

## q-Çatısı Kullanılarak Reel Kuaterniyonlar ile Oluşturulan Kanal ve Tüp Yüzeylerinin Karakterizasyonları

Serkan ÇELİK<sup>1\*</sup>, Hatice KUŞAK SAMANCI<sup>2</sup>, Hacı Bayram KARADAĞ<sup>3</sup>

### Öz

Bu çalışma, q-çatısına göre parametrize edilen kanal ve tüp yüzeylerinin birim kuaterniyon yardımı ile elde edilen yeni ifadeleri temel alınarak hazırlanmıştır. Elde edilen bu yeni ifadeler üzerinde Gauss ve ortalama eğrilikler hesaplanmış, verilen örnekler ile yapılan çalışma zenginleştirilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Kanal yüzey, Tüp yüzey, q-çatı, Kuaterniyonlar.

## Characterizations of Canal and Tube Surfaces Formed by Real Quaternions Using q-Frame

### Abstract

This study was prepared on the basis of the new expressions obtained with the help of a unit quaternion of canal and tube surfaces parametrized according to the q-frame. Gaussian and mean curvatures were calculated on these new expressions obtained, the study done with the examples given was enriched.

**Keywords:** Canal surface, Tube surface, q-frame, Quaternions.

<sup>1</sup>İnönü Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Malatya, Türkiye, [serkan\\_cauchy\\_27@hotmail.com](mailto:serkan_cauchy_27@hotmail.com)

<sup>2</sup>Bitlis Eren Üniversitesi, Matematik Bölümü, Bitlis, Türkiye, [hkusak@beu.edu.tr](mailto:hkusak@beu.edu.tr)

<sup>3</sup>İnönü Üniversitesi, Matematik Bölümü, Malatya, Türkiye, [bayram.karadag@inonu.edu.tr](mailto:bayram.karadag@inonu.edu.tr)

\*Sorumlu Yazar/Corresponding Author

Geliş/Received: 22.01.2024

Kabul/Accepted: 04.07.2024

Yayın/Published: 15.09.2024

## 1. Giriş

Kanal yüzeyleri ilk olarak 1850 yılında Monge tarafından incelenmiştir. Bir kanal yüzeyi; merkezi spin eğrisinde bulunan değişken yarıçaplı hareketli bir kürenin zarfıdır. Hareketli kürenin merkezlerinin yörüngesi olan eğri, kanal yüzeyinin merkez (spin) eğrisi olarak adlandırılır. Kanal yüzeyleri boru, direk, halat gibi cisimlerin geometrik modellemesinde kullanılarak mühendislik ve tıp çalışmalarında yaygın olarak ele alınmaktadır. Yarıçap fonksiyonu sabit ise kanal yüzeyi tüp veya boru yüzeyi olarak adlandırılır (Do Carmo, 1976; Gray ve ark., 2017; Xu ve ark., 2006; Maekawa ve ark., 1998; Dogan ve ark., 2011; Dogan ve ark., 2012; Dogan, 2012). Kanal yüzeylerinin temel geometrik özellikleri (Xu ve ark., 2006) da incelenmiştir. Ayrıca, bu makalede yerel olarak kendisi ile kesişmeyen kanal yüzeyleri incelenerek bu yüzeylerin alanı ve Gauss eğriliği hesaplanmıştır. (Maekawa ve ark., 1998) da tüp yüzeyinin tekil olması için gerekli ve yeterli koşullar incelenmiş ve bu yüzeylerin rasyonel parametrizasyonu için algoritmik bir yöntem geliştirilmiştir. Son zamanlarda bazı yazarlar tarafından, 3-boyutlu Öklid uzayında farklı çatılar kullanılarak tüp yüzeyleri incelenmektedir. Örneğin Serret-Frenet, Bishop, Darboux ve q-çatısı yardımıyla tüp yüzeyleri incelenerek geometrik özellikleri verilmiştir (Dogan ve ark., 2011; Dogan ve ark., 2012; Dogan, 2012; Dede ve ark., 2015; Dede ve ark., 2015; Koyuncu, 2020). Eğriler ve yüzeyler teorisi diferansiyel geometrinin temelini oluşturur. Gelişen teknoloji ve artan çalışmalarla birlikte yüzey teorisi çok geniş bir çalışma alanı oluşturmaktadır. Bu alanda yapılan çalışmalardan bazıları (Kazan ve ark., 2019; Kazan ve ark., 2021; Celik ve ark., 2023) da verilmiştir. Yüzeyler teorisinin özellikle fizik, mühendislik, tasarım ve bilgisayar modellemesinde birçok uygulaması vardır. Böylece, Öklid uzayında özel yüzeylerin geometrik yapısı, geometriciler için önemli bir çalışma alanı haline gelmiştir (Hacısalıhoğlu, 1994; Sabuncuoğlu, 2010). Ayrıca, bir parametrelili düzlemsel homotetik hareketlerle elde edilen bir doğru parçası tarafından süpürülen bölgenin alanı ve uzaysal homotetik hareketler altında süpürülen bölgenin hacmi incelenmiştir (Duldul, 2020). Kuaterniyonlar ve kuaterniyonların bazı uygulamaları (Hacısalıhoğlu, 1983; Özdemir, 2020) de incelenmiştir. Ayrıca, üç boyutlu reel vektör uzayında reel kuaterniyonlar ve bu reel kuaterniyonları kullanarak kanal yüzeyinin geometrik modellemesi ve uygulamaları (Aslan ve ark., 2016; Aslan, 2017) de ele alınmıştır. (Gok, 2017) de kuaterniyon çarpımı ve matris temsili kullanarak  $\{N, C, W\}$  alternatif çatı yardımıyla merkezleri, bir uzay eğrisinin küresel göstergeleri olan kanal yüzeyi elde edilmiştir.

Bu çalışmanın amacı, Serret-Frenet çatısından daha avantajlı olan q-çatısını kullanarak, kuaterniyon yardımıyla kanal ve tüp yüzeyini yeni bir yaklaşım ile ele almaktır. Bu sayede gerek mühendislikte ve tıpta, gerekse matematik ve geometrik uygulamalarda yüzey modellemesiyle farklı şekiller elde edilebilmektedir.

## 2. Materyal ve Metot

Kanal yüzeyi, merkezlerinin yörüngesi  $\Omega: (a, b) \rightarrow R^3$  spin eğrisi üzerinde bulunan ve yarıçapı  $r(s)$  ile tanımlanan, değişen yarıçaplı hareketli bir kürenin zarfıdır.  $\Omega(s)$ , eğriliği sıfırdan farklı bir kanal yüzeyinin birim hızlı merkez eğrisi olsun. O halde kanal yüzeyi parametrik olarak

$$K(s, \theta) = \Omega(s) - r(s)r'(s)t(s) \pm r(s)\sqrt{1-r'^2(s)}(\cos \theta n(s) + \sin \theta b(s)) \quad (1)$$

şeklinde tanımlanır. Yarıçap fonksiyonu  $r(s) = r$  sabit olması durumunda, kanal yüzeyi bir tüp yüzeyi veya boru yüzeyi olarak adlandırılır ve parametrik olarak tüp yüzeyi

$$T(s, \theta) = \Omega(s) + r(\cos \theta n(s) + \sin \theta b(s)), \quad 0 \leq \theta < 2\pi \quad (2)$$

denklemleri ile ifade edilir. Burada  $t(s), n(s), b(s)$  sırasıyla,  $\Omega$  merkez eğrisinin  $\Omega(s)$  noktasındaki teğeti, asli normal ve binormalidir (Do Carmo, 1976; Gray ve ark., 2017; Xu ve ark., 2006; Maekawa ve ark., 1998; Dogan ve ark., 2011; Dogan ve ark., 2012; Dogan, 2012). Şimdi de Serret-Frenet çatısına alternatif olarak q-çatısını ifade edelim. q-çatısının Serret-Frenet çatısına göre iki önemli avantajı vardır. İlki, türevin mevcut olmadığı durumlarda Serret-Frenet çatısı tanımlanamazken, q-çatının tanımlanabilmesidir. İkincisi ise q-çatısının eğrinin teğet vektörü etrafında ortaya çıkan gereksiz bükülmeyi önlemesidir.  $k_z = (0, 0, 1)$  ve  $A = (a, b, c)$  olsun.  $A \wedge k_z = (b, -a, 0)$  olduğundan  $A$  vektörü xy-düzlemine iz düşürülmüş olur. Burada  $\wedge$  sembolü vektörel çarpımı ifade eder. Buna göre  $k$  iz düşüm vektörü eksenler doğrultusunda birim vektör olarak alınır. Bir eğrinin teğet vektörü ile  $k$  iz düşüm vektörü paralel olursa  $t \wedge k = 0$  olduğu dikkate alınmalıdır. q-çatısını üç tipte sınıflandırabiliriz. z-ekseni, y-ekseni ve x-ekseni yönündeki q-çatıları sırasıyla  $\{t, n_q, b_q, k_z\}$ ,  $\{t, n_q, b_q, k_y\}$ ,  $\{t, n_q, b_q, k_x\}$  ile gösterilir. Burada iz düşüm vektörleri sırasıyla  $k_z = (0, 0, 1)$ ,  $k_y = (0, 1, 0)$ ,  $k_x = (1, 0, 0)$  olarak tanımlanmaktadır.

Bir  $\Omega(s)$  uzay eğrisi boyunca q-çatısı

$$t(s) = \frac{\Omega'(s)}{\|\Omega'(s)\|}, \quad n_q(s) = \frac{t(s) \wedge k}{\|t(s) \wedge k\|}, \quad b_q(s) = t(s) \wedge n_q(s) \quad (3)$$

eşitlikleri ile tanımlanır. Burada  $\|\cdot\|$ , ile Öklid normu ifade edilmektedir.  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}_q$ ,  $\mathbf{b}_q$  sırasıyla  $\Omega(s)$  eğrisinin izdüşüm vektörü, teğeti, kuasi normal, kuasi binormalidir (Dede ve ark., 2015). Matris formundaki q-çatısının türev formülleri

$$\mathbf{t}' = k_1 \mathbf{n}_q + k_2 \mathbf{b}_q, \mathbf{n}'_q = -k_1 \mathbf{t} + k_3 \mathbf{b}_q, \mathbf{b}'_q = -k_2 \mathbf{t} - k_3 \mathbf{n}_q \quad (4)$$

denklemleri ile hesaplanır (Dede ve ark., 2015; Dede ve ark., 2015; Koyuncu, 2020).

Öklid 3-uzayında  $X$  yüzeyini  $X(s, t) = (X_1(s, t), X_2(s, t), X_3(s, t))$  ile gösterelim ve  $\mathbf{n}$ ,  $X$  yüzeyi üzerinde

$$\mathbf{n}(s, t) = \frac{X_s(s, t) \wedge X_t(s, t)}{\|X_s(s, t) \wedge X_t(s, t)\|} \quad (5)$$

ile tanımlanan standart birim normal vektör alanıdır. Burada  $X_s(s, t) = \frac{\partial X(s, t)}{\partial s}$  dır. O halde  $X$  yüzeyinin  $I$  birinci temel formu ve  $II$  ikinci temel formu sırasıyla,

$$I = E ds^2 + 2F ds dt + G dt^2$$

$$II = eds^2 + 2f ds dt + g dt^2$$

dır. Burada

$$E = \langle X_s, X_s \rangle, F = \langle X_s, X_t \rangle, G = \langle X_t, X_t \rangle \quad (6)$$

$$e = \langle X_{ss}, N \rangle, f = \langle X_{st}, N \rangle, g = \langle X_{tt}, N \rangle$$

$$(7)$$

dir. Burada  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  Öklid iç çarpımı ifade eder. (6) ve (7) eşitlikleri kullanılarak yüzeyin  $K$  Gauss eğriliği,  $H$  ortalama eğriliği sırasıyla,

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, H = \frac{Eg - 2Ff + Ge}{2(EG - F^2)} \quad (8)$$

ile hesaplanır (Hacısalıhoğlu, 1994; Sabuncuoğlu, 2010).  $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}_q(s), \mathbf{b}_q(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}_q(s)\}$ ,  $\Omega(s)$

birim hızlı merkez eğrisinin q-çatısı olsun. O halde kanal yüzeyi ve tüp yüzeyi sırasıyla,

$$\tilde{K}(s, \theta) = \Omega(s) - r(s)r'(s)t(s) \pm r(s)\sqrt{1-r'^2(s)}(\cos \theta \mathbf{n}_q(s) + \sin \theta \mathbf{b}_q(s))$$

(9)

$$T(s, \theta) = \Omega(s) + r(\cos \theta \mathbf{n}_q(s) + \sin \theta \mathbf{b}_q(s))$$

(10)

olarak ifade edilir (Dede ve ark., 2015; Dede ve ark., 2015; Koyuncu, 2020).

Şimdi de kuaterniyonlarla ilgili temel kavramları verelim. Kuaterniyonlar kompleks sayıların bir genelleştirilmesi olarak 1843 yılında İrlandalı matematikçi Sir William Roman Hamilton tarafından ifade edilmiştir.

$$IH = \{q_1 + q_2i + q_3j + q_4k : i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1, q_1, q_2, q_3, q_4 \in \mathbb{R}\}$$

dörtlü sayı kümesine kuaterniyonlar kümesi, bu kümenin elemanlarına da kuaterniyon denir. Matematiksel olarak, bir  $q$  reel kuaterniyon  $q = q_1 + q_2i + q_3j + q_4k$  olarak tanımlanır. Burada  $q_1, q_2, q_3, q_4$  reel sayı  $i, j, k$  ise

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

(11)

$$ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j$$

(12)

koşuluna sahip sanal sayıdır.  $q_1$  skalar kısım ve  $q_2i + q_3j + q_4k$  vektörel kısım olarak tanımlanır. Skaler ve vektörel kısımları sırasıyla,  $S(q)$  ve  $V(q)$  ile gösterilirse,  $q$  kuaterniyonu kısaca  $q = S(q) + V(q)$  şeklinde yazılabilir. Eğer  $S(q) = q_1 = 0$  ise  $q$  bir saf kuaterniyon olur.  $q = q_1 + q_2i + q_3j + q_4k$  ve  $p = p_1 + p_2i + p_3j + p_4k$  iki kuaterniyon olsun. Bir kuaterniyonun eşleniği, iki kuaterniyonun toplamı ve bir kuaterniyonun bir skaler ile çarpımı sırasıyla,

$$\bar{q} = S(q) - V(q) = q_1 - q_2i - q_3j - q_4k$$

(13)

$$q + p = (S(q) + S(p)) + (V(q) + V(p))$$

(14)

$$\lambda q = \lambda S(q) + \lambda V(q)$$

(15)

dir (Hacısalıhoğlu, 1983; Özdemir, 2020). Ayrıca  $q$  ve  $p$  kuaterniyonlarının kuaterniyon çarpımı

$$q \times p = S(q)S(p) - \langle V(q), V(p) \rangle + S(q)V(p) + S(p)V(q) + V(q) \wedge V(p)$$

(16)

dir.  $q$  kuaterniyonunun normu

$$\|q\| = \sqrt{q \times \bar{q}} = \sqrt{\bar{q} \times q} = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2} \quad (17)$$

dir. Eğer  $\|q\|=1$  ise,  $q$  kuaterniyonu birim kuaterniyon olarak adlandırılır.  $q = q_1 + q_2i + q_3j + q_4k$  birim kuaterniyonunun kutupsal gösterimi  $q = \cos(\theta) + m \cdot \sin(\theta)$  ile tanımlanır. Burada  $m$  birim vektörü dönme eksenini,  $\theta$  dönme açısıdır.  $q$  kuaterniyonunun tersi

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{\|q\|^2}, \quad q \neq 0 \quad (18)$$

olarak verilir.  $\psi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  bir lineer dönüşüm ve  $\psi(v) = q \times v \times q^{-1}$  olsun. Burada  $q$  bir birim kuaterniyon ve  $v$  bir saf kuaterniyondur. Böylece her  $q = q_1 + q_2i + q_3j + q_4k$  birim kuaterniyonu için  $I\mathbb{H}$  kuaterniyon kümesinin saf kuaterniyonun baz elemanları kullanılarak  $\psi$  nin  $M$  matrisi temsili

$$M = \begin{bmatrix} q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 - q_4^2 & -2q_1q_4 + 2q_2q_3 & 2q_1q_3 + 2q_2q_4 \\ 2q_1q_4 + 2q_2q_3 & q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 - q_4^2 & 2q_3q_4 - 2q_1q_2 \\ 2q_2q_4 + 2q_1q_3 & 2q_1q_2 + 2q_3q_4 & q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 \end{bmatrix} \quad (19)$$

olarak ifade edilebilir:  $M \cdot M^T = I$  ve  $\det M = 1$  olduğu için  $M$  bir ortogonal matristir.

3-boyutlu Öklid uzayında bir parametrelili homotetik hareket

$$\begin{bmatrix} Y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} hA & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

dönüşümüyle verilir. Burada  $Y$  ve  $X$  sırasıyla,  $R'$  sabit uzay ve  $R$  hareketli uzayın aynı noktasının konum vektörleridir. Ayrıca  $h$ ,  $A$  ve  $C$  sırasıyla homotetik skaler, ortogonal matris ve öteleme vektörü olarak adlandırılan  $s$  parametresine göre sürekli türevlenebilir fonksiyonlardır (Duldul, 2020).  $Q(s, \theta) = \cos \theta + \sin \theta \mathbf{t}(s)$  birim kuaterniyonu  $S^3 \subset R^4$  de bir fonksiyon ve  $\mathbf{t}(s) = (t_1, t_2, t_3)$  de  $\Omega(s)$  merkez eğrisinin teğet vektörü olsun. O halde  $\psi$  lineer dönüşüme karşılık gelen  $M$  matrisi (19) denkleminde yerine yazılarak

$$M = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta (T_1^2 - T_2^2 - T_3^2) & -2 \sin \theta (\cos \theta T_3 - \sin \theta T_1 T_2) & 2 \sin \theta (\cos \theta T_2 + \sin \theta T_1 T_3) \\ 2 \sin \theta (\cos \theta T_3 + \sin \theta T_1 T_2) & \cos^2 \theta + \sin^2 \theta (T_2^2 - T_1^2 - T_3^2) & 2 \sin \theta (\sin \theta T_2 T_3 - \cos \theta T_1) \\ 2 \sin \theta (\sin \theta T_1 T_3 - \cos \theta T_2) & 2 \sin \theta (\cos \theta T_1 + \sin \theta T_2 T_3) & \cos^2 \theta + \sin^2 \theta (T_3^2 - T_2^2 - T_1^2) \end{bmatrix} \quad (21)$$

matrisi elde edilir (Aslan ve ark., 2016; Aslan, 2017).  $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ ,  $\Omega(s)$  birim hızlı merkez eğrisinin Serret-Frenet çatısı olsun.  $Q(s, \theta) \times \mathbf{n}(s)$  kuaterniyonu kullanılarak (1) ve (2) eşitliklerinden kanal yüzeyi ve tüp yüzeyi

$$K(s, \theta) = \Omega(s) - r(s)r'(s)\mathbf{t}(s) \pm r(s)\sqrt{1-r'^2(s)} Q(s, \theta) \times \mathbf{n}(s), \quad (22)$$

$$T(s, \theta) = \Omega(s) + rQ(s, \theta) \times \mathbf{n}(s) \quad (23)$$

eşitlikleri ile verilir.  $K(s, \theta)$  kanal yüzeyinin homotetik hareket ile ifadesi

$$K(s, \theta) = \gamma(s) + \sigma(s)M \mathbf{n}(s) \quad (24)$$

ile verilir. Burada  $\gamma(s) = \Omega(s) - r(s)r'(s)\mathbf{t}(s)$ ,  $\sigma(s) = \pm r(s)\sqrt{1-r'^2(s)}$  ve  $\mathbf{n}(s)$ ,  $\Omega(s)$  eğrisinin birim normalidir.  $T(s, \theta)$  tüp yüzeyinin homotetik hareket ile ifadesi

$$T(s, \theta) = \Omega(s) + rM \mathbf{n}(s) \quad (25)$$

dir. Burada  $\Omega(s)$  homotetik hareketin öteleme vektörü,  $r$  homotetik skalası  $M$  ortogonal matris  $\mathbf{n}(s)$ ,  $\Omega(s)$  eğrisinin birim normalidir (Aslan ve ark., 2016; Aslan, 2017; Gok, 2017).

### 3. Bulgular ve Tartışma

Bu bölümde,  $q$ -çatısı kullanarak kuaterniyonlar yardımıyla  $\tilde{K}(s, \theta)$  kanal ve  $\tilde{T}(s, \theta)$  tüp yüzeylerinin denklemleri elde edilmiştir. Buna ek olarak bu yüzeylerin kuaterniyon yardımıyla birinci ve ikinci temel formları, Gauss ve ortalama eğrilik karakterizasyonları hesaplanmıştır ve bazı sayısal örnekler verilmiştir.

**Teorem 3.1.**  $R^3$  uzayında alınan  $\Omega(s)$  birim hızlı eğrisinin  $q$ -çatısı  $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}_q(s), \mathbf{b}_q(s)\}$  olsun.  $\tilde{K}(s, \theta)$  kanal yüzeyinin merkez eğrisi  $\Omega(s)$  ve  $S^3 \subset R^4$  de  $Q(s, \theta) = \cos \theta + \sin \theta \mathbf{t}(s)$  birim

kuaterniyon ve  $Q(s, \theta) \times \mathbf{n}_q(s)$  kuaterniyonu göz önüne alındığında kanal yüzeyinin parametrik denklemi

$$\tilde{K}(s, \theta) = \Omega(s) - r(s)r'(s)\mathbf{t}(s) \pm r(s)\sqrt{1-r'^2(s)} Q(s, \theta) \times \mathbf{n}_q(s) \quad (26)$$

dir. Ayrıca  $Q(s, \theta)$  birim kuaterniyonu için  $\psi: R^3 \rightarrow R^3$  matris dönüşümü kullanılarak  $\tilde{K}(s, \theta)$  kanal yüzeyinin homotetik hareket ile ifadesi

$$\tilde{K}(s, \theta) = \gamma(s) + \sigma(s)M \mathbf{n}_q(s) \quad (27)$$

ile verilir. Burada  $\gamma(s) = \Omega(s) - r(s)r'(s)\mathbf{t}(s)$ ,  $\sigma(s) = \pm r(s)\sqrt{1-r'^2(s)}$  ve  $\mathbf{n}_q(s)$ ,  $\Omega(s)$  eğrisinin kuasi normalidir.

**İspat:**  $Q(s, \theta) = \cos \theta + \sin \theta \mathbf{t}(s)$  birim kuaterniyon ve  $\mathbf{n}_q(s)$ ,  $\Omega(s)$  birim hızlı eğrisinin saf kuasi normal vektörü olsun. O halde  $Q(s, \theta)$  ve  $\mathbf{n}_q(s)$  kuaterniyonlarının kuaterniyon çarpımı (16) da yerine yazılırsa  $Q(s, \theta) \times \mathbf{n}_q(s) = \cos \theta \mathbf{n}_q(s) + \sin \theta \mathbf{b}_q(s)$  dir. (9) denklemi göz önüne alınırsa kanal yüzeyi (26) elde edilir. Diğer taraftan (20) denklemde homotetik hareketin öteleme vektörü, homotetik skalası ve ortogonal matrisi sırasıyla,  $\gamma(s) = \Omega(s) - r(s)r'(s)\mathbf{t}(s)$ ,  $\sigma(s) = r(s)\sqrt{1-r'^2(s)}$  ve  $M$  olduğu göz önüne alınırsa (27) elde edilir.

**Sonuç 3.2.**  $\tilde{T}(s, \theta)$  bir tüp yüzeyi ve  $\Omega(s)$  de bu tüp yüzeyinin merkez eğrisi olsun.  $Q(s, \theta) = \cos \theta + \sin \theta \mathbf{t}(s)$  birim kuaterniyon ve  $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}_q(s), \mathbf{b}_q(s)\}$ ,  $\Omega(s)$  eğrisinin q-çatısı olsun.  $Q(s, \theta) \times \mathbf{n}_q(s)$  kuaterniyon çarpımı kullanılarak tüp yüzeyinin parametrik denklemi

$$\tilde{T}(s, \theta) = \Omega(s) + r(Q(s, \theta) \times \mathbf{n}_q(s)) \quad (28)$$

olarak elde edilir.  $Q(s, \theta)$  birim kuaterniyonu için  $\psi: R^3 \rightarrow R^3$  matris dönüşümü kullanılarak  $\tilde{T}(s, \theta)$  tüp yüzeyinin homotetik hareket ile ifadesi

$$\tilde{T}(s, \theta) = \Omega(s) + rM \mathbf{n}_q(s) \quad (29)$$



dir. Burada  $\Omega(s)$  homotetik hareketin öteleme vektörü,  $r$  homotetik skalası  $M$  de ortogonal matrisidir.

**Teorem 3.3.**  $\mathbb{R}^3$  uzayında alınan  $\Omega(s)$  birim hızlı eğrisinin  $q$ -çatısı  $\{t(s), n_q(s), b_q(s)\}$  olsun.  $\tilde{T}(s, \theta)$  tüp yüzeyinin merkez eğrisi  $\Omega(s)$  ve  $S^3 \subset \mathbb{R}^4$  de  $Q(s, \theta) = \cos \theta + \sin \theta t(s)$  birim kuaterniyon olmak üzere  $Q(s, \theta) \times n_q(s)$  kuaterniyon çarpımının birinci mertebeden kısmi türevleri

$$\text{i) } \frac{\partial}{\partial s} (Q(s, \theta) \times n_q(s)) = (Q_s(s, \theta) \times n_q(s)) + (Q(s, \theta) \times n'_q(s)) = (\cos \theta n'_q(s) + \sin \theta b'_q(s))$$

$$\text{ii) } \frac{\partial}{\partial \theta} (Q(s, \theta) \times n_q(s)) = (Q_\theta(s, \theta) \times n_q(s)) = (-\sin \theta n_q(s) + \cos \theta b_q(s))$$

dır.

**İspat: i)**  $Q(s, \theta) = \cos \theta + \sin \theta t(s)$  birim kuaterniyon ve  $n_q(s)$  saf kuasi normal vektörü olsun.  $Q_s(s, \theta)$  ve  $n_q(s)$  kuaterniyonlarının kuaterniyon çarpımı kullanılarak (16) da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} (Q_s(s, \theta) \times n_q(s)) &= (\sin \theta t'(s) \times n_q(s)) = -\sin \theta \langle t'(s), n_q(s) \rangle + \sin \theta t'(s) \wedge n_q(s) \\ &= -\sin \theta \langle k_1 n_q(s) + k_2 b_q(s), n_q(s) \rangle + \sin \theta (k_1 n_q(s) + k_2 b_q(s)) \wedge n_q(s) \\ &= -k_1 \sin \theta \langle n_q(s), n_q(s) \rangle + k_2 \sin \theta b_q(s) \wedge n_q(s) \\ &= -k_1 \sin \theta - k_2 \sin \theta t(s) \end{aligned} \quad (30)$$

Benzer şekilde  $Q(s, \theta)$  birim kuaterniyon ve  $n'_q(s)$  saf kuasi normal vektörü (16) da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} (Q(s, \theta) \times n'_q(s)) &= (\cos \theta + \sin \theta t(s)) \times n'_q(s) = -\sin \theta \langle t(s), n'_q(s) \rangle + \cos \theta n'_q(s) + \sin \theta t(s) \wedge n'_q(s) \\ &= -\sin \theta \langle t(s), n'_q(s) \rangle + \cos \theta n'_q(s) + \sin \theta t(s) \wedge n'_q(s) \\ &= -\sin \theta \langle t(s), -k_1 t(s) + k_3 b_q(s) \rangle + \cos \theta n'_q(s) + \sin \theta (t(s) \wedge -k_1 t(s) + k_3 b_q(s)) \\ &= k_1 \sin \theta + \cos \theta n'_q(s) + \sin \theta k_3 t(s) \wedge b_q(s) \\ &= k_1 \sin \theta + \cos \theta n'_q(s) - k_3 \sin \theta n_q(s) \end{aligned} \quad (31)$$

(30) ve (31) taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned}
 (Q_t(s, \theta) \times n_q(s)) + (Q(s, \theta) \times n'_q(s)) &= -k_1 \sin \theta - k_2 \sin \theta t(s) + k_1 \sin \theta + \cos \theta n'_q(s) - k_3 \sin \theta n_q(s) \\
 &= -k_2 \sin \theta t(s) + \cos \theta n'_q(s) - k_3 \sin \theta n_q(s) \\
 &= \cos \theta n'_q(s) + \sin \theta (-k_2 t(s) - k_3 n_q(s)) \\
 &= \cos \theta n'_q(s) + \sin \theta b'_q(s)
 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

ii)  $Q(s, \theta) = \cos \theta + \sin \theta t(s)$  birim kuaterniyon ve  $n_q(s)$  saf kuasi normal vektör olsun. Bu durumda  $Q_\theta(s, \theta)$  ve  $n_q(s)$  kuaterniyonlarının kuaterniyon çarpımı ile ispat tamamlanır.

**Sonuç 3.4.**  $\mathbb{R}^3$  uzayında  $\Omega(s)$  birim hızlı eğrisi  $\tilde{T}(s, \theta)$  tüp yüzeyinin merkez eğrisi olmak üzere,  $Q(s, \theta) = \cos \theta + \sin \theta t(s)$ ,  $S^3 \subset \mathbb{R}^4$  de bir birim kuaterniyon ve  $\{t(s), n_q(s), b_q(s)\}$ ,  $\Omega(s)$  eğrisinin q-çatısı ve  $n_q(s)$ ,  $\Omega(s)$  eğrisinin kuasi normal vektörü olsun.  $Q(s, \theta) \times n_q(s) = \cos \theta n_q(s) + \sin \theta b_q(s)$  kuaterniyonunun ikinci mertebeden kısmi türevleri

$$i) \frac{\partial^2}{\partial s^2} (Q(s, \theta) \times n_q(s)) = (Q_{ss}(s, \theta) \times n_q(s) + 2Q_{s\theta}(s, \theta) \times n'_q(s) + Q(s, \theta) \times n''_q(s)) = \sin \theta b''_q(s) + \cos \theta n''_q(s)$$

$$ii) \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial}{\partial s} (Q(s, \theta) \times n_q(s)) \right) = (Q_{s\theta}(s, \theta) \times n_q(s)) + (Q_\theta(s, \theta) \times n'_q(s)) = -\sin \theta n'_q(s) + \cos \theta b'_q(s)$$

$$iii) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (Q(s, \theta) \times n_q(s)) = (Q_{\theta\theta}(s, \theta) \times n_q(s)) = (-\cos \theta - \sin \theta t(s)) \times n_q(s) = -\cos \theta n_q(s) - \sin \theta b_q(s)$$

dir.

**Sonuç 3.5.**  $\mathbb{R}^3$  uzayında  $\Omega(s)$  birim hızlı eğrisi  $\tilde{T}(s, \theta)$  tüp yüzeyinin merkez eğrisi olmak üzere  $Q(s, \theta) = \cos \theta + \sin \theta t(s)$ ,  $S^3 \subset \mathbb{R}^4$  de bir birim kuaterniyon ve  $\{t(s), n_q(s), b_q(s)\}$ ,  $\Omega(s)$  eğrisinin q-çatısı ve  $n_q(s)$ ,  $\Omega(s)$  eğrisinin kuasi normal vektörü olsun.  $\tilde{T}(s, \theta)$  yüzeyinin birim normal vektörü ,

$$\mathbf{n}_q(s, \theta) = \frac{\left( \mathbf{t}(s) + r(Q_s(s, \theta) \times \mathbf{n}_q(s) + Q(s, \theta) \times \mathbf{n}'_q(s)) \right) \wedge \left( r(Q_\theta(s, \theta) \times \mathbf{n}_q(s)) \right)}{\left\| \left( \mathbf{t}(s) + r(Q_s(s, \theta) \times \mathbf{n}_q(s) + Q(s, \theta) \times \mathbf{n}'_q(s)) \right) \wedge \left( r(Q_\theta(s, \theta) \times \mathbf{n}_q(s)) \right) \right\|} = Q_{\theta\theta}(s, \theta) \times \mathbf{n}_q(s)$$

dır.

**Sonuç 3.6.**  $\Omega(s)$  birim hızlı eğrisi  $IR^3$  uzayında  $\tilde{T}(s, \theta)$  tüp yüzeyinin merkez eğrisi olmak üzere  $Q(s, \theta) = \cos \theta + \sin \theta \mathbf{t}(s)$ ,  $S^3 \subset R^4$  de bir birim kuaterniyon ve  $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}_q(s), \mathbf{b}_q(s)\}$ ,  $\Omega(s)$  eğrisinin q-çatısı ve  $\mathbf{n}_q(s)$ ,  $\Omega(s)$  eğrisinin kuasi normal vektörü olsun.  $\tilde{T}(s, \theta)$  yüzeyinin birinci ve ikinci temel formun katsayıları sırasıyla,

$$E_q = \left\| \mathbf{t}(s) + r \frac{\partial}{\partial s} (Q(s, \theta) \times \mathbf{n}_q(s)) \right\|^2$$

$$F_q = r^2 \left\langle \frac{\partial}{\partial s} (Q(s, \theta) \times \mathbf{n}_q(s)), \frac{\partial}{\partial \theta} (Q(s, \theta) \times \mathbf{n}_q(s)) \right\rangle$$

$$G_q = r^2$$

ve

$$e_q = \left\langle \mathbf{t}'(s) + r \left( \frac{\partial^2}{\partial s^2} (Q(s, \theta) \times \mathbf{n}_q(s)) \right), \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (Q(s, \theta) \times \mathbf{n}_q(s)) \right\rangle$$

$$f_q = r \left\langle \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial}{\partial s} (Q(s, \theta) \times \mathbf{n}_q(s)) \right), \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (Q(s, \theta) \times \mathbf{n}_q(s)) \right\rangle$$

$$g_q = r$$

dır.

**Sonuç 3.7.**  $\Omega(s)$  birim hızlı eğrisi  $IR^3$  uzayında  $\tilde{T}(s, \theta)$  tüp yüzeyinin merkez eğrisi olmak üzere  $Q(s, \theta) = \cos \theta + \sin \theta \mathbf{t}(s)$ ,  $S^3 \subset R^4$  de bir birim kuaterniyon ve  $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}_q(s), \mathbf{b}_q(s)\}$ ,  $\Omega(s)$  eğrisinin q-çatısı ve  $\mathbf{n}_q(s)$ ,  $\Omega(s)$  eğrisinin kuasi normal vektörü olsun.  $\tilde{T}(s, \theta)$  yüzeyinin  $K_q$  Gauss ve  $H_q$  ortalama eğriliği sırasıyla,

$$K_q = \frac{\left\langle \mathbf{t}'(s) + r \left( \frac{\partial^2}{\partial s^2} (Q(s, \theta) \times \mathbf{n}_q(s)) \right), \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (Q(s, \theta) \times \mathbf{n}_q(s)) \right\rangle - \left\langle \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial}{\partial s} (Q(s, \theta) \times \mathbf{n}_q(s)) \right), \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (Q(s, \theta) \times \mathbf{n}_q(s)) \right\rangle^2}{\left\| \mathbf{t}(s) + r \left( \frac{\partial}{\partial s} (Q(s, \theta) \times \mathbf{n}_q(s)) \right) \right\|^2 - r^2 \left\langle \frac{\partial}{\partial s} (Q(s, \theta) \times \mathbf{n}_q(s)), \frac{\partial}{\partial \theta} (Q(s, \theta) \times \mathbf{n}_q(s)) \right\rangle^2}$$

$$H_q = \frac{\left\| \mathbf{t}(s) + r \frac{\partial}{\partial s} (\mathcal{Q}(s, \theta) \times \mathbf{n}_q(s)) \right\|^2 + r \left\langle \mathbf{t}'(s) + r \left( \frac{\partial^2}{\partial s^2} (\mathcal{Q}(s, \theta) \times \mathbf{n}_q(s)) \right), \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (\mathcal{Q}(s, \theta) \times \mathbf{n}_q(s)) \right\rangle - 2r^2 \left\langle \frac{\partial}{\partial s} (\mathcal{Q}(s, \theta) \times \mathbf{n}_q(s)), \frac{\partial}{\partial \theta} (\mathcal{Q}(s, \theta) \times \mathbf{n}_q(s)) \right\rangle \left\langle \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial}{\partial s} (\mathcal{Q}(s, \theta) \times \mathbf{n}_q(s)) \right), \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (\mathcal{Q}(s, \theta) \times \mathbf{n}_q(s)) \right\rangle}{2r \left( \left\| \mathbf{t}(s) + r \frac{\partial}{\partial s} (\mathcal{Q}(s, \theta) \times \mathbf{n}_q(s)) \right\|^2 - r^2 \left\langle \frac{\partial}{\partial s} (\mathcal{Q}(s, \theta) \times \mathbf{n}_q(s)), \frac{\partial}{\partial \theta} (\mathcal{Q}(s, \theta) \times \mathbf{n}_q(s)) \right\rangle^2 \right)}$$

dir.

**Örnek 1:**  $\Omega(s) = (\cos s, \sin s, 1)$  birim hızlı eğri olsun.  $\mathbf{k}_z = (0, 0, 1)$  izdüşüm vektörüne sahip z-ekseni yönündeki q-çatısı

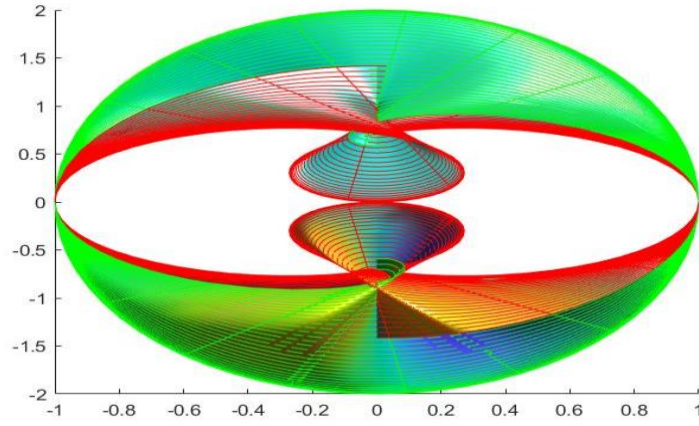
$$\mathbf{t}(s) = (-\sin s, \cos s, 0), \quad \mathbf{n}_q(s) = (\cos s, \sin s, 0), \quad \mathbf{b}_q(s) = (0, 0, 1)$$

olarak elde edilir. O halde  $\mathcal{Q}(s, \theta) = \cos \theta + \sin \theta \mathbf{t}(s)$  birim kuaterniyonu için  $\psi$  dönüşümü (21) deki  $M$  matris temsili

$$M = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \cos 2s & -\sin^2 \theta \sin 2s & -\cos s \sin 2\theta \\ -\sin^2 \theta \sin 2s & \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \cos 2s & \sin s \sin 2\theta \\ \sin 2\theta \sin s & -\sin s \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. (27) deki denklemde  $r(s) = \sin s$  alınırsa böylece kanal yüzeyi

$$\begin{aligned} \tilde{K}(s, \theta) &= \Omega(s) - r(s)r'(s)\mathbf{t}(s) \pm r(s)\sqrt{1-r'^2(s)}M\mathbf{n}_q(s) \\ &= (\cos s, \sin s, 1) + \frac{1}{2}\sin 2s(-\sin s, \cos s, 0) \pm \sin^2 s(\cos s \cos 2\theta, \sin s \cos 2\theta, \sin s \cos s \sin 2\theta - \sin^2 s \cos s \sin 2\theta) \\ &= \begin{pmatrix} \cos s - \frac{1}{2}\sin 2s \sin s \pm \sin^2 s \cos s \cos 2\theta, \\ \sin s + \frac{1}{2}\sin 2s \cos s \pm \sin^2 s \sin s \cos 2\theta, \\ 1 \pm \sin^2 s(\sin s \cos s \sin 2\theta - \sin^2 s \cos s \sin 2\theta) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



Şekil 1: q-çatısı kullanarak reel kuaterniyonlarla oluşturulan kanal yüzeyi

**Örnek 2.**  $\Omega(t) = \left( \frac{2}{\sqrt{13}} \cos t, \frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}} \sin t \right)$  bir eğri olsun.  $\mathbf{k}_z = (0, 0, 1)$  izdüşüm vektörüne sahip z-ekseni yönündeki q-çatı vektörleri

$$\mathbf{t}(t) = (-\sin t, 0, \cos t), \quad \mathbf{n}_q(t) = (0, 1, 0), \quad \mathbf{b}_q(t) = (-\cos t, 0, -\sin t)$$

olarak elde edilir. O halde  $Q(t, \theta) = \cos \theta + \sin \theta \mathbf{t}(t)$  birim kuaterniyonu için  $\psi$  nin  $M$  matris temsili

$$M = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \cos 2t & -\sin 2\theta \cos t & -\sin^2 \theta \sin 2t \\ \sin 2\theta \cos t & \cos 2\theta & \sin 2\theta \sin t \\ -\sin^2 \theta \sin 2t & -\sin 2\theta \sin t & \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \cos 2t \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Böylece Sonuç (3.2) den tüp yüzeyini  $\tilde{T}(t, \theta) = \Omega(t) + rM \mathbf{n}_q(t)$  olarak alabiliriz.

O halde

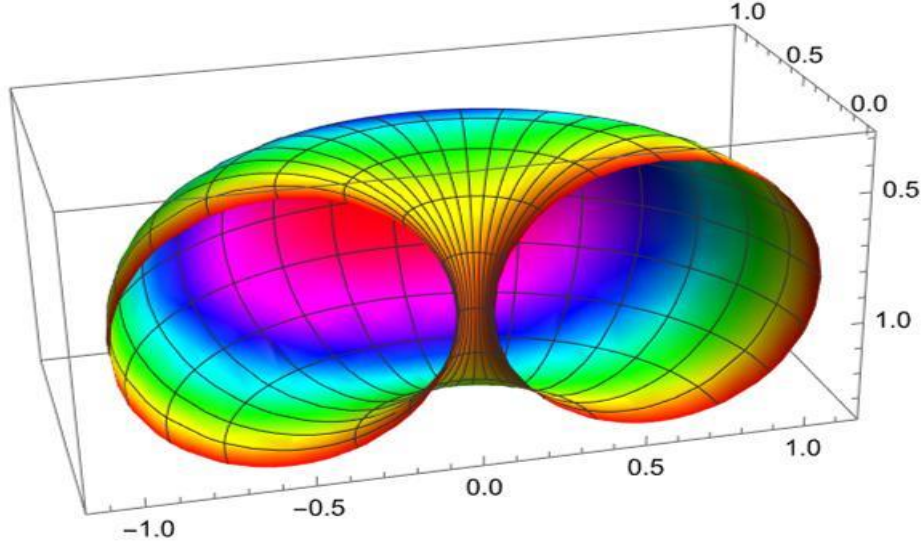
$$\tilde{T}(t, \theta) = \Omega(t) + rM \mathbf{n}_q(t)$$

$$= \left( \frac{2}{\sqrt{13}} \cos t, \frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}} \sin t \right) + r(-\sin 2\theta \cos t, \cos 2\theta, -\sin 2\theta \sin t)$$

$$= \left( \frac{2}{\sqrt{13}} \cos t - r \sin 2\theta \cos t, \frac{3}{\sqrt{13}} + r \cos 2\theta, \frac{2}{\sqrt{13}} \sin t - r \sin 2\theta \sin t \right)$$

$r = \frac{1}{2}$  alınırsa Şekil 2'deki tüp yüzeyi elde edebiliriz.

$$\tilde{T}(t, \theta) = \left( \frac{2}{\sqrt{13}} \cos t - \frac{1}{2} \sin 2\theta \cos t, \frac{3}{\sqrt{13}} + \frac{1}{2} \cos 2\theta, \frac{2}{\sqrt{13}} \sin t - \frac{1}{2} \sin 2\theta \sin t \right)$$



Şekil 2. q-çatısı kullanarak reel kuaterniyonlarla oluşturulan tüp yüzeyi

$\tilde{T}(t, \theta)$  tüp yüzeyin birinci temel form ve ikinci temel formun katsayıları sırasıyla

$$E_q = \left( \frac{2}{\sqrt{13}} - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right)^2, \quad F_q = 0, \quad G_q = 1$$

ve

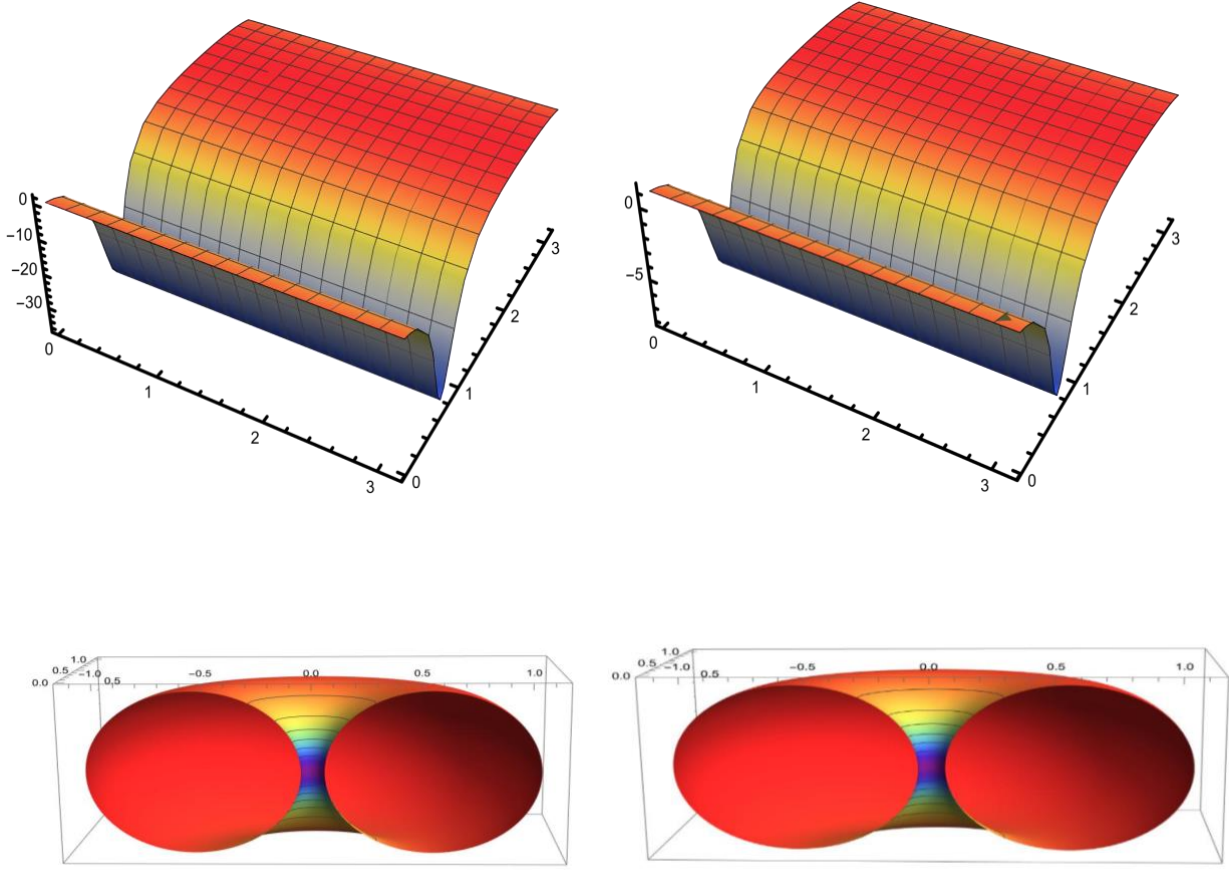
$$e_q = \left( -\frac{2}{\sqrt{13}} \sin 2\theta + \frac{1}{2} \sin^2 2\theta \right), \quad f_q = 0, \quad g_q = 2$$

dir. Bu yüzeyin Gauss ve ortalama eğriliği sırasıyla,

$$K_q = \frac{338 \sin 2\theta (-45 + 13 \cos 4\theta + 16 \sqrt{13} \sin 2\theta)}{(4\sqrt{13} - 13 \sin 2\theta)^3},$$

$$H_q = \frac{\sqrt{2} (388 - 260 \cos 4\theta - 167 \sqrt{13} \sin 2\theta + 13 \sqrt{13} \sin 6\theta)}{(45 - 13 \cos 4\theta - 16 \sqrt{13} \sin 2\theta)^{\frac{3}{2}}}$$

olarak hesaplanır.



Şekil 3. Gauss ve ortalama eğrilik fonksiyonlarının yüzey üzerindeki grafikleri ve varyasyonu

**Örnek 3.**  $\Omega(t) = (3t, 4t, 1)$  bir eğri olsun.  $\mathbf{k}_z = (0, 0, 1)$  izdüşüm vektörüne sahip z-ekseni yönündeki q-çatısı

$$\mathbf{t}(t) = \left( \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0 \right), \mathbf{n}_q(t) = \left( \frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, 0 \right), \mathbf{b}_q(t) = (0, 0, -1)$$

olarak elde edilir. O halde  $Q(t, \theta) = \cos \theta + \sin \theta \mathbf{t}(t)$  birim kuaterniyonu için  $\psi$  nin  $M$  matris temsili

$$M = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta - \frac{7}{25} \sin^2 \theta & \frac{24}{25} \sin^2 \theta & \frac{4}{5} \sin 2\theta \\ \frac{24}{25} \sin^2 \theta & \cos^2 \theta + \frac{7}{25} \sin^2 \theta & -\frac{3}{5} \sin 2\theta \\ \frac{4}{5} \sin 2\theta & \frac{3}{5} \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$$

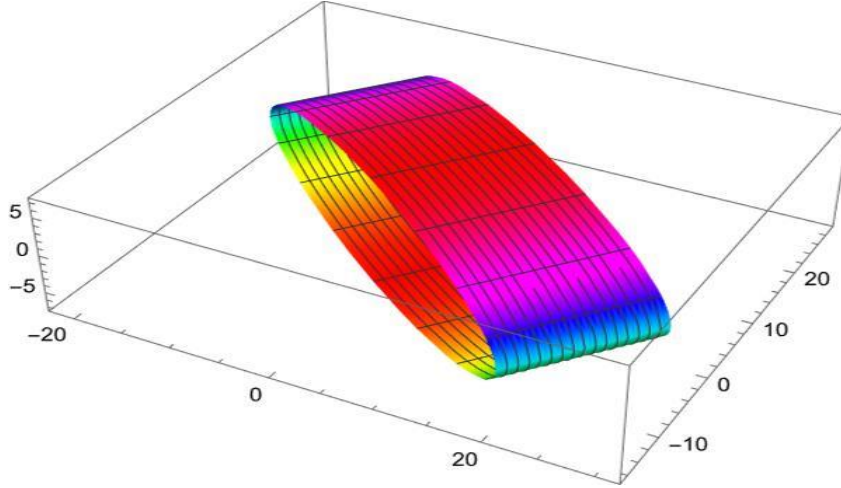
olarak elde edilir. Böylece Sonuç (3.2) den tüp yüzeyini  $\tilde{T}(s, \theta) = \Omega(t) + rM \mathbf{n}_q(t)$  olarak alabiliriz.

O halde

$$\begin{aligned}\tilde{T}(t, \theta) &= \Omega(t) + rM \mathbf{n}_q(t) \\ &= (3t, 4t, 1) + r \left( \frac{4}{5} \cos 2\theta, -\frac{3}{5} \cos 2\theta, \frac{7}{25} \sin 2\theta \right) \\ &= \left( 3t + r \cdot \frac{4}{5} \cos 2\theta, 4t - r \cdot \frac{3}{5} \cos 2\theta, 1 + r \cdot \frac{7}{25} \sin 2\theta \right)\end{aligned}$$

$r = 25$  alınırsa

$$\tilde{T}(t, \theta) = (3t + 20 \cos 2\theta, 4t - 15 \cos 2\theta, 1 + 7 \sin 2\theta)$$



Şekil 4. q-çatısı kullanarak reel kuaterniyonlarla oluşturulan tüp yüzeyi

$\tilde{T}(t, \theta)$  tüp yüzeyin birinci temel form ve ikinci temel formun katsayıları sırasıyla

$$E_q = 25, F_q = 0, G_q = (14)^2 + (48 \sin 2\theta)^2$$

ve

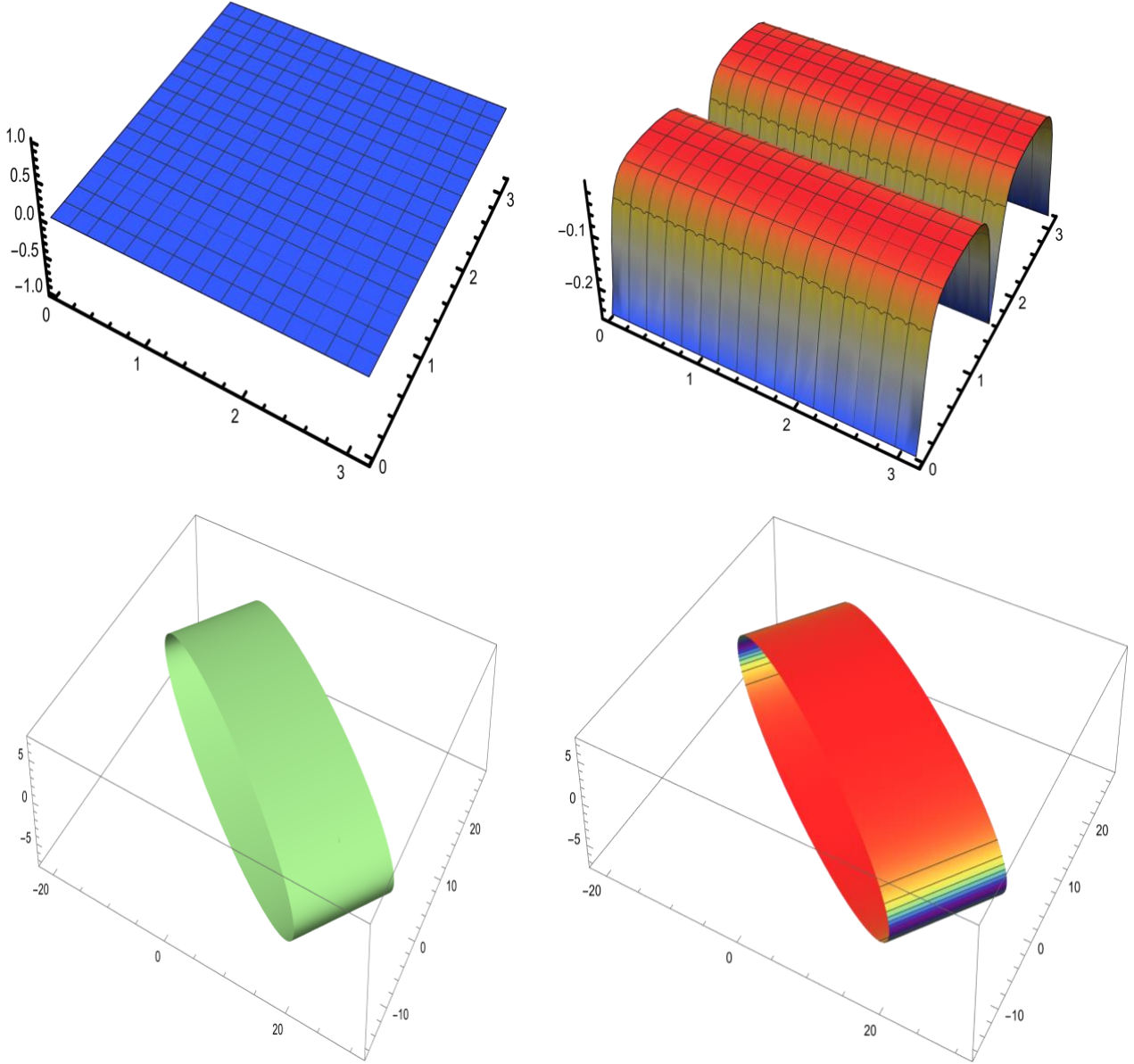
$$e_q = 0, f_q = 0, g_q = \frac{700}{\sqrt{(7^2 + (24 \sin 2\theta)^2)}}$$

dir. Bu yüzeyin Gauss ve ortalama eğriliği sırasıyla,



$$K_q = 0, H_q = -\frac{175}{2(337 - 288\cos 4\theta)^{\frac{3}{2}}}$$

olarak hesaplanır.



Şekil 5. Gauss ve ortalama eğrilik fonksiyonlarının yüzey üzerindeki grafikleri ve varyasyonu

**Örnek 4.**  $\Omega(t) = (t, t, t)$  bir eğri olsun.  $k_z = (0, 0, 1)$  izdüşüm vektörüne sahip z-ekseni yönündeki  $q$ -çatısı

$$t(t) = \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), n_q(t) = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), b_q(t) = \left( \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}} \right)$$

olarak elde edilir. O halde  $Q(t, \theta) = \cos \theta + \sin \theta \mathbf{t}$  birim kuaterniyonu için  $\psi$  nin  $M$  matris temsili

$$M = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta - \frac{1}{3} \sin^2 \theta & -\frac{1}{\sqrt{3}} \sin 2\theta + \frac{2}{3} \sin^2 \theta & \frac{1}{\sqrt{3}} \sin 2\theta + \frac{2}{3} \sin^2 \theta \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \sin 2\theta + \frac{2}{3} \sin^2 \theta & \cos^2 \theta - \frac{1}{3} \sin^2 \theta & \frac{2}{3} \sin^2 \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin 2\theta \\ \frac{2}{3} \sin^2 \theta + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin 2\theta & \frac{1}{\sqrt{3}} \sin 2\theta + \frac{2}{3} \sin^2 \theta & \cos^2 \theta - \frac{1}{3} \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Böylece Sonuç (3.2) den tüp yüzeyini  $\tilde{T}(t, \theta) = \Omega(t) + rM \mathbf{n}_q(t)$  olarak alabiliriz.

O halde

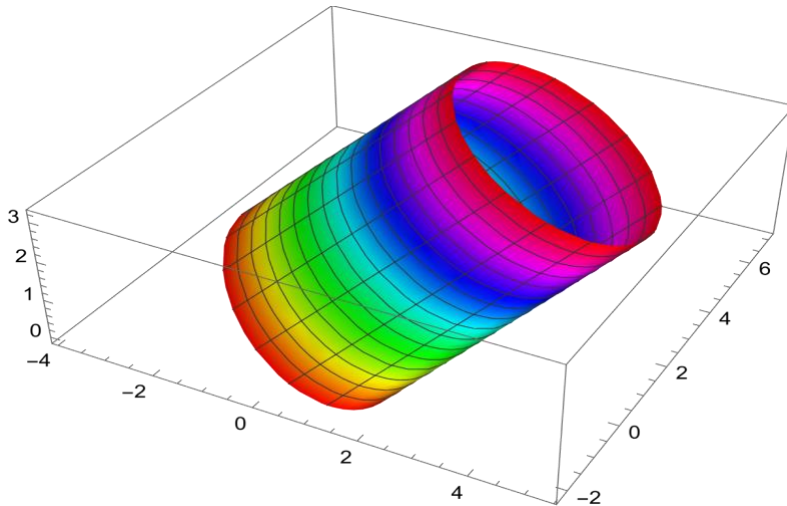
$$\tilde{T}(t, \theta) = \Omega(t) + rM \mathbf{n}_q(t)$$

$$\begin{aligned} &= (t, t, t) + r \left( \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos 2\theta - \sin^2 \theta) + \frac{1}{\sqrt{6}} \sin 2\theta, \frac{1}{\sqrt{6}} \sin 2\theta + \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin^2 \theta - \cos 2\theta), 0 \right) \\ &= \left( t + r \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos 2\theta - \sin^2 \theta) + \frac{1}{\sqrt{6}} \sin 2\theta, t + r \left( \frac{1}{\sqrt{6}} \sin 2\theta + \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin^2 \theta - \cos 2\theta) \right), t \right) \end{aligned}$$

$r = \sqrt{6}$  alınır

$$\tilde{T}(t, \theta) = \left( t + \sqrt{3} (\cos 2\theta - \sin^2 \theta) + \sin 2\theta, t + (\sin 2\theta + \sqrt{3} (\sin^2 \theta - \cos 2\theta)), t \right)$$

sonucu elde edilir.



Şekil 6. q-çatısı kullanarak reel kuaterniyonlarla oluşturulan tüp yüzeyi

$\tilde{T}(t, \theta)$  tüp yüzeyin birinci temel form ve ikinci temel formun katsayıları sırasıyla

$$E_q = 3, F_q = (2 + 2\sqrt{3}) \cos 2\theta, G_q = (3\sqrt{3} \sin 2\theta + 2 \cos 2\theta)^2 + (3\sqrt{3} \sin 2\theta - 2\sqrt{3} \cos 2\theta)^2$$

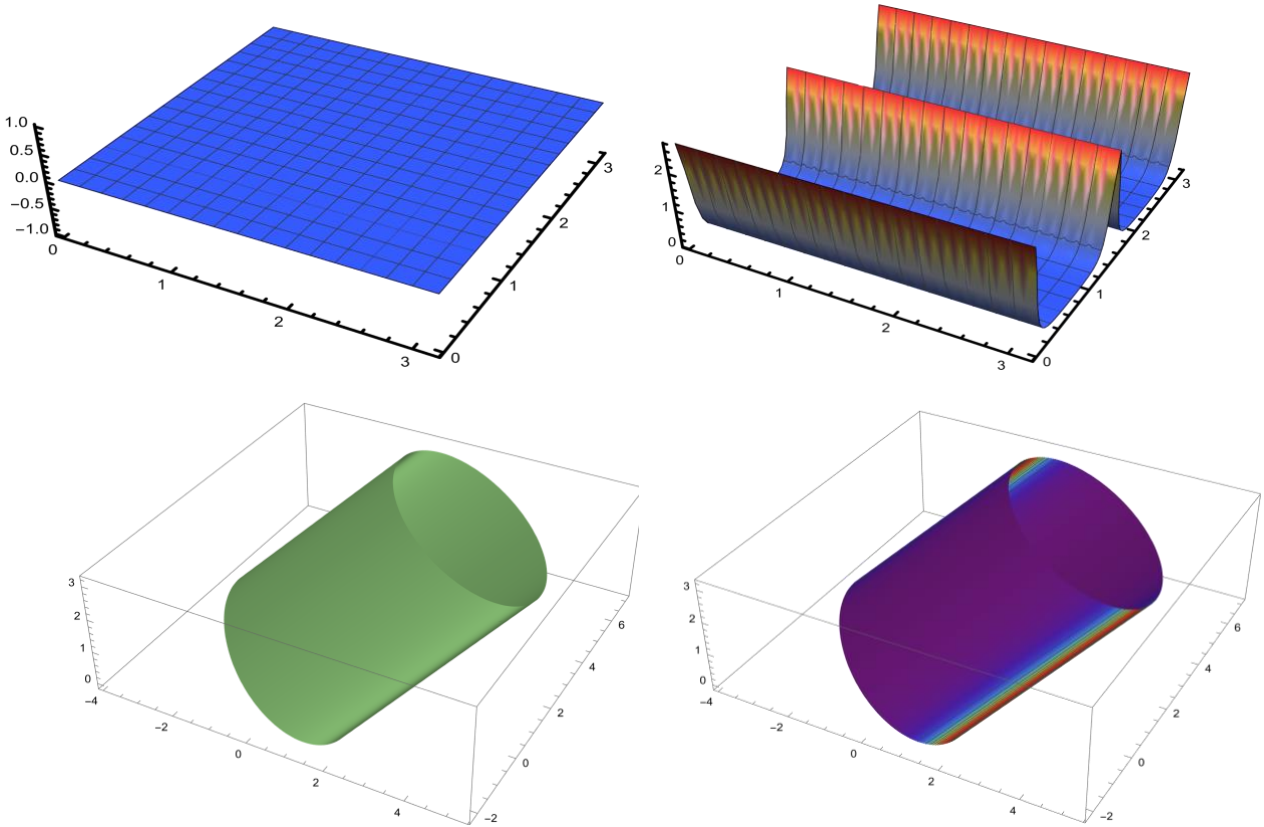
ve

$$e_q = 0, f_q = 0, g_q = \frac{12\sqrt{3} + 36}{\sqrt{16 \cos^2 2\theta + (12\sqrt{3} - 36) \sin 2\theta \cos 2\theta + 162 \sin^2 2\theta}}$$

dir. Bu yüzeyin Gauss ve ortalama eğriliği sırasıyla,

$$K_q = 0, H_q = \frac{36\sqrt{3}}{(85 - 77 \cos 4\theta)^{\frac{3}{2}}}$$

olarak hesaplanır.



**Şekil 7.** Gauss ve ortalama eğrilik fonksiyonlarının yüzey üzerindeki grafikleri ve varyasyonu

#### 4. Sonuçlar ve Öneriler

Bu çalışmada, q-çatısı yardımıyla oluşturulan kanal ve tüp yüzeylerini farklı bir bakış açısı getirilerek kuaterniyon gösterimi oluşturulmuştur. Daha sonra oluşturulan bu yüzeylerin Gauss ve ortalama eğriliği gibi karakterizasyonları elde edilmiştir. Kanal ve tüp yüzeyleri birçok alanda kullanıldığı gibi tıp alanında özellikle damar, aort, bağırsak yapılarının tasarımında yaygınlıkla kullanılmaktadır. Bu nedenden dolayı çalışmamızda elde edilen sonuçların literatüre önemli katkılarda bulunulacağı düşünülmektedir.

#### Yazarların Katkısı

Tüm yazarlar çalışmaya eşit katkıda bulunmuştur.

#### Çıkar Çatışması Beyanı

Yazarlar arasında herhangi bir çıkar çatışması bulunmamaktadır.

#### Araştırma ve Yayın Etiği Beyanı

Yapılan çalışmada araştırma ve yayın etiğine uyulmuştur.

#### Kaynaklar

- Aslan, S., Yaylı, Y. (2016). Canal surfaces with quaternions. *Adv Appl Clifford Alg* 26, 31-38.
- Aslan, S. (2017). Kuaterniyonların Diferansiyel Geometrisi. Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Celik, S., Karadağ, H. B., & Kuşak Samancı, H. (2023). The Conchoidal Twisted Surfaces Constructed by Anti-Symmetric Rotation Matrix in Euclidean 3-Space. *Symmetry*, 15(6), 1191.
- Dede, M., Ekici, C., & Tozak, H. (2015). Directional tubular surfaces. *International Journal of Algebra*, 9(12), 527-535.
- Dede, M., Ekici, C., Gorgulu, A. (2015). " Directional q-frame Along a Space curve. *IJARCSSE*, 5, 775-780.
- Do Carmo, M. (1976). *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- Dogan, F., & Yaylı, Y. (2011). On the curvatures of tubular surface with Bishop frame. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 60(1), 59-69.
- Dogan, F., & Yaylı, Y. (2012). Tubes with Darboux frame. *Int. J. Contemp. Math. Sci*, 7(16), 751-758.
- Dogan, F. (2012). Genelleştirilmiş Kanal Yüzeyleri. Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Duldul, M. (2020). Two and three dimensional regions from homothetic motions. *Appl. Math. ENotes* 10, 86–93.
- Gok, I. (2017). Quaternionic Approach of Canal Surfaces Constructed by Some New Ideas. *Advanced in Applied Clifford Algebras*; 27(2); 1175-1190.

- Gray, A., Abbena, E., Salamon, S. (2017). Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica. CRC press.
- Hacısalıhoğlu, H.H. (1994). Differential Geometry; Academic Press Inc.: Ankara, Turkey.
- Hacısalıhoğlu, H. H., (1983). Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi, Gazi Üniversitesi Yayınları.
- Kazan, A., & Karadağ, H. B. (2019). Embankment Surfaces in Euclidean 3-space and their visualizations. Communications in Mathematics and Applications, 10(3), 617.
- Kazan, A., Altın, M., & Yoon, D. W. (2021). Geometric Characterizations of Canal Hypersurfaces in Euclidean Spaces. arXiv preprint arXiv:2111.04448.
- Koyuncu, F. (2020). Yönlendirilmiş Tüp Yüzeyler. Yüksek Lisans Tezi, Kilis 7 Aralık Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Kilis.
- Maekawa, T., Patrikalakis, N. M., Sakkalis, T., & Yu, G. (1998). Analysis and applications of pipe surfaces. Computer Aided Geometric Design, 15(5), 437-458.
- Ozdemir, M. (2020). Kuaterniyon ve Geometri, Altın Nokta Yayınları.
- Sabuncuoğlu, A. (2010) Differential Geometry; Nobel Yayın Dağıtım: Ankara, Turkey.
- Xu, Z., Feng, R., & Sun, J. G. (2006). Analytic and algebraic properties of canal surfaces. Journal of Computational and Applied Mathematics, 195(1-2), 220-228.