hintli bir matematik dahisi" (Türkkaya Ataöv) başlıklı yazıda 22.12.1887 yılında doğmuş Hintli matematikçi Srinivasa Ramanujan'ın kısa yaşam öyküsü anlatılmıştı. Üniversite öğrenimi görmemiş olan bu *dâhi*, sayılarla oynamayı çok severdi. Ramanujan doğum tarihini de kullanarak aşağıdaki 4×4 biçimindeki kareyi oluşturmuştur.

$$\begin{bmatrix} 22 & 12 & 18 & 87 \\ 21 & 84 & 32 & 02 \\ 92 & 16 & 07 & 24 \\ 04 & 27 & 82 & 26 \end{bmatrix}$$

Soldan sağa, yukarıdan aşağıya tüm toplamlar 139 sayısını vermektedir. Ayrıca her bir köşegendeki 4 sayının toplamı da (22+84+07+26 ve 87+32+16+04) 139 u vermektedir. Köşeden köşeye toplamlarda (22+04+26+87) 139 dur. Ayrıca 21+02+24+92=139, 12+18+82+27=139, 12+87+16+24=139, 21+32+82+04=139, 22+18+82+04=139 dur. Her bir köşedeki 2x2 matrislerin dört sayısının toplamı da 139 dur.

Şekil 8. Posta pulu üzerinde Ramanujan (1887-1920)

Satır ve sütun toplamlarının tümü 139 sayısına eşittir. Ayrıca her iki köşegendeki sayılar toplamı da 139 sayısına eşittir. Sihirli kareler üzerinde yoğun çalışmalar yapan Prof. Dr. George P.H. Styan (McGill Üniv. Kanada) Ocak 2012 içinde Ramanujan'ın doğumu ile ilgili aşağıdaki ilk satırları aynı olan başka bir sihirli kareyi göndermiştir.

$$\begin{bmatrix} 22 & 12 & 18 & 87 \\ 28 & 59 & 40 & 12 \\ 80 & 3 & 37 & 19 \\ 9 & 65 & 44 & 21 \end{bmatrix}$$

4. SİHİRLİ KARELER VE MOORE-PENROSE İNVERSİ

Booth ve Booth (1955)'da ifade edildiği gibi singüler olmayan bir sihirli karenin elemanlarıyla oluşturulan bir matrisin tersi de bir sihirli karedir. S "sihirli-sabit" olmak üzere bir matrisin tersinin satır ve sütunlarının toplamları 1/S ye eşittir. Aşağıdaki 3x3 sihirli kareyi ele alalım. Singüler olmayan *M* matrisi için

$$M = \left[a_{ij}\right] = \begin{bmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

Det(M)= $\Delta =$ -360 tır.

$$M^{-1} = \left[a_{ij}\right]^{-1} = \left[\frac{A_{ji}}{\Delta}\right] =$$

$$= -\frac{1}{360}\begin{bmatrix} 37 & -68 & 7 \\ -38 & -8 & 22 \\ -23 & 52 & -53 \end{bmatrix}$$

Görülebileceği gibi M^{-1} matrisinin satır ve sütun toplamları 1/15 tir. Aynı özellik köşegen toplamları için de geçerlidir. Birçok sihirli kare matris incelendikten sonra aşağıdaki sonuca varıyoruz.

Sonuç. (2n+1)x(2n+1) n=1,2,3,... tipinde yarı-sihirli ya da sihirli kare matris singüler değil ve pozitif tam sayı olan en büyük öz değer sihirli sabit S ye eşittir. Ayrıca diğer öz değerler $\alpha \pm i\beta$ ya da $-\gamma \pm \delta$, $\pm \xi$ biçiminde toplamları sıfırdır. Yani $\sum_{i=2}^{2n+1} \lambda_i = 0$ dır. Dürer'in sihirli karesine bakıldığında karşılık gelen kare matris singüler (tekil) ve rankı 3 tür. Bu nedenle Booth ve Booth (1955)'daki sonuç uygulanamaz. O halde matrislerin Moore-Penrose inverslerinin de sihirli kare özelliklerini taşıyıp taşımadığını öğrenmek istiyoruz.
Bir A matrisinin A^+ ile gösterilen Moore-Penrose inversi aşağıdaki dört koşulu sağlarsa A^+ tek olarak tanımlanır.

$$(i) AA^+A = A, (ii) A^+AA^+ = A^+, (iii)(AA^+)' = AA^+, (iv)(A^+A)' = A^+A$$

A bir kare matris olmasa bile bu invers daima vardır (Rao ve Mitra,1971)). Yalnız (i) koşulu sağlanırsa, yani $AA^-A=A$ ise, A^- ye A nın genelleştirilmiş-inversi denir. Her matris g-inverse sahiptir, fakat tek olmayabilir.

Şimdi Dürer tarafından yapılan "Melancholia I" resminde yer alan aşağıdaki meşhur sihirli kareyi düşünelim:

$$D = \begin{bmatrix} 16 & 03 & 02 & 13 \\ 05 & 10 & 11 & 08 \\ 09 & 06 & 07 & 12 \\ 04 & 15 & 14 & 01 \end{bmatrix}$$

Satır, sütun ve köşegen toplamları 34, dört köşedeki 2×2 alt kare matrislerin elemanlarının toplamı da 34 tür. D singüler bir matristir ve rankı 3 tür. D, 4×4 tipinde sihirli kare matrisin MP-inversi de sihirli kare olan bir matrise örnektir. D nin özdeğerleri : $\lambda_1 = 34$, $\lambda_2 = 8.0$, $\lambda_3 = -8.0$, $\lambda_4 = 0$, $trace(D) = 34 = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i$ dir. Burada D martrisinin en büyük özdeğeri sihirli sabit olan S=34 e eşittir. Görüldüğü gibi D nin MP-inversi:

$$D^+ = \frac{1}{34.80}\begin{bmatrix} 275 & -201 & -167 & 173 \\ 37 & -31 & -65 & 139 \\ -99 & 105 & 71 & 3 \\ -133 & 207 & 241 & -235 \end{bmatrix}$$

dir (Trenkler, 1994; Schmidt ve Trenkler, 2001). Görülebileceği gibi satır, sütun ve köşegen toplamları, dört köşedeki alt kare matrislerdeki sayılar toplamı da 1/S= 1/34 tür.
Benjamin Franklin tarafından oluşturulan 8x8 kare matrisin öz değerlerini inceleyelim: Öz değerlerin üçü $\lambda_1 = 260,00$, $\lambda_2 = -43,71281$, $\lambda_3 = 11,71281$ ve diğerleri sıfır olmaktadır. Matris singülerdir. $trace(A) = 228 = \sum_{i=1}^{8} \lambda_i$ dır. rank (A)=3 tür. En büyük özdeğer sihirli sabit S=111 e eşittir

5. PULLARLA OLUŞTURULAN 4X4 ÖZEL SİHİRLİ KARELER

1945 doğumlu iki öğretim üyemiz Prof. Dr. Fikri Akdeniz ve Prof. Dr. Öztaş Ayhan'ın yaşını (2011 yılında) veren özel sihirli kareyi örnek olarak vereceğim. Satır, sütun ve köşegen toplamları 66 dır. Sihirli sabit S=66 dır.

Şekil 9. 4x4 lük özel sihirli kare. Sihirli sabit S=66 dır.

$$F = \begin{bmatrix} 22 & 9 & 20 & 15 \\ 19 & 16 & 21 & 10 \\ 13 & 18 & 11 & 24 \\ 12 & 23 & 14 & 17 \end{bmatrix}$$

Pulların üzerindeki değerler yukarıdaki F sihirli matrisindeki sayıların oluşturduğu sihirli kareyi vermektedir. Pullardan 5 tanesi 1958 yılında ülkemizde basılan kullanılmamış posta puludur. (Değerleri 20, 15, 10, 18, 12 kuruştur.) Diğerleri yabancı pullardan derlenmiştir (Chu ve ark. 2011).

6. LATİN KARE TASARIMI NEDİR?

$k \times k \quad (k \geq 2)$ Latin kare tasarımı k satır ve k sütunu içeren bir karedir. Latin kareler orijinal olarak matematiksel merak olarak görünür, fakat istatistiksel uygulamalarda deneysel tasarımlar olarak 20. yüzyılın ilk zamanlarında kullanılmıştır. Örneğin 4 hastanede 4 farklı yöntem uygulayarak 4 deterjanı test etmek istiyoruz. Bu durumda 4×4 Latin kare tasarımı uygulanır. Her bir deterjanı herbir yöntemle herbir hastanede bir kez kullanacağız. İlk satır 1234 ve ilk sütun 1234 olmak üzere 4×4 latin kare matrisi:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

dir. ANOVA incelemesinde Latin kare modelinde herbir y_{ijk} gözlem değeri aşağıdaki gibi yazılır:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \varepsilon_{ijk}, i, j, k = 1,2,3,4$$

Latin kareler SUDOKU'nun gerçek atalarıdır (Styan ve ark. 2009). Latin karelerle ilgili örneklere 700 yıldan daha eski Arap kaynaklarında raslanır. Bunlara yeni tip sihirli kare de denir. Sayılar, harfler ve sembollerle oluşturulur. Latin kare ve sihirli kare arasındaki fark kullanılan sembollerin sayısıdır. Örneğin 4x4'lük bir sihirli kare için 16 farklı sayı kullanılır. Oysa 4x4 lük bir latin kare için yalnız 4 farklı sayı gerekir.

7. POSTA PULLARI ÜZERİNDE LATİN KARELER

İlk posta pulu Mayıs 1840 yılında İngiltere'de basılmıştır. 1840'tan günümüze kadar binlerce pul basıldı, kataloglandı, koleksiyoncularca toplandı. Her bir harf bir satırda ya da bir sütunda yalnız bir kez kullanılacaktır.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \\ c & d & a & b \\ d & a & b & c \end{bmatrix}, \ldots$$

2×2, 3×3, 4×4, 5×5 latin kare formatında posta pulları hazırlayan tek ülke Pakistandır. Bu yazımızda da Pakistan, (2×2), Malawi (4×4), Latin kareler seçildi (Chu ve ark. 2009).

Aşağıda 2×2'lik bir Latin kare verilmiştir. Türkiye Cumhuriyetinin kurucusu Mustafa Kemal Atatürk (1881--1938), ve Pakistan'ın kurucusu Quaid-e-Azam Muhammad Ali Jinnah (1876—1948). Türkiye Büyük Millet Meclisinin kuruluşunun 85. yıldönümünde Pakistan'da bastırılan k=2 için dördü bir arada pullar.

FIGURE 1.1: Top-left 2×2 corner of the 5×4 sheetlet (Figure 1.2) issued by Pakistan 2005, *Scott*[2] 1063a–1063b.

Şekil 10. 2×2 Latin Kare Tasarımı

Aşağıda 4×4'lük Latin kare görülmektedir.

Figure 4. Lilian's lovebird: Malawi 2009, PLS type a432.

Şekil 11. Muhabbet Kuşları: Malawi (Güneydoğu Afrika ülkesi)

Aynı pul (1 nolu) her bir hücrede asıl köşegende bulunmaktadır.

$$L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad L_3 = \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}$$

Sayılarla yazılan yukarıdaki 4×4 Latin kare, aynı zamanda 2×2 blok- Latin karedir (Chu ve ark. 2009).

5×5 Latin kare, 25 Ağustos-11 Eylül 1960 Roma yaz olimpiyatlarındaki **engelli koşu**, **futbol**, **engelli atlama (binicilik), basketbol ve güreş** yarışmalarını gösteren pullarla oluşturulan 5×5 Latin kare tasarımının sayılarla ifadesi:

$$L_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{bmatrix},$$

dir. 5×5 biçiminde pullarla elde edilen ilk Latin karedir (Loly and Styan, 2010). Türkiye bu olimpiyatlarda tümü güreşte olmak üzere 2 gümüş ve 7 altın madalya kazanmıştır. Aşağıda 1960 Roma Yaz Olimpiyatları anısına bastırılan 5×5 Latin Kare tasarımı ile uyumlu pulları görülmektedir.

Şekil 12. 1960 Roma Yaz Olimpiyatları anısına bastırılan 5×5 Latin Kare tasarımı ile uyumlu pullar

8. SONUÇ

Sihirli kareler 4000 yıldır sihirbazlık dünyasında kullanılmakta ve bilim dünyası için de ilgi odağı olmaktadır. Orijinal olarak bir matematiksel merak konusu olarak görünen fakat istatistik literatüründe 20. yüzyıl başından itibaren bir istatistiksel tasarım modeli olarak kullanılan LATİN KARELER deki matematiksel güzelliği, sihirli karelerdeki gizemi pullardan da yararlanarak sizlerle paylaşmak istedim. Yazımızı matematik eğitimcisi William Leonard Schaaf (1898-1992) 1978 yılında basılan “Matematik ve Bilim” adlı kitabındaki görüşü ile tamamlamak istiyorum. “**Dünyadaki posta pulları gerçekten uygarlığın aynasıdır.**”

9. KAYNAKLAR

Akdeniz, F., 2011. Sihirli karelerin gizeminden Nye Gezinti İstatistik Dergisi, Yıl:1, Sayı: 3, 12-17.

Ataöv, T., 2002. Hintli Bir Matematik Dahisi. Cumhuriyet Bilim Teknik, Sayı: 773.

Booth, A. D., Booth, K. H. V. 1955. On Magic Squares. The Mathematical Gazette, 39, 132-133.

Henrich, C. J., 1991. Magic squares and linear algebra. Amer. Math. Monthly 98, 481-488.

Ka Lok Chu, Puntanen, S., Styan, G. P. H., 2009. Some comments on philatelic Latin squares from Pakistan, Pak. J. Statist. 25(4), 427-471.

Ka Lok Chu, Drury, S. W., Styan, G. P. H., Trenkler, G., 2011. Magic Moore- Penrose inverses and philatelic magic squares with special emphasis on the Daniels-Zlobec magic square, Croatian Operational Research Review 2, 4-13.

Loly, P. D., Styan, G. P. H., 2010. Comments on 5x5 Philatelic Latin Squares CHANCE Vol.23(2), 1-10.

Pasles, P. C., 2001. The lost squares of Dr. Franklin: Ben Franklin's missing squares and the secret of the magic circle. TheAmerican Mathematical Monthly, 108, 489-511.

Rao, C. R., Mitra, S. K., 1971. Generalized Inverse of Matrices and its Applications, New York: John Wiley.

Schmidt, K. and Trenkler, G., 2001. The Moore-Penrose inverse of a semi- magic square is semi-magic. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 32, 624-629.

Styan, G. H. P. Boyer, C., Ka Lok C., 2009. Some comments on Latin squares and on Graeco- Latin squares, illustrated with postage stamps and old playing cards. Stat. Papers 50: 917-941.

Trenkler, G., 1994. Singular magic squres. International International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 25, 595-597.

William L. S., 1978. Mathematics and Science: An Adventure in Postage Stamps National Council of Teachers of Mathematics, Reston, Virginia, 2.

MAGIC SQUARES AND LATIN SQUARES

ABSTRACT

In this paper, magic squares which have been known for 4000 years are presented. Especially, Moore-Penrose inverse and eigenvalue properties of $2n \times 2n \ (n \geq 2)$ *singular magic squares are investigated. Furthermore, Latin square design models are illustrated visually by special stamps.*

Keywords: Latin square, Moore-Penrose inverse, Magic constant, Magic square, Semi-magic square.