Uşak Üniversitesi Fen ve Doğa Bilimleri Dergisi
Usak University Journal of Science and Natural Sciences

http://dergipark.gov.tr/usufedbid
https://doi.org/10.47137/usufedbid.1425851

Araştırma Makalesi (Research Article)

Minkowski Küme Sıralamaları için Minimallik ve Has Minimallik Üzerine

Ümmü UYAR[1], Mustafa SOYERTEM[2]*

[1]Institute of Science, Department of Mathematics, Uşak University, Uşak, Türkiye
[2]Department of Mathematics, Faculty of Engineering and Natural Sciences, Uşak University, Uşak, Türkiye

Geliş: 25 Ocak 2024 *Revizyon: 30 Nisan 2024* *Kabul: 3 Mayıs 2024*
Received: 25 January 2024 *Revised: 30 April 2024* *Accepted: 3 May 2024*

Özet

Bu çalışmada küme değerli optimizasyon problemlerinin çözümü için sıralama yapısını koruyacak şekilde genişletilmiş bir koni üzerinden has minimallik tanımı verilmiştir. m_1-minimallik ve m_1-maksimallik üzerine bazı optimallik şartları elde edilmiş, bu sonuçlar vektör optimizasyonundaki şartlar ile karşılaştırılmıştır. Ayrıca, m_1-maksimallik tanımının vektörler için tanımlanan maksimallik tanımına denk olduğu görülmüştür. m_1 sıralaması için güçlü minimallik de çalışılmış ve bir yeterli şart ispatlanmıştır. Son olarak, verilen tanımlardaki farklılıkları ve elde edilen özelliklerin uygulamalarını gösteren geometrik örnekler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: *Has minimallik, m_1 sıralaması, küme değerli optimizasyon, Minkowski fark.*

On Minimality and Proper Minimality with Respect to Minkowski Set Orders

Abstract

In this study, proper minimality definition is given via an expanded cone to preserve the ordering structure for the solution of set-valued optimization problems. Some optimality conditions on m_1 - minimality and m_1-maximality are obtained, and these results are compared with the conditions in vector optimization. Additionally, it is seen that the m_1 - maximality definition is equivalent to the maximality definition defined for vectors. Strong minimality for m_1 order is also studied and a sufficient condition is proved. Finally, geometric examples are given to show the differences in the definitions given and the applications of the obtained properties.

Keywords: *Proper minimal, m_1 order, set-valued optimization, Minkowski difference.*

*Corresponding author: Ümmü UYAR
E-mail: ummu.uyar.64@gmail.com (ORCID ID: 0000-0002-6247-7598)
E-mail: mustafa.soyertem@usak.edu.tr (ORCID ID: 0000-0003-4158-1713)

1. Giriş

Has (proper) minimallik kavramı, çözümlerin bazı istenmeyen özelliklerini ortadan kaldırmak için öncelikle vektör optimizasyonu için tanımlandı. Bu tür kavramları tanıtmanın ana amacı, minimum noktalar kümesinden istenilen amaca yönelik olarak daha kullanışlı noktaları seçmektir. Vektör optimizasyonu için araştırmacılar farklı has minimallik kavramları tanımlamışlardır [1, 2]. Bu kavram ilk olarak, Pareto sıralamasına sahip çok kriterli optimizasyon problemleri için Geoffrion tarafından ortaya atıldı [3]. Daha sonra Henig, genel bir vektör optimizasyon problemi için has minimalliğe yönelik geometrik bir yaklaşım önerdi [1]. Bu yaklaşımda sıralamaların genişletilmiş bir koniye göre hala minimallik kavramlarını sağladığı bir tür kararlılık dikkate alındı. Diğer birçok yazar, uygun minimalliğin alternatif doğal versiyonlarını önerdi. (Has minimalliğe ilişkin ayrıntılı bir yazı için [4]' e bakınız.).
Son yıllarda birçok araştırmacı, vektör optimizasyonunun amaç fonksiyonlarının küme değerli fonksiyonlar olduğu bir problem sınıfına genişletilmesine odaklandı. Örneğin matematiksel finans [5], oyun teorisi [6], matematiksel ekonomi [7] ve güçlü (robust) optimizasyon [8] gibi alanlarda bazı ilginç uygulamaları vardır (Bölüm 9, [9]). Vektör sıralamalarını küme değerli optimizasyona genişletilmesi ilk olarak Kuroiwa tarafından ortaya atıldı [10]. Literatürde küme optimizasyonu için has minimallik kavramı, Huerga ve arkadaşlarının yakın tarihli makalesinde önerildi [11]. Bu çalışmada, Emrah ve arkadaşlarının [12] tanımladığı küme sıralamaları ile işlem yapıldı.
Bu makalede, uzaydaki vektör değerli sıralama yapısının genelleştirilmesi olan kısmi sıralama bağıntısı ve topolojik vektör uzaylarının alt kümeleri için Henig anlamında has minimallik kavramı ele alındı. 2. bölümde konuya ilişkin bazı tanımlar verildi. Bulgular kısmında ise m_1 maksimallik ve m_1 minimallik kavramları ile ilgili önerme ve bu önermenin sonucu verildi. Huerga ve arkadaşlarının[13] makalesinde de küme optimizasyonundaki has minimallikler üzerine yeni çalışmalar verildi. m_1 has-minimal ve m_1 has-maksimal tanımları yapıldı. m_1 -has minimallik ve m_1 –minimallik arasındaki bağlantının daha iyi anlaşılabilmesi için bir örnek verildi. Verilen m_1-has minimallik ile güçlü minimallik arasında bir önerme verildi. Bu önerme örnekler ile desteklendi. Son bölümde, bulgular bölümünde verilen tanım ve önermelerin Huerga ve arkadaşlarının[13] has minimallik tanımı ile karşılaştırıldı.

2. Temel Tanım ve Teoremler

Y herhangi bir topolojik vektör uzayıdır. Çalışma boyunca $X \subset Y$ boştan farklı bir küme, $\wp(Y)$, Y'nin kuvvet kümesi ve $\mathcal{B}^*(Y)$, Y'nin boştan farklı sınırlı altkümelerin ailesi olarak alınacaktır.
$\emptyset \neq K \subset Y$ olmak üzere her $\lambda \geq 0$ ve $k \in K$ için $\lambda k \in K$ ise K kümesine koni denir. K'nın topolojik içi $int(K)$ ile gösterilir. $int(K) \neq \emptyset$ ise K'ya katı (solid) koni denir. Bu çalışmada K, topolojik vektör uzayında kapalı(closed), dışbükey(convex), sivri(pointed) ve sıralama konisi olarak ele alınmıştır ve K 'nın tümleyeni , K^t ile gösterilmiştir. C konisi has minimallikte gerekli olan $K\backslash\{0_Y\} \subset int(C)$ olacak şekildeki daha geniş bir koniyi göstermek için kullanılmıştır. Huerga ve arkadaşlarının[13] makalesinde C konisini elde etmek için koni tabanı kullanılmıştır.

Tanım 2.1 $A, B \in \wp(Y)$ olsun.

i. $A + B = \{a + b: a \in A \wedge b \in B\}$ kümesine A ve B'nin cebirsel toplamı,
ii. $A - B = \{a - b: a \in A \wedge b \in B\}$ kümesine A ve B'nin cebirsel farkı,
iii. $A \dot{-} B = \{x \in X: x + B \subset A\} = \bigcap_{b \in B}(A - b)$ kümesine A ve B 'nin Minkowski (Pontryagin) farkı denir.

Bu makalede Y topolojik vektör uzayı $\emptyset \neq K \subset Y$ kapalı, dışbükey ve sivri ($K \cap (-K) = \{0\}$) konisi ile kısmi sıralı olarak alınacaktır. Bu $\leq_K$ kısmi sıralaması ve $<_K$ bağıntısı

$$x \leq_K y \Leftrightarrow \; y - x \in K,$$
$$x <_K y \Leftrightarrow \; y - x \in int(K) \;\; \forall x, y \in Y \tag{2.1}$$

olarak tanımlanır.
Bu bölümde verilen tanım, önerme ve sonuçlar için daha detaylı bilgi için [12] çalışmasına bakılabilir.

$A \subset Y$ ve $a_0 \in A$ olsun. $A \cap (a_0 - K) = \{a_0\}$ ($A \cap (a_0 + K) = \{a_0\}$) ise a_0'a K konisine göre A kümesinin bir minimal (maksimal) noktasıdır, denir. A kümesinin tüm minimal (maksimal) kümelerinin oluşturduğu küme $minA$ ($maksA$) ile gösterilir. Benzer olarak $A \cap \left(a_0 - int(K)\right) = \emptyset$ ($A \cap (a_0 + int(K)) = \emptyset$) ise a_0'a K konisine göre A kümesinin bir zayıf minimal (zayıf maksimal) noktası denir ve A kümesinin tüm zayıf minimal (zayıf maksimal) kümelerinin oluşturduğu küme $WminA$ ($WmaksA$) sembolleri ile gösterilir.

Aşağıda, bir küme ailesi üzerinde kısmi sıralama bağıntısı olan $\preccurlyeq_K^{m_1}$ ve $\preccurlyeq_K^{m_2}$ bağıntıları hatırlatılmıştır. Bu bağıntılarla ilgili daha fazla bilgi [12] çalışmasına bakılabilir.

Tanım 2.2 [12] $A, B \in \wp(Y)$ olsun. $\wp(Y)$ üzerinde m_1 ve m_2 bağıntıları sırasıyla

i. $A \preccurlyeq_K^{m_1} B :\Leftrightarrow (B \dot{-} A) \cap (K) \neq \emptyset$
ii. $A \preccurlyeq_K^{m_2} B :\Leftrightarrow (B \dot{-} A) \cap (-K) \neq \emptyset$

şeklinde tanımlanır.

$K \in \wp(Y)$ olmak üzere $\preccurlyeq_K^{m_1}$ bağıntısı toplama ve çarpmayla uyumludur. Aynı zamanda $\preccurlyeq_K^{m_1}$ bağıntısı $\mathcal{B}^*(Y)$ üzerinde yansımalı, ters simetrik ve geçişmeli olduğundan bir kısmi sıralama bağıntısıdır. $\preccurlyeq_K^{m_2}$ bağıntısı $\preccurlyeq_K^{m_1}$'ya benzer özellikleri sağlar.

Tanım 2.3 $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}^*(Y)$, ve $A \in \mathcal{S}$ olsun.

i. $B \preccurlyeq_K^{m_1} A$ ve $A \neq B$ olacak şekilde bir $B \in \mathcal{S}$ kümesi yoksa A'ya $\mathcal{S}$ ailesinin bir m_1-minimal elemanı,
ii. $A \preccurlyeq_K^{m_1} B$ ve $A \neq B$ olacak şekilde bir $B \in \mathcal{S}$ kümesi yoksa A'ya $\mathcal{S}$ ailesinin bir m_1-maksimal elemanı denir.

Tanım 2.4 [14] S, sıralama konisi K olan kısmi sıralı bir doğrusal uzayın boş olmayan bir alt kümesi olsun. $S \subset \{\bar{x}\} + K$ (ya da: tüm $x \in S$ için $\bar{x} \preccurlyeq_K x$) ise $\bar{x} \in S$ elemanına güçlü minimaldir, denir.

Tanım 2.5 [11] $\mathcal{S} \in \wp(\mathrm{Y})$ ve $A \in \mathcal{S}$ olsun. Bir $y \in A$ ve için, eğer $K \backslash \{0_Y\} \subset int(C)$ olan kapalı bir konveks sivri K konisine göre A'nın minimal bir elemanı ise, Henig anlamında A'nın has minimal elemanı olarak adlandırılır.

3. Bulgular

Bu bölümde öncelikle $\boldsymbol{m_1}$ sıralamasına göre bir küme ailesinin maksimal elemanı için bir yeter şartla başlayalım.

Önerme 3.1 $\boldsymbol{\mathcal{S} \subset \mathcal{B}^*(Y)}$, $\boldsymbol{B \in \mathcal{S} \backslash A_0}$ ve $\boldsymbol{A_0}$, $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ ailesinin bir elemanı olsun. $\boldsymbol{A_0}$'ın $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ ailesinin $\boldsymbol{m_1}$ maksimal elemanı olması için gerek ve yeter şart

$$\bigcup_{B\in\mathcal{S}\setminus A_0}(B\dot{-}A_0)\subset K^t$$

olmasıdır.

Kanıt $B\in\mathcal{S}$, K sivri bir koni, $A_0,\mathcal{S}$ ailesinin bir elemanı ve $\bigcup_{B\in\mathcal{S}\setminus A_0}(B\dot{-}A_0)\subset K^t$ olsun. Bu durumda, her $B\in\mathcal{S}$ için $B\dot{-}A_0\subset K^t$ olur. O halde, $(B\dot{-}A_0)\cap K=\emptyset$ yani $A_0 \not\preccurlyeq_K^{m_1} B$ olur. O halde A_0'dan büyük bir küme yoktur ve Tanım 2.3 (ii)'den $A_0,\mathcal{S}$ ailesi için m_1 maksimal elemanıdır.
Diğer taraftan, $\bigcup_{B\in\mathcal{S}}(B\dot{-}A_0)\subset K^t$ olmasın. Bu durumda, $\exists y^*\in\bigcup_{B\in\mathcal{S}\setminus A_0}B\dot{-}A_0$ ve $y^*\notin K^t$ yani, $y^*\in K$ olur. Bir $B^*\in\mathcal{S}$ vardır öyle ki $y^*\in(B^*\dot{-}A_0)\cap K\neq\emptyset$ olur. Tanım 2.2 (i)'den $A_0\preccurlyeq_K^{m_1}B^*$ olur. Bu durumda A_0, m_1 maksimal eleman değildir.

Önerme 3.1'in koşullarındaki Minkowski farkının boş olduğu durumlarda da geçerli olduğuna dikkat ediniz. Ancak iki kümenin Minkowski farkı geometrik olarak güzel sonuçlar verse de hesaplanması oldukça zaman alır. Bu durumda bir kümenin maksimalliği için ailedeki tüm kümelerle Minkowski farkına bakarak bu işlemin tekrar tekrar yapılması gerekmektedir. Aşağıdaki sonuç Önerme 3.1'e göre daha nadir gözlemlenmesine karşın sadece bir Minkowski farkla kontrol etme şansını sağlar.

Sonuç 3.1 $\mathcal{S}\subset\mathcal{B}^*(Y)$ ve $A_0\in\mathcal{S}$ olsun. $\left(\bigcup_{B\in\mathcal{S}\setminus A_0}B\right)\dot{-}A_0\subset K^t$ ise A_0 , $\mathcal{S}$ ailesinin m_1 maksimal elemanıdır.

Kanıt Bu sonucun ispatında $\bigcup_{B\in\mathcal{S}}(B\dot{-}A_0)\subset\left(\bigcup_{B\in\mathcal{S}}B\right)\dot{-}A_0$ olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için $x\in\bigcup_{B\in\mathcal{S}}(B\dot{-}A)$ olsun. Bu durumda bir $\widetilde{B}\in\mathcal{S}$ için $A_0+x\subset\widetilde{B}\subset\bigcup_{B\in\mathcal{S}}B$ olur. Buradan $x\in\left(\bigcup_{B\in\mathcal{S}}B\right)\dot{-}A_0$ ve $\bigcup_{B\in\mathcal{S}}(B\dot{-}A_0)\subset\left(\bigcup_{B\in\mathcal{S}}B\right)\dot{-}A_0$ olur. $\left(\bigcup_{B\in\mathcal{S}}B\right)\dot{-}A_0\subset K^t$ ve $\bigcup_{B\in\mathcal{S}}(B\dot{-}A_0)\subset\left(\bigcup_{B\in\mathcal{S}}B\right)\dot{-}A_0\subset K^t$ olduğundan Önerme 3.1'den A_0 , $\mathcal{S}$ 'nin m_1 maksimalidir.

Not: Önerme 3.1 ve Sonuç 3.1 vektörlerin maksimalliği için verilen $A\cap(a_0+K)=\{a_0\}$ şartının kümeler ailesine bir genellemesidir.

Önerme 3.2 $\mathcal{S}\subset\mathcal{B}^*(Y)$, $B\in\mathcal{S}\setminus A_0$ ve A_0, $\mathcal{S}$ ailesinin bir elemanı olsun. A_0'ın $\mathcal{S}$ ailesinin m_1 minimal elemanı olması için gerek ve yeter şart

$$\bigcup_{B\in\mathcal{S}\setminus A_0}(A_0\dot{-}B)\subset K^t$$

Kanıt, Önerme 3.1 'den benzer şekilde yapılır.

Huerga ve arkadaşları [13] tarafından has minimallik ile ilgili bazı kavramların vektör optimizasyonundan küme optimizasyonuna genişletildiğini biliyoruz. Bu genişletme dışbükeylik hipotezlerini dikkate almadan has minimal noktaları Henig anlamında belirlemeye yöneliktir. Aşağıdaki tanımda küme optimizasyonunda Henig anlamında has minimal noktalar m_1 sıralamasına göre verilmiştir.

Tanım 3.1 $\mathcal{S}\subset\mathcal{B}^*(Y)$ ve $A_0,\mathcal{S}$ küme ailesinin $\preccurlyeq_K^{m_1}$ sıralamasına göre m_1 minimal elemanı olsun. A_0, $K\setminus\{0\}\subset intC$ olacak şekilde bir C konisi için de m_1 minimal elemanı ise $\mathcal{S}$'nin m_1 has-minimalidir denir. m_1 has-maksimal benzer şekilde verilebilir.

Önerme 3.3 $\mathcal{S}\subset\mathcal{B}^*(Y)$ ve $A_0\in\mathcal{S}$ kümesi m_1 has-minimal ise m_1 minimaldir.

Kanıt $\boldsymbol{A_0}, \boldsymbol{K}\backslash\{\mathbf{0}\} \subset \boldsymbol{intC}$ olacak şekilde bir $\boldsymbol{C}$ konisine göre $\boldsymbol{m_1}$ has-minimal olsun ama $\boldsymbol{K}$ konisine göre $\boldsymbol{m_1}$ minimal olmasın. Bu durumda $\boldsymbol{B} \preccurlyeq_{\boldsymbol{K}}^{\boldsymbol{m_1}} \boldsymbol{A_0}$ yani $(\boldsymbol{A_0} \dot{-} \boldsymbol{B}) \cap \boldsymbol{K} \neq \emptyset$ olacak şekilde en az bir $\boldsymbol{B} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}\backslash\{\boldsymbol{A_0}\}$ vardır. $(\boldsymbol{A_0} \dot{-} \boldsymbol{B}) \cap \boldsymbol{K} \subset (\boldsymbol{A_0} \dot{-} \boldsymbol{B}) \cap \boldsymbol{C}$ olduğundan bu $(\boldsymbol{A_0} \dot{-} \boldsymbol{B}) \cap \boldsymbol{C} \neq \emptyset$, yani $\boldsymbol{B} \preccurlyeq_{\boldsymbol{C}}^{\boldsymbol{m_1}} \boldsymbol{A_0}$ olması demektir. Bu da $\boldsymbol{A_0}$ kümesinin $\boldsymbol{m_1}$ has-minimal olması ile çelişir. O halde $\boldsymbol{A_0}, \boldsymbol{m_1}$ minimaldir.

Geoffrion'un [2] birim çember kullanarak vermiş olduğu vektör değerli optimizasyon problemi örneğinde has minimal olan noktalar minimal iken bazıları için tersi geçerli değildir. Aşağıda aynı örnek için $\boldsymbol{m_1}$ has minimal olan kümelerin $\boldsymbol{m_1}$ minimal ve orijinalinde olduğu gibi $\boldsymbol{m_1}$ minimal olan iki kümenin $\boldsymbol{m_1}$ has minimal olmadığı görülmüştür.

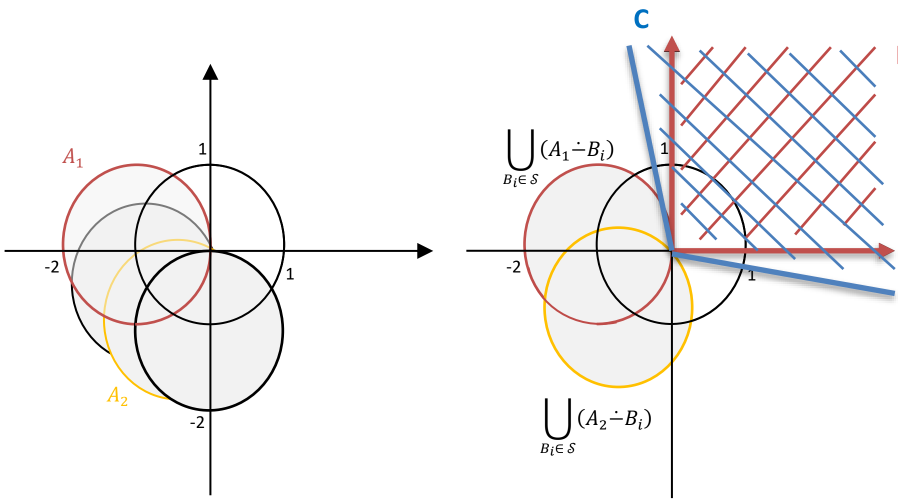
Örnek 3.1 $\boldsymbol{Y} = \mathbb{R}^2$ olsun. $\mathbf{K} = \mathbb{R}^2_+$,
$\boldsymbol{A_1} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}): (\boldsymbol{x}+\mathbf{1})^2 + \boldsymbol{y}^2 \leq \mathbf{1}\} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}$,

$$\boldsymbol{A_2} = \left\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}): \left(\boldsymbol{x} + \frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}\right)^2 + \left(\boldsymbol{y} + \frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}\right)^2 \leq \mathbf{1}\right\} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}$$

ve $\boldsymbol{x_i^2} + \boldsymbol{y_i^2} \leq \mathbf{1}$ olmak üzere $\boldsymbol{\mathcal{S}}$,

$$\mathbf{B}_{\boldsymbol{i}} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}): (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_i})^2 + (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y_i})^2 \leq \mathbf{1}\}$$

kümelerinin ailesi olsun. Bu durumda $\boldsymbol{A_1} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}$ ve $\boldsymbol{A_2} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}$ olur.



Şekil 1. Örnek 3.1'deki kümeler

Şekil 1'de görülüyor ki, Önerme 3.2'den $A_1 = \bigcup_{B_i \in \mathcal{S}} (A_1 \dot{-} B_i) \subset K^t$ olduğundan dolayı A_1 kümesi K'ya göre minimaldir. Fakat $K\backslash\{0\} \subset \mathrm{int}\, C$ olacak şekilde bir C konisi için $\bigcup_{B_i \in \mathcal{S}} (A_1 \dot{-} B_i) \not\subset C^t$ olur. Dolayısıyla $A_1 \in \mathcal{S}$ kümesi C'ye göre minimal olmadığı için K'ya göre m_1 has minimal değildir.

Ayrıca, $A_2 = \bigcup_{B_i \in \mathcal{S}} (A_2 \dot{-} B_i) \subset K^t$ olduğundan dolayı A_2 kümesi K'ya göre minimaldir. Ayrıca, $K\backslash\{0\} \subset \mathrm{int} C$ olacak şekilde bir C konisi için $\bigcup_{B_i \in \mathcal{S}} (A_2 \dot{-} B_i) \subset C^t$ olur. Yani, $A_2 \in \mathcal{S}$ kümesi C'ye göre minimal olduğu için K'ya göre de m_1 has minimaldir.

Tanım 3.2 $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}^*(Y)$ ve $A_0 \in \mathcal{S}$ olsun. *Her* $B \in \mathcal{S}$ *için* $A_0 \preccurlyeq_K^{m_1} B$ ise A_0, $\mathcal{S}$'nin m_1 güçlü minimalidir denir.

Önerme 3.4 $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}^*(Y)$ ve $A_0 \in \mathcal{S}$ olsun. $(\bigcap_{B\in\mathcal{S}}(B \dot{-} A_0)) \cap K \neq \emptyset$ ise A_0, $\mathcal{S}$'nin m_1 güçlü minimaldir.

Kanıt $x_0 \in (\bigcap_{B\in\mathcal{S}}(B \dot{-} A_0)) \cap K$ olsun. Bu durumda her $B \in \mathcal{S}$ için $x_0 \in (B \dot{-} A_0) \cap K$ olacağından $(B \dot{-} A_0) \cap K \neq \emptyset$ olur. Yani, her $B \in \mathcal{S}$ için $A_0 \preccurlyeq_K^{m_1} B$ olur. A_0, $\mathcal{S}$'nin m_1 güçlü minimaldir.

Bu önerme tersine bir gerektirme vermez. Aşağıdaki örnekte şartı sağlamadığı halde güçlü minimal olan bir küme örneği verilmiştir.

Örnek 3.2 $A_x\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dönüşümü $A_x = [-1-x, 1-x]^2$ olarak tanımlansın. $x < y$ ise $A_y \preccurlyeq_K^{m_1} A_x$ olur. Bunun sebebi $(A_x \dot{-} A_y) = \{(y-x, y-x)\}$ olmasıdır. Buradaki Minkowski farklar tek elemanlı farklı kümeler olduğundan $\bigcap_{x\in[0,1]} (A_x \dot{-} A_1) \cap K = \emptyset$ olur. Yani Önerme 3.4'deki şartı sağlamaz. Ama A_1 m_1 güçlü minimaldir.

Aşağıdaki örnek Önerme 3.4'ün bir uygulamasıdır.

Örnek 3.3 $\mathcal{S} = \{A_x\colon x \in [0,1]\}$ ve $A_x = [-1, 1+x]^2$ olarak tanımlansın. Her $x \in [0,1]$ için $(A_x \dot{-} A_0) = [0, x]^2$ olur. Bu durumda $\bigcap_{x\in[0,1]}(A_x \dot{-} A_0) = \{(0,0)\}$ olur. Sonuç olarak, $\bigcap_{x\in[0,1]}(A_x \dot{-} A_0) \cap K \neq \emptyset$ ve A_0, m_1 güçlü minimal olur.

4. Tartışma

Vektör değerli optimizasyondaki has minimallik kavramı hakkında uzun yıllar araştırmalar yapılmıştır [1,2]. Bu kavrama ihtiyaç duyulmasının sebebi minimum noktalar kümesinden istenilen, amaca yönelik, daha kullanışlı noktaları seçmektir. Bu amaçla has minimallik kavramı ilk olarak Geoffrion tarafından ortaya atıldı [3]. Bu kavramı Pareto sıralamasına sahip çok kriterli optimizasyon problemleri için kullandı. Ardından Henig, genel bir vektör optimizasyon problemi için has minimallik kavramına geometrik olarak yaklaştı [1]. Bu yaklaşımda genişletilmiş bir koniye göre hala minimallik şartını sağlayan elemanları has olarak isimlendirdi. Literatürde yaptığımız araştırmalarda has minimallik kavramını küme optimizasyonuna genelleştirmeye yönelik mevcut tek girişim, Huerga ve arkadaşlarının [13] makalesinde yer almaktadır. Bu çalışma Henig tarafından ortaya atılan uygun minimallik kavramını sonlu boyutlu uzaylarda bir küme optimizasyon problemi durumuna genelleştirdi. Daha sonra, l sıralama konisinin çokyüzlü olduğu genel durum için, küme optimizasyonunda has minimalliğe ilişkin iki Geoffrion tipi kavramı tanıttı ve bunların vektör optimizasyonu çerçevesinde olduğu gibi Henig tipine eşdeğer olduğunu kanıtladı. Bu çalışmalara ek olarak öncelikle m_1 sıralamasına göre bir küme ailesinin maksimal elemanı için bir yeter şart kanıtlandı. Ardından iki kümenin Minkowski farkı geometrik olarak bakılacak olduğunda sadece tek bir Minkowski fark ile görülebileceği gözlendi. Huerga'nın l sıralamasına ek olarak Henig anlamda has minimallik kavramları kullanılarak m_1 sıralamasına göre de rahat bir şekilde görülebileceği açıklanıp örnekler verildi. Bunun üzerine vektör değerli optimizasyonda olduğu gibi küme değerli optimizasyonda da has minimal kümelerin minimal küme olup, bazı minimal kümelerin has minimal olmadığı kanıtlandı. Ek olarak bir küme m_1 has minimal ise güçlü minimal olduğu ama tersinin geçerli olmadığı gösterildi ve örnekler verildi.

Teşekkür

Bu çalışma, TÜBİTAK Bilim İnsanı Destek Programları Başkanlığı (BİDEB) 2210/A- Yurt İçi Genel Yüksek Lisans Burs Programı kapsamında desteklenmiştir.

Çıkar Çatışması

Yazarlar arasında çıkar çatışması bulunmamaktadır.

Katkı Oranı

Yazarlar eşit oranda katkı sağlamışlardır.

Etik Kurul Onayı

Bu çalışmada etik kurul onayına gerek duyulmamaktadır.

Kaynaklar

1. Henig MI, Proper efficiency with respect to cones. Journal of Optimization Theory and Applicaiton, 1982;36:387-407.
2. Benson HP, (2007). Matthias Ehrgott, Multicriteria Optimization, Springer (2005) ISBN 3-540-21398-8 323 pages. *European Journal of Operational Research*, *176*(3):1961-1964.
3. Geoffrion AM, Proper efficiency and the theory of vector maximization. *Journal of mathematical analysis and applications*, 1968;22(3):618-630.
4. Guerraggıo A, Molho E, Zaffaronı A, On the notion of proper efficiency in vector optimization. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1994;82:1-21.
5. Hamel AH, Heyde F, Duality for set-valued measures of risk. *SIAM Journal on Financial Mathematics*, 2010;1(1):66-95.
6. Maeda T, On characterization of Nash equilibrium strategy in bi-matrix games with set payoffs. In: *Set Optimization and Applications-The State of the Art: From Set Relations to Set-Valued Risk Measures*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2015;313-331.
7. Kreps DM, A representation theorem for preference for flexibility. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 1979;565-577.
8. Young RC, The algebra of many-valued quantities. *Mathematische Annalen*, 1931;104(1):260-290.
9. Kuhn HW, Tucker AW, Nonlinear programming. In: *Traces and emergence of nonlinear programming*. Basel: Springer Basel, 2013;247-258.
10. Kuroiwa D, Some Criteria in Set-Valued Optimization (Nonlinear Analysis and Convex Analysis). *数理解析研究所講究録*, 1997;985:171-176.
11. Huerga L, Jıménez B, Novo V, New notions of proper efficiency in set optimization with the set criterion. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2022;195(3):878-902.
12. Karaman E, Soyertem M, Atasever Güvenç İ, Tozkan D, Küçük M and Küçük Y, Partial order relations on family of sets and scalarizations for set optimization, Positivity, vol. 22 (3), 2018, pp. 783-802

13. Huerga L, et al. On proper minimality in set optimization. *Optimization Letters*, 2023; 1-16.
14. Jahn J (Ed.), (2009). *Vector optimization* (pp. 2327-4697). Berlin: Springer.