DEĞİŞİMLER HESABI VE İKTİSADA UYGULANMASI *

Oğuz ÖNER

I — GİRİŞ

1 — Değişimler Hesabı ve İktisat

Değişimler hesabı (calculus of variations) iktisatta son zamanlarda büyük önem kazanan bir matematik tekniğin adı.

Büyüme teorisi ile planlama arasında köprü görevi gören «optimal iktisat», özellikle bu matematik tekniği ve buna dayanan daha ileri analiz aletlerini kullanıyor. (Bak., IV. Bölüm)

Oysa, —bildiğimiz kadarı ile— bu tekniğe Türkçe kaynaklarla ulaşmak olanağı yok. En azından iktisatçılar için bu yargı geçerli görünüyor.

İşte bu çalışmanın amacı, değişimler hesabı konusunda temel bilgi vermek ve iktisatla ilgili örneklerle bu tekniğin iktisattaki kullanma alanı hakkında fikir vermek.

2 — Değişimler Hesabının Anlamı

Bilindiği gibi, geleneksel optimizasyon sorunu, Diferensiyel hesap (Lagrange çarpanları) ile çözümlenir. Daha sonra, olanakları bir yönde daha geniş olan proğramlama yöntemleri kullanılmaya başlanmıştır. Bu yöntemlerde, sonuçta fonksiyonu ekstrem kılan *değişkenler* elde edilir.

Değişimler hesabı da optimizasyon ile uğraşır; ancak bu yöntemde sonuç, ekstrem kılan değişken olarak değil, ekstrem kılan

(*) Bu yazının ilk taslağını okuyup değerli görüşlerini belirten sayın hocam Doç. Dr. Tuncer Bulutay ile asistan arkadaşım Dr. Hasan Ersel'e açık teşekkürlerimi sunarım .

fonksiyon olarak elde edilir. Objektif fonksiyonun yerini burada objektif *fonksiyonel* almıştır. Geleneksel optimizasyonda, nasıl bir fonksiyonun ekstrem kılan değişkeni bulunuyorsa, değişimler hesabında da fonksiyonelin ekstrem kılan fonksiyonu elde edilir.

Bu şekilde elde edilen ekstrem fonksiyon, amaç değişkenin zaman içindeki seyrini vermektedir. İşte bu optimal yol, optimal iktisada «gerçek dinamik» olma özelliğini kazandırmaktadır. Böylece geleneksel optimizasyonun *statik*liği yerine değişimler hesabının *dinamik*liği tekabül etmektedir. İktisat içeriği olarak ta, geleneksel optimizasyon teknikleri, statik ya da karşılaştırmalı statik sorunları çözerken, değişimler hesabı, dinamik iktisadî sorunların çözümlenmesinde kullanılmaktadır.

3 — Değişimler Hesabının Kısa Tarihçesi

Değişimler hesabının ilginç bir tarihçesi var. Bu hesabın *sorun* olarak çıkması çok eskilere kadar gitmektedir; hikâyeleri de söz konusu tekniğe merakı artırıcı nitelikte.

Roma donanmasının üzerlerine gelmekte olduğunu öğrenen Kartacalılar, Romalılar gelinceye kadar şehrin etrafını hendekle çevirmeğe karar verirler. Ama bu süre içinde ancak *belirli* bir uzunlukta hendek kazabilecekler. Şimdi sorun şu : şehrin etrafına çevirecekleri hendeğe *şekil* vermeliler ki içerisine azamî miktarda çiftlik, ev (alan) alabilsin?

Bu, değişimler hesabında *izoperimetrik sorun* adını taşıyor: sabit çevre içindeki alanı maksimum kılan şekil nedir? Bu problemin cevabı basit : çember. Sınama yanılma yöntemi ile Kartacalılar belki sorunlarına cevap buldular. Ama değişkenler artıp sınırlar, koşullar çoğalınca problemin çözümünü göz kararına bırakmak olanağı kalmıyor.

Kartacalılardan sonra değişimler hesabı sorunu onyedinci yüzyıla kadar çözülmeden kaldı. İlk değişimler hesabı sorununu çözen Johann Bernoulli oldu. (Bernoulli'nin problemini örnek olarak çözeceğiz.)

Daha sonra Euler, çözümü sistemleştirdi. O sırada, aralarında Newton ve Lagrange'ın da bulunduğu bazı matematikçiler de aynı konu ile uğraştılar. Ama daha sonra uzunca bir süre hesap yine ihmale uğradı.

Nihayet yirminci yüzyılda, son derece yararlı uygulamaları olacağı farkedilerek geliştirilmeğe ve güc (rigor) kazandırmaya girişildi. Son bölümde bahsedeceğimiz geliştirmelerle, uygulama olanakları artırılmış olmaktadır.

II — DEĞİŞİMLER HESABINA BAŞLANGIÇ

1 — Yardımcı Bilgiler

Değişimler hesabı, sürekli hesabın (calculus) geliştirilmiş bir koludur. Bu makalede basit sürekli hesap ve diferansiyel denklemler konusunda ilk bilgilere sahip olan okuyucuya hitap edilmektedir. Varsayılan bu bilgi, Türkçe kaynaklardan elde edilebilir.[1]

Değişimler hesabını anlatırken işimize yarayacak bazı bilgileri bu başlık altında vermeğe çalışacağız.

a — Bazı Ekstrema Kavramları

Bu kavramlar, geleneksel diferansiyel hesaptaki kavramların, modern matematiğin yardımı ile, genelleştirilmesi ile ortaya çıkmıştır.

(i) Genel (global) ve Yerel (local) Ekstrema :

Genel ekstremum, ele alınan «aralık» içindeki ekstrem değerdir : bütün [a, b] aralığı içinde.

Yerel ekstremum ise, «komşu çevre» (neibourhood) içindeki ekstrem değerdir : herhangi bir $\varepsilon > 0$ için, komşu çevre $x + \varepsilon$ ile $x - \varepsilon$ arasında olmak üzere. (Bak., Şekil 1/a) Komşu çevrenin en önemli özelliği dar olmasıdır : sıfır olmamak şartı ile istenildiği kadar daraltılabilir.

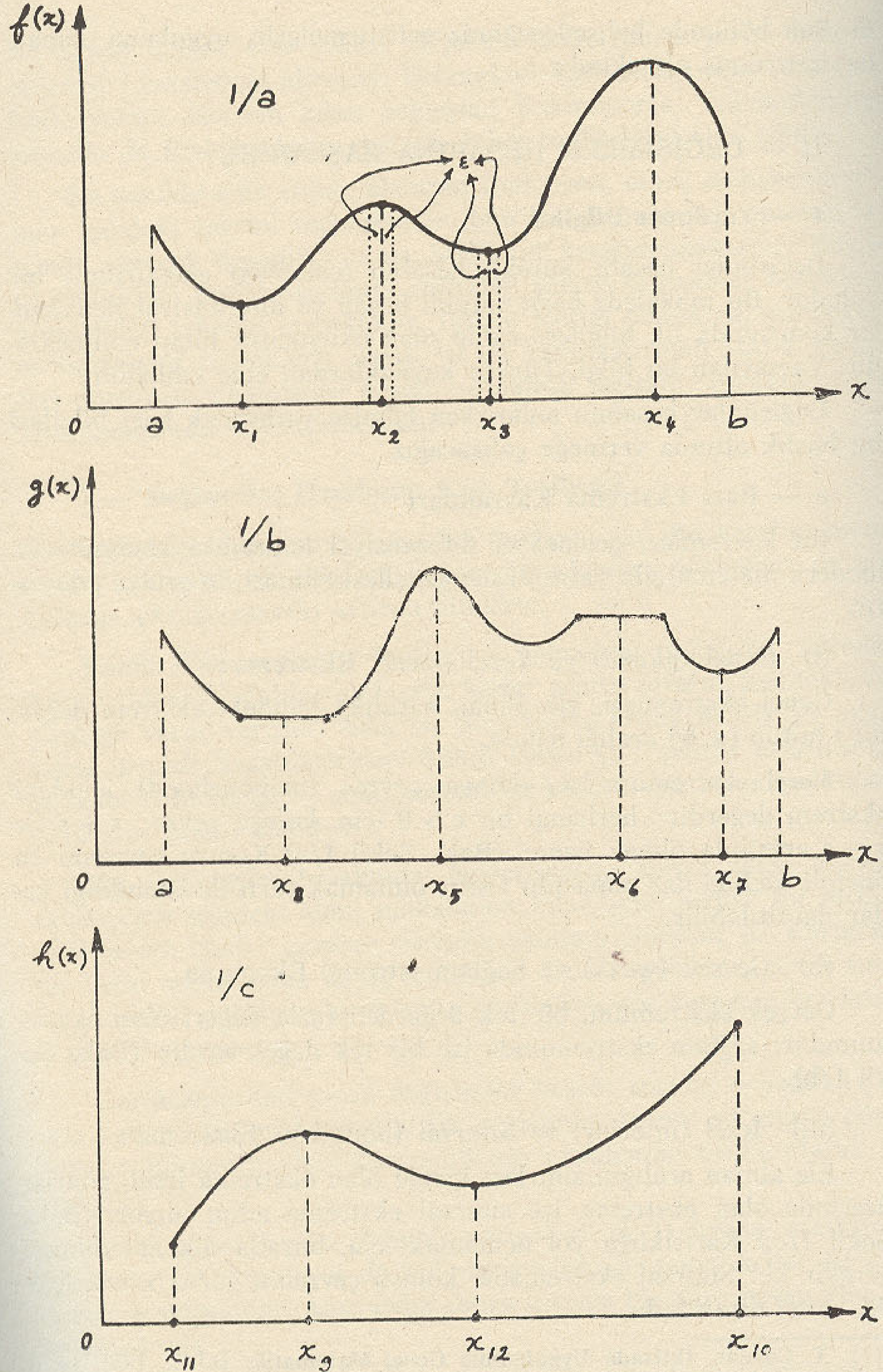
(ii) Gevşek (weak) ve Sağlam (strong) Ekstrema :

Gevşek ekstremum, bir tek değerden fazla değeri olan ekstremumdur; sağlam ekstremumda ise bir tek değer vardır. (Bak., Şekil 1/b).

(iii) İçsel (interior) ve Sınırsal (boundry) Ekstrema :

Ele alınan aralığın sınırları içinde olan ekstrema içsel, sınırlar üzerinde olan ekstrema ise sınırsal ekstrema adını alıyor. (Bak., Şekil 1/c.) Karışıklığa yol açmamak için, burada dikkat edilmesi gerekir ki : Sınırsal ekstremada, komşu çevrenin yarısı x seti içinde, yarısı dışarıdadır.

(1) T. Çavdar, **İktisada Uygulanmış Genel Matematik,** D.İ.E., 1970; ve T. Bulutay, «Diferansiyel Denklemler ve Bazı İktisadî Modeller», S.B.F. Dergisi, Haziran 1963.


f(x)
1/a
ε
0
a
x₁
x₂
x₃
x₄
b
x
g(x)
1/b
0
a
x₈
x₅
x₆
x₇
b
x
h(x)
1/c
0
x₁₁
x₉
x₁₂
x₁₀
x

Şekil : 1

Ayrıca, Şekil 1/C deki içsel ekstremanın x_9 ve x_{12} olarak gösterilebilmesi için, $x_{11} = a$ ve $x_{10} = b$ varsayımının yapılması gerekmektedir.

Şekil 1 deki ekstremayı şu şekilde sıralayabiliriz:

x_1 : genel minimum
x_2 : yerel maksimum
x_3 : yerel minimum
x_4 : genel maksimum
x_5 : sağlam maksimum
x_6 : gevşek maksimum
x_7 : sağlam minimum
x_8 : gevşek minimum
x_9 : içsel maksimum
x_{10} : sınırsal maksimum
x_{11} : sınırsal minimum
x_{12} : içsel minimum

Yukarıdaki sayılar, ekstrema türlerinin oniki tane olduğu anlamında kullanılmamıştır. Çünkü bu hallerin bazı bileşkeleri de söz konusu olacaktır ki bu hallerin hepsi şekiller içinde gösterilmiş olmuyor.[2] Ayrıca şu anda belirtilmeli ki, yukarıdaki ekstremanın yalnız bir özelliği belirtilmektedir.

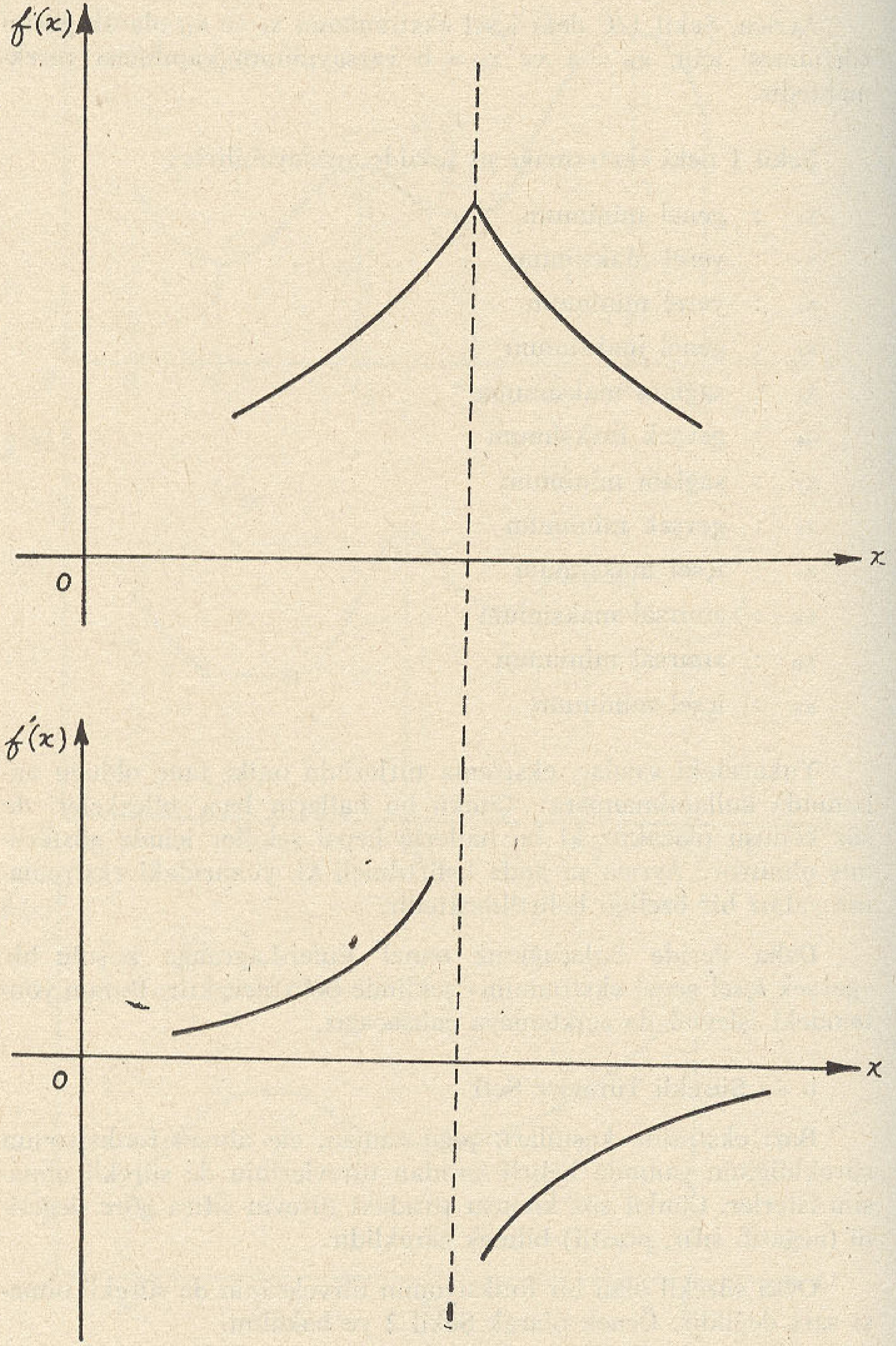
Daha ileride bulacağımız temel Euler-Lagrange koşulu bir «gevşek içsel genel ekstremum» şeklinde belirtilecektir. Bunun yöntemdeki işlevini de açıklamaya çalışacağız.

b — Sürekli Türevler Seti

Bazı ekstrama koşulları, çoğu zaman, ele alınan fonksiyonun sürekliliğinin yanında belirli sıradan türevlerinin de sürekli olmasını isterler. Çünkü söz konusu sıradaki türevin sıfıra göre değerini (negatif, sıfır, pozitif) bilmek gereklidir.

Oysa sürekli olan bir fonksiyonun türvelerinin de sürekli olması şart değildir. Örnek olarak Şekil 2 ye bakalım.

(2) Bütün bileşkelerin sayısı: $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 = 16$ olacak.



Şekil : 2

Şekil 2 nin alttaki kesiminde görüldüğü gibi, f (x) in birinci türevinin ne olduğunu bilmek kabil değildir: sıfır da değildir, negatif te, pozitif te... İşte böyle bir durumda ekstrema koşulları işlemediği için, şekildeki gibi düzensizlikler bertaraf edilmek istenir. Bu nedenle de, analizin başında, uygun bir notasyon ile gerekli varsayımların belirtilmesi gereği vardır.

Bu gereğin karşılanması için, öyle bir alan düşünelim ki, ele alınan fonksiyonun n ye kadar sıradaki sürekli türevleri bu alan içinde olsun; böylece çeşitli setlere göre, sürekli türevleri, sıralarıyla birlikte gösterebilelim. Bu setlerin elemanları sürekli türevler olacaktır.

$C^{(n)}$ böyle bir alanı göstersin. Eğer f (x) fonksiyonu ele alındığında f′ (x) sürekli ise, $f(x) \in C^{(1)}$ diyeceğiz. Bunun gibi, $g(x) \in C^{(n)}$ dersek, bu, g (x) fonksiyonunun n sırasına kadar türevleri süreklidir, anlamına gelecek.

c — Fonksiyoneller

Bilindiği gibi fonksiyon, sınırlı sayıdaki açıklayıcı değişken ile, açıklanan değişken arasındaki tek değerlikli ilişkiyi gösterir. İşte fonksiyondaki değişken sayısını (açıklayıcı değişken) *sınırsız* hale getirirsek fonksiyonel kavramına ulaşırız. Başka bir deyişle fonksiyonel, sonsuz kadar değişkeni bulunan bir fonksiyondur, denilebilir :

$$J = F(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_\infty)$$

Hemen hissedilecektir ki, sonsuz kadar değişkeni olan bir fonksiyon ile hesap yapmak imkânsızdır. Ama :

$$J = F(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n)$$

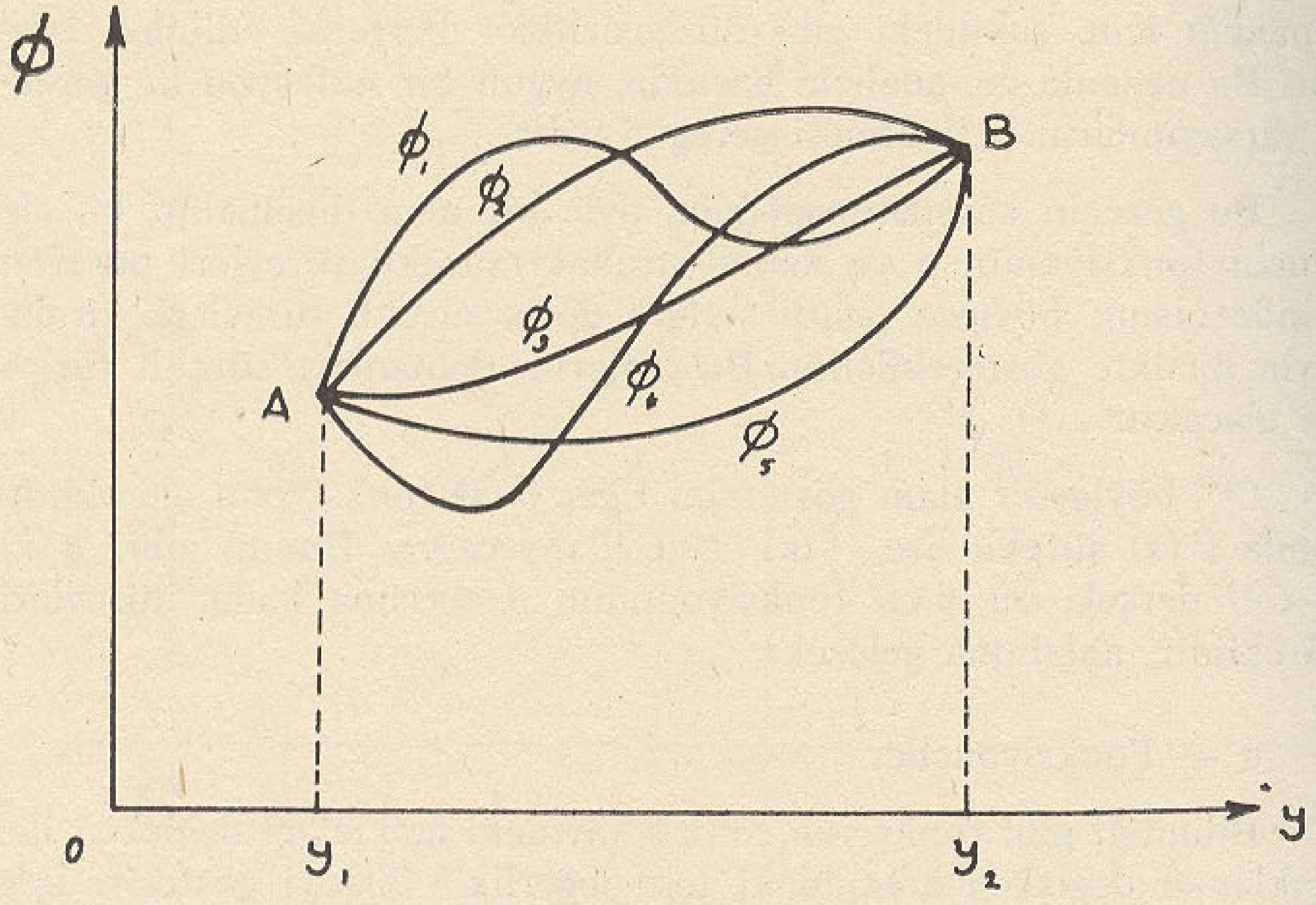
deyip, n yi yeteri kadar büyüttüğümüzde işe yarar sonuçlara ulaşmak kabil olabilir. Bunu nasıl yapabiliriz?

Önce şöyle düşünelim : fonksiyonelin sonsuz olan değişkenleri yerine, bir «değişken fonksiyon» koyalım. Her fonksiyonda zaten sonsuz kadar nokta bulunacağından bunu yapmaya hakkımız vardır.

Böyle yapınca, fonksiyoneli, *değişken fonksiyon* ile ifade etmiş oluruz :

$$J = F\left\{ \varnothing_1, \varnothing_2, \varnothing_3, \ldots \right\}$$

Öyle ki, Ø ler y nin fonksiyonudur. Şekil 3 te bu değişken fonksiyonu göstermeğe çalışıyoruz.



Şekil : 3

Şekil 3 te görünen değişken fonksiyon çok sınırlıdır. Çünkü :

— böylece eğri türü sınırlanmış olmaktadır; (bir ya da iki ekstremi vardır, süreklidir, v.s.)

— değişken fonksiyon yalnız y nin fonksiyondur;

— A ve B noktalarından geçmek zorunda bırakılmıştır.

Ne var ki, uygulamada kullanılan fonksiyoneller, hem uygulamanın somut verilerine uyduğu için, hem de basitlik sağladığı için çoğu zaman bu türdendir. Ama sabit uç noktaları yerine değişken uç noktaları koymak kabildir, ve değşiken fonksiyon bir tek değişken yerine birden fazla değişkenin fonksiyonu olabilecektir.

Aslında bu sınırlamaları o şekilde yapacağız ki, fonksiyonel sonsuz kadar değişkenden ele alabileceğimiz bir fonksiyon türüne ya da eğri sınıfına indirgenmiş olacak.

Burada bir noktayı hatırlatmak gerek o da fonksiyonelin, «fonksiyonun fonksiyonu»ndan farklı ve ayrı bir şey olduğu. Fonksiyonun fonksiyonu :

$$f(y) = h\left\{ g(y) \right\}$$

dir; ama ifadeden de görüleceği gibi, f (y) fonksiyonu, nihayet y nin fonksiyondur.

Oysa fonksiyonelin değişken fonksiyonu, y nin fonksiyonu olsa da, J fonksiyoneli y nin fonksiyonu değildir : J bir değişken fonksiyonun fonksiyonudur, bu sonuncusu da y nin.

Bunun pratik sonucu nedir? J nin y ye göre fonksiyonunu bilmediğimiz halde, J nin y ye göre ekstrem kılan değerini hesaplayabiliyoruz.

Fonksiyonellerin en çok kullanılan ve önemli bir hali, değişken fonksiyonun entegral içinde görülmesi hali.

Ø (y) değişken fonksiyonu değiştikçe biçimi değişen, ψ (y) fonksiyonunu alırsak, fonksiyoneli şu şekilde ifade etmek mümkün :

$$J = \int_{0}^{y} \varnothing \left\{ \psi (y) \right\} dy$$

2 — Değişimler Hesabının Yöntemi

Giriş bölümünde, geleneksel optimizasyonda ekstrem değişkenin bulunması yerine, değişimler hesabında ekstrem fonksiyonun bulunmasının ikame edildiğini belirtmiştik. Şimdi fonksiyoneller hakkında bilgi sahibi olduktan sonra değişimler hesabının yöntemini açıklayabiliriz :

Fonksiyoneli meydana getiren Ø (y) değişken fonksiyonu içinden, fonksiyoneli ekstrem kılan y* fonksiyonunun bulunması ile ilgiliyiz.

Bir ψ (y) fonksiyonu alalım. O şekilde ki, Ø (y) değişken fonksiyonundaki her değişme, ψ (y) fonksiyonunun değerinin değişmesine tekabül etsin; öyle ki, Ø nin her fonksiyon türünü, ya da «eğri sınıfı»nı, ψ nin bir değeri karşılasın. Böylece J içinde ψ (y) nin biçimini açıkça göstermek durumundayız. Onun için sorunumuz, ekstrem J değerinin, yani entegral içindeki bir ifadenin ekstremumunu almak şeklinde formüle edilmiş olmaktadır.

Ama değişimler hesabının özelliği olarak, ψ fonksiyonunun ekstrem değeri bulunduğunda, bulunan değer aslında bir değişken değil, ekstrem y* fonksiyonu olacak. Şimdi bu son söylediğimiz şeyin nasıl başarılabildiğine bakalım.

3 — Euler-Lagrange Denklemi

Euler - Lagrange denklemi, ya da sadece Euler denklemi,[3] J nin gevşek içsel genel ekstremumunun gerek koşulunu vermektedir. Yani çözüm yerel değildir, ele alınan bütün aralığı kapsayacaktır. Ayrıca çözüm bir sınır çözümü de değildir.

Bu iki özellik bulacağımız çözüm için çok önemlidir. Birincisinin özelliği açıktır: optimal yol içindeki bir kaç optimaliteden söz edemeyiz. İkincisi ise, elde edeceğimiz çözümün uç noktaları ile değil, bütün bir yol ile ilgiliyiz. Aslında ele alacağımız basit sabit uç türünde *genel* ekstremum varsayımını yapmazsak sorun geleneksel optimizasyona dönüşecektir. Aşağıda bu durumu göreceğiz. Koşulun gevşek olması ise, o kadar önemli değildir, yalnız, sağlam olmasının gerekli olmadığını belirtmek amacı ile konulur. Çünkü gevşek çözüm aynı zamanda bir sağlam çözümdür, ama tersi doğru değildir.

Şimdi, uyacağımız sınırları belirtelim. Bu sınırlar bize en basit değişimleri ele alma olanağını tanıyacak :

1. İki sabit uç nokta arasındaki değişimlerle ilgiliyiz.

2. ψ nin; y nin olduğu gibi, y nin bir t değişkenine göre birinci sıra türevinin ve ayrıca t nin de fonksiyonu olduğunu kabul ediyoruz, yani :

$$\psi = F(y, y', t),$$
$$y' = dy/dt \quad \text{olmak üzere.}$$

3. $y \in C^{(2)}$ olduğunu varsayıyoruz.

Görüldüğü gibi ψ, y nin bir fonksiyonudur ama t ye göre alınınca bir fonksiyonelin görevini yüklenmektedir.

Öyle ise şimdi,

$$J = \int_a^b F(y, y', t) \; dt$$

fonksiyonelini ekstrem kılan y* fonksiyonunu arayacağız.

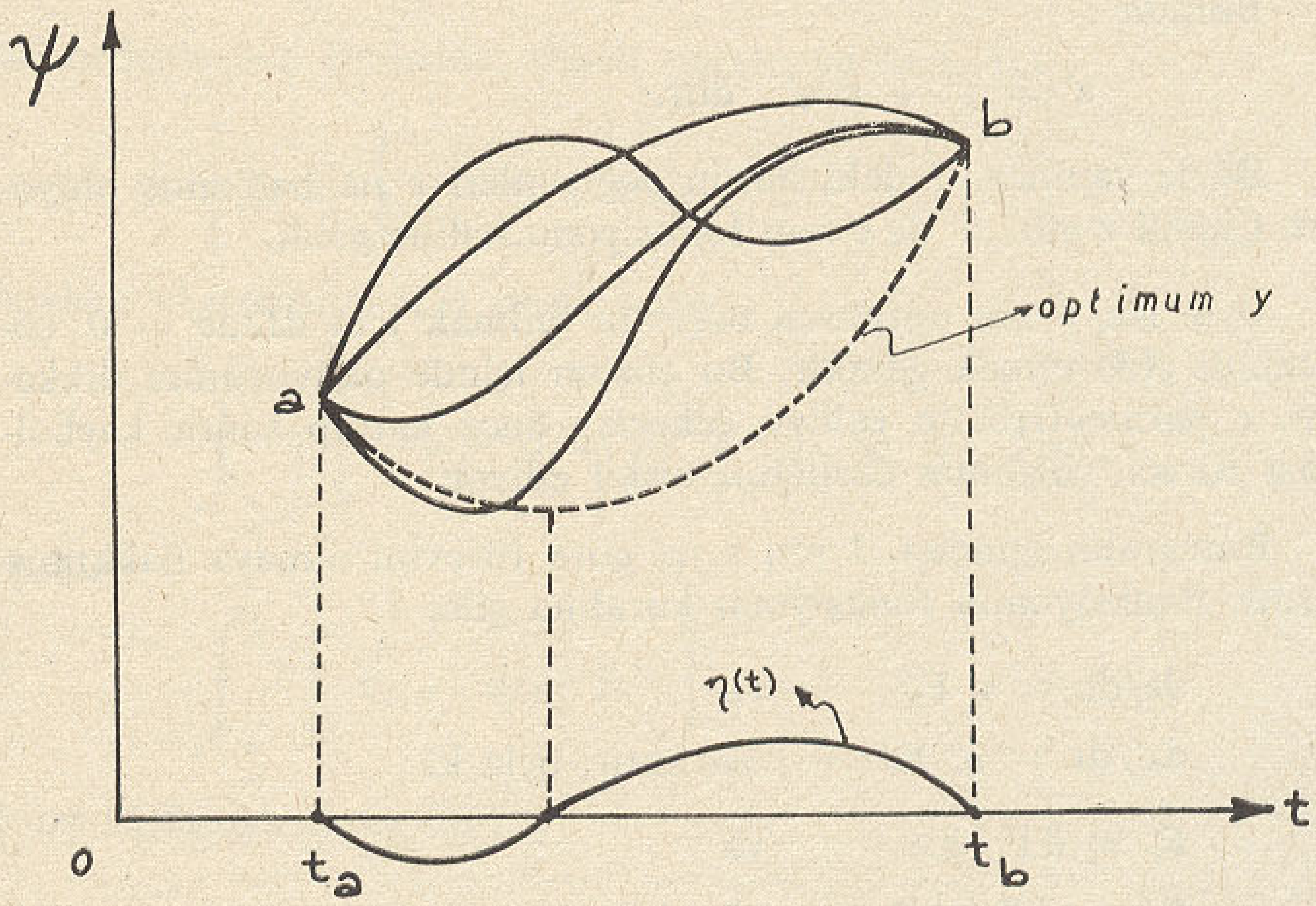
(3) Euler denklemi, Euler teoremi ile karıştırılmamalı. Euler teoremi, bilindiği gibi şu şekilde ifade edilir: bir Z (x, y) fonksiyonu alalım, öyle ki, $Z \in C^{(2)}$ olsun; eğer $Z(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n Z$ ise, Euler teoremi : $Z_x X + Z_y y = nZ$ ... dir.

Burada, ψ nin uç noktalar arasında alınacak *toplamını* gösterebilmek için ψ nin entegralini alıyoruz.[4] Çünkü fonksiyonelin [a, b] aralığındaki değişimlerini incelemekle kendimizi sınırlamıştık.

Onun için J yi minimum ya da maksimum kılacak y nin bulunması, aslında optimum y fonksiyonunun elde edilmesidir. Böylece başlangıçta, y nin t ye göre fonksiyon olarak ilişkisini açık olarak bilmiyoruz, ama değişimler hesabı yolu ile, J yi maksimum (ya da minimum) kılan y fonksiyonunu bulduğumuzda, artık y, t nin açık fonksiyonu olarak elde edilmiş olacak.

Ekstrem y yi bildiğimizi bir an için kabul edelim. Ve y deki değişimleri η (t) nin yardımı ile ifade edelim. Uç noktaları o şekilde tanımlıyoruz ki, t_a ve t_b de değişimler durmaktadır. Bu tanımdan şu sonucu çıkarabiliriz :

$$\eta\,(t_a) = \eta\,(t_b) = 0$$



Şekil : 4

(4) Bilindiği gibi entegral, $\int_a^b U dt$, sürekli bir toplamdır. Kesikli hale tekabül eden toplam şekli ise, $\sum_{i=a}^{b} U_i$ olarak gösterilmektedir.

Şekil 4 te söz konusu değişimleri görüyoruz. Şimdi açıklamamıza geçelim : y de olabilecek toplam değişimleri ifade etmek üzere yararlandığımız η (t) de, y ler ile aynı sınıftan olsun : $\eta \in C^{(2)}$. Şimdi değişimleri, η nin katları ile ifade edebiliriz.

ε gibi öyle bir parametre seçelim ki, hem η den, hem de y ve t den bağımsız olsun. O zaman y deki toplam değişimleri, z (t), şu şekilde gösterebiliriz :

$$z(t) = y(t) + \varepsilon \eta(t)$$

Böylece, yukarıdaki J fonksiyonelini aşağıdaki gibi ifade etmek mümkün olur :

$$J = \int_a^b F(z, z', t) \, dt$$

Burada :

$$z' = y' + \varepsilon \eta' \quad \text{dür.}$$

Böyle yapınca, J deki bütün değişimleri ε na bağlamış oluyoruz. Çünkü z gibi, z′ de ε nun fonksiyonu haline geldi.

Öyle ise, J nin optimum değerini bulmak için $dJ/d\varepsilon = 0$ çözümünü elde etmek gerekir. Bu çözüm içinde okuyucunun dikkatini, ε parametresinin rolüne çekeriz : önce katılıp sonra kaybolması süreci, çözümün özelliğini teşkil ediyor.

Entegralin içinden, J nin ε na göre türevini almaya hakkımız vardır. Fonksiyonun fonksiyonu kuralına göre :

$$dz/dt = \eta F_z \quad \text{ve}$$
$$dz'/dt = \eta' F_z' \quad \text{olacaktır, öyle ki :}$$

$$F_z = \partial F / \partial z \quad \text{ve}$$
$$F_z' = \partial F / \partial z' \quad \text{olmak üzere.}$$

Böylece :

$$dJ/d\varepsilon = \int_a^b (\eta F_z + \eta' F_z') \, dt \quad \text{olur.}$$

$dJ/d\varepsilon = 0$ olunca, yani limitte, $\varepsilon = 0$ olacağından, $z = y$ ve $z' = y'$ olur. Böylece :

$$\int_a^b (\eta \, F_y + \eta' \, F_y') \, dt = 0$$ yi buluruz.

Toplamın entegrali kuralına göre bu ifade :

$$\int_a^b \eta \, F_y \, dt + \int_a^b \eta' \, F_y' \, dt = 0$$

Kesimlere ayırarak entegral alma kuralını uygulayarak :

$$\int_a^b \eta \, F_y \, dt + \Big[\eta \, F_y' \Big]_a^b - \int_a^b \eta \, d/dt \, (F_y') \, dt,$$

Değişimlerin sıfır olması halinde bulmuştuk ki :

$\eta \, (t_a) = \eta \, (t_b) = 0$ (şekle bakınız)

Bu nedenle son ifadedeki köşeli parantezdeki terim :

$$\Big[\eta \, F_y' \Big]_a^b = 0$$ olur.

Böylece ekstremum için gerek koşul :

$$\int_a^b \eta \Big[F_y - d/dt \, F_y' \Big] \, dt = 0$$ dır.

Ya da :

$$\int_a^b \Big[F_y - d/dt \, F_y' \Big] \, dt = 0$$

Bunu sağlamak üzere de :

$$\boxed{F_y - d/dt \, F_y' = 0} \qquad \ldots \mathrm{I}$$

olmalıdır. İşte bu son ulaştığımız ifadeye, bu koşulu bulan Euler'e atfen Euler denklemi adını veriyoruz.

Dikkat edilerse koşulun türetilmesinde ekstrem sözcüğünü kullandık. Çünkü bu bulduğumuz koşul yalnız gerek koşuldur. Onun için çözümün bir minimuma mı yoksa maksimuma mı tekabül ettiğini bu denklem göstermiyecektir. İkinci sıra koşulların, yeter koşulların ispatının güç olduğunu görüyoruz. (Bak. son bölüm.) Ne var ki, ele alacağımız uygulamalı sorunlarda cevabın bir maksimum mu olacağı genellikle baştan belli olmaktadır. Onun için gerek koşulun bulunması bizim işimize yaramaktadır.

Şimdi Euler Denklemini açık olarak yazarsak, yani $d/dt\ F_y'$ işlemini yaparsak :

$$\boxed{F_y - F_{yt} - y' F_{yy'} - y'' F_{y'y'} = 0} \quad \ldots \text{II}$$

yi buluruz. Burada :

$$F_{yt} = \partial F / \partial y\, \partial t \quad ,$$

$$F_{yy'} = \partial F / \partial y\, \partial y' \qquad \text{ve}$$

$$F_{y'y'} = \partial F / \partial y'\, \partial y' \qquad \text{dür.}$$

Bu denklemin (II nin) çözülmesi için ya özel sınır koşulları ya da belirli dönüştürmeler (trasformation) gereklidir. Ama *bunlar dışında* üç özel durum vardır ki, çözümü kolaylaştırır. Şimdi bunları görelim.

4 — İndirgenmiş Biçimler

$\psi = F(y, y', t)$ yerine,

$\psi = F_1(y, t)$,

$\psi = F_2(y', t)$,

$\psi = F_3(y, y')$ ...dersek, çözüm epeyce kolaylaşmaktadır.

i — $\psi = F(y, t)$ hali.

y' nün kaybolması halinde çözüm değişimler hesabının dışına çıkacaktır. Daha önce, aşağıda bahsedeceğimizi söylediğimiz hal bu idi. Bu durumda çözüm sınırlar arasında değil, uç noktaların üzerinde olmaktadır. Burada J nin çözümü, a ve b sınırlarını ilgilendirir, ikisi arasındaki yolu ilgilendirmez. Onun için birinci hal konumuzun dışında kalmaktadır.

ii — $\psi = F(y', t)$ hali.

y nin kaybolması halinde diferansiyel denklem birinci sıraya indirgenmiş olur ve kolaylık sağlanır. Şöyle ki :

$$J = \int_a^b F(y', t)\, dt$$ olunca Euler denklemi şu şekilde sadeleşir :

$$d/dt\ F_{y}' = 0$$

Bu ifadenin t ye göre entegrali alındığında :

$$F_{y}' = C \quad \text{ya da :}$$

$$\boxed{\partial/\partial y'\ F(y', t) = C} \quad \ldots \text{III}$$

ye ulaşırız. Burada C herhangi bir sabittir. Denklem ise birinci sıradan homojen olmayan kısmî bir diferansiyel denklemdir ki çözümü güçlük çıkarmadan bulunabilir.

iii — $\psi = F(y, y')$ hali.

Bu hal daha öncekinden biraz daha zor bir hal. Önce F nin t ye göre toplam türevini alalım :

$$dF/dt = F_y\,(dy/dt) + F_{y}'\,(dy'/dt) \quad \text{olur.}$$

Öte yandan Euler denkleminden, $F_y = d/dt\ F_{y}'$ idi. Bunu yukarıdaki yerine koyarsak :

$$\begin{aligned} dF/dt &= d/dt\ F_{y}'\,(dy/dt) + F_{y}'\,(dy'/dt) \\ &= y'\ d/dt\ F_{y}' + F_{y}'\,(dy'/dt) \end{aligned}$$

Bu ifadenin sağ tarafına, çarpımın türevi kuralını uygulayarak, şu şekli verebiliriz :

$$dF/dt = d/dt\ y'\ F_{y}'$$

Şimdi bunun t ye göre entegralini alırsak :

$$F = y'\ F_{y}' + C \quad \text{ya da :}$$

$$\boxed{F - y'\ F_{y}' = C} \quad \ldots \text{IV}$$

denklemine ulaşırız.

Böylece özel haller için çözüm yollarını bulmuş olduk.

5 — Euler Denkleminin Genelleştirilmesi

Yukarıda ele aldığımız basit değişimler hesabı problemi çeşitli yönlerde geliştirilebilir :

a — ψ , y ve y′ den başka, y″, y‴ ... nün de fonksiyonu olabilir;

b — ψ , yalnız t ye değil, aynı zamanda t_2, t_3 ... e de bağlı olabilir. Ama bunlar teorik olarak aklımıza gelen ve uygulamada o kadar yararlılığı görülmeyen haller.

c — Uygulamada daha kullanışlı bir geliştirme, y den başka açıklayıcı fonksiyonların bulunması halidir. Yani, y_i, öyle ki, $i = 1, \ldots, n$ olması hali. Bu hal için n tane Euler denklemi gereklidir. Ve bu denklemlerin elde edilmesi, tek fonksiyonlu Euler'in elde edilmesine mükemmel bir analoji ile uymaktadır : η yerine η_i ve y yerine y_i koyulacak ve ifade n ye kadar tekrarlanacak.

Onun için kanıtını vermeden sonucu vermenin bir sakıncasını görmüyoruz :

$$\boxed{F_{y_i} = d/dt\, F_{y'_i} = 0} \qquad \ldots \text{V}$$

İktisattan vereceğimiz örneklerden birinde, $n = 2$, $i = 1, 2$ halini kullanacağız.

6 — Değişimler Hesabında Çözümler

Değişimler hesabında her problem çözümünde Euler denkleminin türetilmesi gerekmez. Problem Euler koşuluna göre formüle edilebiliyorsa, böyle yapılır ve J formüle edilir.

J formüle edildikten sonra doğrudan doğruya Euler denklemi alınır ve J deki karşılıkları yerlerine konulur. Sonra Euler denklemi y için çözülmeğe çalışılır. Euler denklemi optimal durumu gösterdiği için, bulunan y fonksiyonu da optimal bir fonksiyondur.

Bu kesimde, daha öncekinde vermiş olduğumuz teoreme dayanan iki matematik problemin çözümünü yaparak tekniğin somut örneğini görmüş olacağız.

PROBLEM I : EN KISA SÜRE PROBLEMİ (BRACHISTOCHRONE)

Değişimler hesabının ilk çözülen problemi en kısa süre problemidir.[5] Sorun, yerçekimi altında serbestçe bırakılan bir maddenin bırakılan noktadan istenilen diğer bir noktaya kayarak en kısa sürede ulaşması için izlemesi gereken yolun ne olması gerektiğidir.

Genel hız formülünden istenilen fonksiyonel kolayca çıkarılabilir. Bu problemde formülasyon aşaması bizi ilgilendirmemektedir. Söz konusu genel ifade aşağıda vereceğimiz J fonksiyonelinin bir katıdır :

$$J = \int_a^b 1/y\,(1 + y'^2)\ dt$$

Burada sorun, J nin minimizasyonudur. Onun için varacağımız sonucun bir minimum olduğunu baştan biliyoruz.

$\psi = F\,(y, y')$ türüne uymaktadır; ayrıca sabit uç noktaları şeklindeki bir sınırlamaya tabidir. Öyle ise (iii) özel haline uymaktadır.

Burada

$$F = \sqrt{(1 + y'^2)/y} \qquad \text{ve} \qquad F_{y}' = y'/\sqrt{y\,(1 + y'^2)} \ \text{dür.}$$

Euler denkleminden :

$$\sqrt{(1 + y'^2)/y} = y'^2/\sqrt{y\,(1 + y'^2)} + C \qquad \text{bulunur.}$$

Bu denklemi y'^2 için çözersek :

$$y'^2 = (1 - C^2\,y)/C^2\,y \qquad \text{kare kökünü alırsak :}$$

$$y' = 1/C\,\sqrt{(1 - C^2\,y)/y} \qquad \text{diferansiyel denklemini elde}$$

ederiz. Bu diferansiyel denklemin entegrali :

---

(5) Brachistochrone problemi Johann Bernoulli tarafından 1696 yılında formüle edilmiş ve çözülmüştür. Bu problem, matematikçilerin dikkatini çekmesi bakımından değişimler hesabının gelişmesinde önemli bir rolü olmuştur. Bugünkü modern ders kitaplarında halâ çözümü yapılan bir problemdir.

$$\int \sqrt{y/(1 - C^2 y)} \quad dy = \int 1/C \quad dt + \text{sabit.}$$

Bir B sabiti alırsak :

$$\int 1/C \quad dt + \text{sabit} = (t - B)/C \quad , \text{ böylece :}$$

$$\int \sqrt{y/(1 - C^2)} \quad dy = (t - B)/C \qquad \text{dir.}$$

Bu entegralin değeri trigonometrik fonksiyonlarla ifade edilir :

$t = B + C' (\Theta - \sin \Theta)$ ve

$y = C' (1 - \cos \Theta)$ sonucuna ulaşılır.[6]

PROBLEM II : ZİNCİR EĞRİSİ PROBLEMİ (CATENARY)

Bu ikinci örnek te yine değişimler hesabının gelişmesinde belirli bir yeri var ve yine öbürü gibi klasikleşmiş örneklerden.

Fazladan zincir eğrisi iktisatta kullanılan bir eğri.[7]

Problem şu : iki sabit noktayı birleştiren doğru parçası etrafında dönen eğri ne olmalıdır ki döngü alanı maksimum olsun?

Bu alan yine fonksiyonel olarak ifade edilebiliyor; mesele bu fonksiyoneli maksimum kılan eğriyi bulmak. Söz konusu alanı (2 π ile oranlı olarak) şu şekilde yazabiliriz :

$$J = \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} \qquad dt$$

---

(6) Bu eğri türündeki çevrimseller (cycloids) olarak adlandırılır. Özellikleri, kendilerini arka arkaya tekrar etmelerindedir. Çevrimseller iktisatta konjoktürel dalgalanmaların incelenmesinde kullanılmıştır; ama değişimler hesabı çerçevesi içinde dalgalanmaların incelenmesine biz rastlamadık.

(7) Zincir eğrisi, optimal iktisattaki optimal yolların tipik örneklerinden; hatta bazı incelemelerin başlıkları bile bu eğrinin adını taşıyor. (Bu, ikinci sıra Euler denkleminin çözümünden ileri geliyor.) Ör. : P.A. Samuelson, «A Catenary Turupike Theorem Involving Consumption and the Golden Rule», American Economic Review, 1965.

Daha önceki örnekteki gibi burada da :

$\psi = F(y, y')$ ve yine sabit uç noktaları var. Öyle ise bu problem de diğeri gibi, (iii) indirgenmiş türünden.

Burada :

$F = y' F_y' + C$ şu biçimde :

$$y \sqrt{1 + y'^2} = y\, y'^2 / \sqrt{1 + y'^2} + C$$

Bunu y'^2 için çözersek :

$y'^2 = (y^2 - C^2)/C^2$ karekökünü alırsak :

$y' = \sqrt{(y^2 - C^2)/C}$ yi buluruz. Buradan diferansiyel hesap kuralları ile :

$$\int 1/\sqrt{y^2 - C^2}\; dy = \int 1/C\; dt + \text{sabit}$$

Bir B sabiti alırsak :

$\int 1/C\; dt + \text{sabit} = (t - B)/C$ Bu ikisinden :

$\int 1/\sqrt{y^2 - C^2}\; dy = (t - B)/C$ bulunur.

Bundan sonraki işlemleri basitleştirmek üzere :

$\sqrt{y^2 - C^2} = A$ diyelim.

Bir yandan şu eşitlik kolayca kanıtlanabilir :

$d/dy \left\{ \log (y + A)/C \right\} = 1/A$ Entegralini alırsak :

$\int 1/A = \log (y + A)/C$, böylece :

log $(y + A)/C = (t - B)/C$ bunun doğal antilograritmasını alırsak :[8]

$(y + A)/C = \exp(t - B/C)$, buradan :

$y + A = C \exp(t - B/C)$ bulunur.

Diğer yandan :

$$y - A = (y - A)(y + A)/y + A$$

$$= \left\{ y^2 - (y^2 - C^2) \right\} /y + A$$

$$= C^2/C \exp(t - B/C)$$

$$= C \exp - (t - B/C) \quad \text{bulunur.}$$

Böylecek şu iki simetrik ifadeyi bulduk :

$$y + A = C \exp(t - B/C)$$

$$y - A = C \exp - (t - B/C)$$

Bu ikisini toplar ve ikiye bölersek y ye ulaşırız :

$$y = 1/2 \ C \left\{ \exp(t - B/C) + \exp - (t - B/C) \right\}$$

İşte bu son türdeki eğrileri zincir eğrisi olarak tanıyoruz. Zincir eğrisine bu adın verilmesinin nedeni, —bu problemin de kanıtladığı gibi— iki ucundan tutulan ve ağırlığının her noktada aynı, homojen olduğu varsayılan bir zincirin, bu formülle ifade edilen belirli bir eğri çizeceğidir.

Zincir eğrisinin bugünkü adı, hiperbolik kosinüs eğrisidir. Kısaca «cosh» eğrisi olarak belirtilir. Eğer $(t - B/C) = \tau$ dersek :

$$\cosh y = 1/2 \left\{ \exp \tau + \exp - \tau \right\}$$

şeklinde gösterilebilir.[9]

(8) Baskı işlerini kolaylaştırmak üzere, doğal logaritma bazı olan 'e' üzeri ifadeleri exp (exponential = üstel) olarak göstereceğiz. Örnek olarak, e^U, exp (U) olarak gösterilecek.

(9) Hiperbolik kosinüsün anlamı şudur : normal trigonometrik fonksiyonlar (bu arada kosinüs) çembere göre tanımlanır; işte çember yerine hiperbol koyarak hiperbolik trigonometrik fonksiyonları tanımlayabilmekteyiz.

Şimdi bir şekil yardımı ile zincir eğrisinin ve parametrelerinin ne anlama geldiğini görelim.

Şekil 5 te, B ve C parametrelerinin rolleri görülüyor. Eğer $B = 0$ dersek zincir eğrisi :

$$y = 1/2 \ C \left\{ \exp t/C + \exp - t/C \right\} \text{ olacaktır.}$$

Bu yapıldığında eğri y ekseni üzerine kayacaktır.

Tam tersine B yi tutup C yi kaldırırsak :

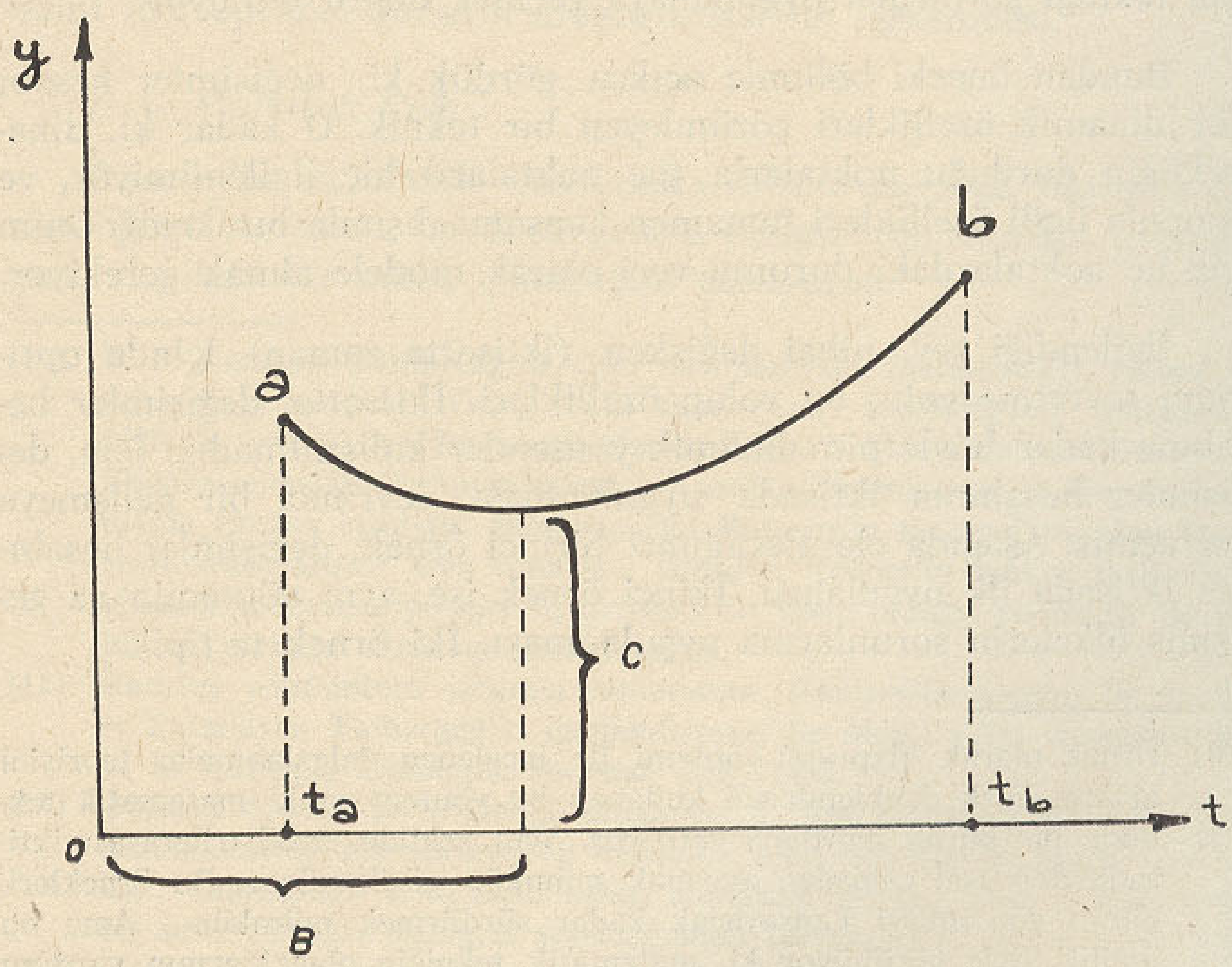
$$y = 1/2 \left\{ \exp (t - B) + \exp - (t - B) \right\}$$

olacak ki bu durumda eğrinin minimum noktası t ekseni üzerinde bulunacaktır.

Eğrinin minimum noktasını orijinden geçirmek istersek fonksiyon iyice sadeleşecektir :

$$y = 1/2 \left\{ \exp t + \exp - t \right\}$$

Şekil 5 te bu irdelemeyi daha iyi görmek mümkün.



Şekil : 5

Bu problemin sonucu : a noktasından bırakılıp yer çekimi altında (sınır koşulu altında) b noktasına doğru kayması istenen bir cisim, a ile b arasındaki uzaklığı en kısa sürede alabilmesi için seyretmesi gereken yolun bir zincir eğrisi olması gerekmektedir. (İktisatta bu cismin yerini, örneğin millî gelir alacak!)

III — İKTİSAT TEORİSİNE UYGULAMA

1 — Uygulamanın Özelliği

Dikkat edilirse bir matematik teknik genellikle iktisatta belirli bir yönteme tekabül ediyor.[10] Bunu değişimler hesabını kullanan iktisat yönteminde çok belirli olarak görüyoruz.

Bu nedenle *önce* matematiğini öğrenmek, daha sonraki uygulaması için çok aydınlatıcı oluyor. Oysa uygulaması ile tekniğini birlikte öğrenmeğe çalışmak bir güçlük çıkarıyor : yeni öğrendiğimiz şey iktisat mı, matematik mi? Ayırdetmek bazan güç oluyor. Başka bir deyişle, belirli bir özellik, matematik tekniğin zorunlu kıldığı bir şey mi, yoksa iktisaden anlamlı bir varsayım mı? Onun için tekniği görmeden uygulamaya geçmek doğru olmuyor.

Bundan önceki bölümle açıkça gördük ki, değişimler hesabı pür dinamik özellikleri çözümleyen bir teknik. O kadar ki, dinamikliğin durduğu noktalarla (uç noktaları) hiç ilgilenilmiyor, ve bununla ilgili özellikleri tamamen kapsamı dışında bırakıyor. Onun için uç noktalardaki durumu veri olarak modele almak gerekiyor.

İlgilendiği şey, nihaî değişken (iktisatta zaman) içinde optimum seyretme yolu; bu yolun özellikleri. İktisatta, değişimler hesabına kadar böyle pür dinamik yöntemler kullanılmadığı için, değişimler hesabının iktisada uygulanması devrimci bir gelişmeye yol açmış. Aşağıda ele alacağımız birinci örnek, değişimler hesabının iktisada ilk uygulanışı. İkinci örnek ise, aynı yöntemin az gelişmiş ülkelerin sorunlarına uygulanması. İki örnek te tipik.

(10) Örnek olarak 'fixprice' yöntemi ile incelenen dalgalanmalar teorisini alalım. Fark denklemlerini kullanan bu yöntem sanki matematik teknikle bir bütün meydana getiriyor. Aynı şekilde, endüstrilerarası iktisadı, doğrusal cebirden ayırmak mümkün görünmüyor. Bu örnekleri, bütün yöntemleri kapsayacak kadar sürdürmek mümkün... Ama bu özellik, öyle görünüyor ki, matematik tekniğin olanaklarının yardımı ile düşünme kolaylığından ileri geliyor.

2 — Ramsey Modeli [11]

a — Ramsey'in Sorunu :

Kısaca şudur: «bir ulus gelirinin ne kadarını tasarruf etmeli?». Geleneksel iktisat bu sorunun kendiliğinden ve optimal olarak çözüleceğini zımnen kabul etmiş olduğu için, bu problem işin doğal gidişi ile, ele alınmamıştı. Geleneksel iktisadın henüz keşfedilecek köşe bucağı olduğu için, Ramsey makalesini yayınladıktan sonra epeyce bir süre (otuz yıldan fazla) önemi farkedilmedi. [12]

Sonra, belirli bir dönem, alternatif üretim ve fayda varsayımları modele alındı ve sonuçları denendi. Üçüncü dönemde bu modelin matematik varlığı tartışma konusu edildi. Bu sorun halledilince, dördüncü dönemde, diğer modeller ile ilişkisinin kurulması çabalarına girişildi. Böylece optimal dış ticaret teorisi, optimal maliye politikası ve optimal para teorisi geliştirilmeğe çalışılıyor. Şu anda bu dönemdeyiz.

Böylece «Ramsey İktisadı», ya da «optimal iktisat» ortaya çıkmış oldu. Bu iktisadın özelliği, bir yandan etkinlik iktisadına, bir yandan da geleneksel sermaye teorisine *fazla* bağlı olmadan ekonomi için optimal yolların araştırılması ile ilgilenmesi.

b — Mutluluk Çağı :

Ramsey'in ilk olarak «mutluluk» (bliss) üzerinde filozofca düşündüğünü ve sonra bu düşünceden, matematik tekniğin uygulanması ile ilgili bir buluş çıkardığını görüyoruz. [13]

---

(11) F. P. Ramsey, Cambridge'li ünlü bir mantıkçı, matematikçi, filozof ve nihayet iktisatçıdır. Genç yaşta ölen yazar incelediğimiz makalesini 1928 de yazmış ve **Economic Journal**'da, «A Mathematical Theory of Savings» başlığı ile yayınlamıştır. Yazıdan öğreniyoruz ki Keynes kendisine yardım etmiştir. Bazı yazarlar Ramsey'in tasarruf kuralını Ramsey-Keynes kuralı diye sunarlar; yöntemi Keynes'in makro iktisadının yöntemine uymadığı için ve orijinal bir fikir olduğu gerekçesi ile biz bunun yerinde olmadığı görüşündeyiz.

(12) Ramsey yönteminin yeniden canlanması, Ramsey'in sorunu ile pratikte karşılaşan Tinbergen'in canlandırması ile oldu: «The Optimum Rate of Saving», **Economic Journal**, Dec., 1956.

(13) Bundan önceki bölümde gördüğümüz J fonksiyonelindeki entegralin çözülebilmesi için Ramsey'in mutluluk aleti son derece uygun bir buluş: «mutluluk» şeklindeki sabit, entagrale bir üst sınır oluyor. Eğer bu sınır olmazsa entegral sapacağından (divergence) çözümü mümkün olmaz. Söz konusu alet, entegralin toplanması (convergence) için kullanılabilecek en iyi ve zararsız yollardan biri olarak görünüyor.

Önce; fayda tüketime, tüketim de sermayeye bağlanmıştır. Böylece fayda, *doğrudan doğruya* sermayeye bağlanmaktadır. Bu bir iktisadî varsayım. Tekniğin zorladığı bir şey değil.

Fayda ile sermaye arasında dört türlü ilişki öngörürüyor. Bunları ikişer ikişer gruplamak mümkün.

Büyük ayırım şu şekilde : sermaye artışı bir süre (uzunca bir süre) sonra faydayı artırabilir ya da artırmayabilir.

İkinci halde iki şık mümkün :

1. Bir defa, bir noktadan sonra sermaye artışı, tüketim mallarında bir artışı sağlamayabilir; ya da boş zaman artışına yol açmayabilir.

2. İkinci şık olarak, azamî tatmine ulaşmışızdır, tüketim ya da boş zaman artışı faydamızı artırmaz.(Yanî «zahmet»imiz azalmaz.)

Bu iki şıkta da belirli bir sermaye stoku vardır ki *iktisaden,* daha fazlası işimize yaramaz; daha fazla zevk *alınabilir* ama iktisaden *elde edilemez.* Başka bir deyişle, zevk alma kapasitesi daha yüksek olabilir ama tüketim malları ile karşılanan yönü artık doymuştur.

İkinci büyük ayırımda ise sermaye artışı devamlı olarak fayda artışına yol açar. Bu halde de yine iki şık söz konusu :

3. Sonsuza kadar, sermaye stoku arttıkça, fayda artar;

4. Ya da hiç ulaşılmasa bile sürekli olarak bir azamî zevk düzeyine yaklaşılır.[14]

Hangisi olursa olsun, bu dört şıkta da elde edilebilen en fazla zevk ya da fayda düzeyine mutluluk adını veriyor Ramsey.

Bu özelliklere sahip olan Ramsey problemini şu şekilde özetleyebiliriz : «mutluluğa ulaşmak için bir ulus gelirinin ne kadarını tasarruf etmeli?»

c — Varsayımlar :

Ramsey bazı basitleştirici varsayımlar yapıyor :

---

(14) Bu son iki şıkkın birincisinde, 'iyi huylu' bir fayda fonksiyonu söz konusudur; ikincisinde ise hiperbolik bir fayda fonksiyonu vardır ve bu bir azami zevk düzeyine asimtotik olarak yaklaşır.

1. nüfus artışı (ve azalışı) yok;

2. tüketicilerin fayda fonksiyonları zaman içinde değişmiyor;

3. faydalar bağımsız olarak hesaplanabiliyor ve toplanabiliyor; [15]

4. sermaye birikimi tarafından uyarılan ve hızı daha önceden tahmin edilebilenler dışında teknik buluşlar yok; [16]

5. gelecekteki zevklerin indirgenmesi kabul edilmiyor; bu, ileriyi görme gücümüzün zayıflığı argümanı ile ahlâken savunulmaz bulunuyor;

6. bölüşüm sorunları ele alınmıyor;

7. sermaye ve emeğin tek bir standartla ifade edilebileceği kabul ediliyor;

8. dış ticaret sorunları ele alınmıyor;

9. bir kuşağın, diğerlerinin aleyhine olarak, tasarruf-tüketim kararlarını bozmayacağı kabul ediliyor.

d — Sorunun Koyulması :

Toplumun sermaye stokuna K ve işgücüne L diyelim. Tüketimini de C ile gösterelim. Bu üçünün de zamanın fonksiyonu olduğunu kabul ediyoruz. Böylece t zamanındaki sermaye, işgücü ve tüketimi sırasıyla şöyle göstereceğiz : K (t), L (t) ve C (t).

Sermaye birikimi ile tasarruf hızını özdeş olarak kabul ediyoruz.

Herhangi bir anda toplumun sermaye birikimi, (yatırım) yukarıdaki tanımlamadan : dK/dt dir. Öyle ise toplumun tasarruf hızını dK/dt ile göstereceğiz.

---

(15) Bu iki varsayım, modern fayda teorisinin de varsayımlarını teşkil etmektedir : (i) duyarlılık (sensitivity), (ii) durgunluk (stationarity) ve (iii) bağımsızlık (independence). Bu konuda : T. C. Koopmans, «Stationary Utility and Impatience», **Econometrica,** April, 1960. (Bu makale çerçevesinde bu kavramları açıklama olanağımız yok, ama ilgilenenler için bu dipnotunun yararlı olabileceğini düşündük.)

(16) Görüldüğü gibi bu varsayım, 'yaparak öğrenme'yi kabul ediyor. Söz konusu olayın Ramsey modeline alınması için : E. Sheshinski, «Optimal Accumulation With Learning by Doing», **Essays on the Theory of Optimal Economic Growth»,** K. Shell, Ed., 1967 içinde.

Millî geliri de $Y(t) = f(K, L)$ ile gösterelim.[17] Gelir tüketim ve tasarruftan meydana geldiğine göre tüketimi şu şekilde ifade ediyoruz :

$$\boxed{C(t) = f(K, L) - dK/dt} \qquad \ldots \text{I}$$

Toplumun refahının yalnız tüketimine bağlı olduğunu kabul edersek :

$u = \varphi(C)$ diyebiliriz.

Öte yandan, tüketim malını yapmak için harcanan emeğin bir zahmeti (disutulity of labor) olduğunu ve bunun da kullanılan emeğin fonksiyonu olduğunu kabul ediyoruz; kullanılan emek arttıkça, verdiği zahmet te artacaktır :

$v = \psi(L)$

Belirli bir süre içinde (t_a dan t_b ye kadar) toplumun elde edeceği toplum net fayda :

U = faydalar - zahmetler

Bu denklemi yukarıdaki terminoloji ile ifade edersek :

$$U = \int_a^a \varphi(C)\,dt - \int_a^b \psi(L)\,dt \quad \text{ya da :}$$

$$U = \int_a^b \left\{ \varphi(C) - \psi(L) \right\} dt \quad \text{olacaktır.}^{18}$$

(17) Ramsey'in analizinde 'millî gelir' den bahsederken bir noktayı hatırlatmak gerekir. Ramsey'in analizi bir tek kişi için ele alınmıştır ve her şeyi nüfus sayısı ile çarparsak diğer büyüklükler elde edilebilir; ama büyüklüklerin davranışı bakımından bireyin geliri ile millî gelir arasında hiçbir fark yoktur. Onun için gelir sözünden hem millî gelir, hem de bireyin geliri anlaşılabilir. Bu özellik, Marshall'ın 'temsilî firma' sına nazire olarak Ramsey analizinin öznesine 'temsilî insan' denilmesine yol açmıştır, şu farkla ki, temsilî insan bütün milleti temsil etmektedir.

(18) Bunu yapabilmek için 2 ve 3 numaralı varsayımları kullanıyoruz : tüketim yapıldığı anda faydasını veriyor, diğer zamanları etkilemiyor, ayrıca, insanlar geçmişin hatıralarından ya da geleceğin hayallerinden zevk almamaktadırlar. (15 numaralı dip notuna bakınız.)

Bildiğimiz gibi U bir fonksiyoneldir, J ye tekabül ediyor. L (t) ve K (t) de değişken fonksiyonlardır. Çünkü φ (C), C (t) ye, C (t) de K (t) ye bağlıdır. (Bir numaralı varsayım ile nüfus artış hızını sıfır kabul etmiştik.)

Bu demektir ki toplum, bu sınır koşulları altında, toplam faydasını maksimize edecek emek miktarını ve tasarruf miktarını belirlemek isteyecektir. Öyle ki U fonksiyonelini maksimize eden L (t) ve K (t) fonksiyonlarını bulmak gerekecektir. Sorun budur.

Görüldüğü gibi, iki maksimum fonksiyon elde edeceğiz. Yukarıda, Euler denklemini genelleştirdiğimiz bu durumu açıklamıştık : şimdi iki tane Euler denklemi elde edeceğiz.

e — Ramsey'in Emek Kuralı :

I den yararlanarak, U fonksiyonelini şu şekilde yazmak kabildir :

$$U = \int_a^b F\,(L, K, K')\,dt$$

Burada :

$$F\,(L, K, K') = \varphi\,(C) - \psi\,(L) \qquad \text{ve}$$
$$C = f - K' \qquad \text{dür.}$$

Şimdi Euler denklemlerini yazabiliriz : (Aşağıda F = entegrali alınacak ifade; f = üretim fonksiyonu olduğunu hatırlatırız.)

$$F_L = d/dt\,(F_{L'}) = 0 \qquad \text{ve}$$
$$F_K = d/dt\,(F_{K'})$$

Burada :

$$F_L = \partial F / \partial L$$
$$F_{L'} = \partial F / \partial L'$$
$$F_K = \partial F / \partial K$$
$$F_{K'} = \partial F / \partial K' \qquad \text{dür.}$$

Birinci Euler denklemine göre :

$$F_L = \partial / \partial L \left\{ \varphi\,(C) - \psi\,(L) \right\} = 0$$

$C = f - K'$ olduğunu hatırlayarak ve türevin zincir kuralını uygulayarak :

$$F_L = \varphi'(C)\, f_L - \psi'(L) = 0 \quad \text{ve buradan :}$$

$$\boxed{f_L = \psi'(L) / \varphi'(C)} \qquad \ldots \text{ II}$$

sonucuna ulaşırız.

Ramsey'in emek kuralını sözle ifade etmek istersek : ücret, tüketimin marjinal zahmetinin, emeğin marjinal faydası oranına eşittir. Tabiî burada ücreti, emeğin marjinal ürünü olarak tanımladık ve fayda oranı ile belirledik.

f — Ramsey'in Sermaye Kuralı :

Sermayenin marjinal ürünü neye eşit olacak, ne ile belirnecek? İkinci Euler denkleminden benzer şekilde :

$$F_K = \varphi'(C)\, f_K$$

Zamana göre türevini alırsak :

$$d/dt\ F_{K'} = d/dt \left[\partial/\partial K' \left\{ \varphi(f - K') - \psi(L) \right\} \right]$$

$$= d/dt \left\{ -\varphi'(C) \right\} \quad \text{ve}$$

$$\varphi'(C)\, f_K = d/dt \left\{ -\varphi'(C) \right\} \quad \text{böylece :}$$

$$\boxed{f_K = \left\{ -1/\varphi'(C) \right\} d/dt \left\{ \varphi'(C) \right\}} \qquad \ldots \text{ III}$$

Kuralı sözle ifade edersek : sermayenin marjinal ürünü, marjinal faydanın artış hızına eşit olmalıdır. Faktörlere marjinal paylarının ödendiğini (emekte olduğu gibi) varsayarsak bu ifade de faiz haddini gösterecektir. (Faiz haddini negatif olarak almıyoruz.)

g — Ramsey'in Tasarruf Kuralı :

I den yararlanarak :

$$dK/dt = f(K, L) - C(t) \quad \text{diyelim.}$$

Daha önce ulaştığımız sonuçlardan yararlanarak, bu denklemin sağ tarafını, II ve III teki gibi φ (C) ve ψ (L) fonksiyonları ile ifade edelim.

Çarpımın türevi ve toplam türev kurallarına göre :

$$d/dt \left\{ \varphi' (C)\ f (K, L) \right\} = \varphi'' (C)\ dC/dt\ f (K, L)$$
$$+ \varphi' (C)\ (f_L\ dL/dt + f_K\ dK/dt)$$

II ve III ten :

$$= \varphi'' (C)\ dC/dt\ f (K, L)$$
$$= \psi' (L)\ dL/dt - d/dt \left\{ \varphi' (C) \right\} dK/dt$$

I den :

$$= \varphi'' (C)\ dC/dt\ f (K, L)$$
$$+ \psi' (L)\ dL/dt$$
$$- d/dt \left\{ \varphi' (C) \right\} \left\{ f (K, L) - C (t) \right\}$$
$$= \varphi'' (C)\ dC/dt\ f (K, L)$$
$$+ \psi' (L)\ dL/dt$$
$$- \varphi'' (C)\ dC/dt \left\{ f (K, L) - C (t) \right\}$$

böylece :

$$= C (t)\ d/dt \left\{ \varphi' (C) \right\}$$
$$= \psi' (L)\ dL/dt$$

bulunur. Bu denklemin entegralini alırsak :

$$\varphi' (C)\ f (K, L) = \int C (t)\ d/dt \left\{ \varphi' (C) \right\} dt$$
$$+ \int \psi' (L)\ dL/dt\ dt + \text{sabit}$$

Bu denklemin sağ tarafındaki birinci entegral terimini tekrar ele alalım :

$$d/dt \left\{ C(t) \varphi'(C) \right\} = C(t)\, d/dt \left\{ \varphi'(C) \right\}$$
$$+ \varphi'(C) \; dC/dt$$

olduğu için :

$$C(t) \varphi'(C) = \int C(t)\, d/dt \left\{ \varphi'(C) \right\} dt$$
$$+ \int \varphi'(C) \; dC/dt \; dt$$

böylece :

$$\int C(t)\, d/dt \left\{ \varphi'(C) \right\} dt = C(t) \varphi'(C)$$
$$- \int \varphi'(C) \; dC/dt \; dt$$

Yukarıdaki denklemin sağ tarafındaki birinci entegral terimi-ni farklı bir şekilde ifade etmiş olduk; şimdi bu ifadeyi, yukarıdaki denklemde yerine koyalım :

$$\varphi'(C) f(K, L) = C(t) \varphi'(C) - \int \varphi'(C) \; dC/dt \; dt$$
$$+ \int \varphi'(L) \; dL/dt \; dt + \text{sabit}$$

Entegrallerini alınca :

$$= C(t) \varphi'(C) - \varphi(C) + \psi(L) + \text{sabit}$$
$$= C(t) - \left\{ \varphi(C) - \psi(L) \right\} + \text{sabit}$$

Buradan :

$$\varphi'(C) \left\{ f(K, L) - C(t) \right\} = \text{sabit} - \left\{ \varphi(C) - \psi(L) \right\} \quad \text{ve}$$

$$f(K, L) - C(t) = \left[\text{sabit} - \left\{ \varphi(C) - \psi(L) \right\} \right] / \varphi'(C)$$

$f(K, L) - C(t) = dK/dt$ idi; ayrıca, sabit, ulaşılabilecek en yüksek fayda düzeyini yani «mutluluk» u[19] gösterdiği için :

$$\boxed{dK/dt = \left[\text{mutluluk} - \left\{ \varphi(C) - \psi(L) \right\} \right] / \varphi'(C)} \quad \ldots \text{IV}$$

Böylece tasarruf hızı (sermaye birikimi) nın ne olması gerektiğini gösteren ünlü Ramsey kuralına ulaşmış olduk.

Kuralı sözle ifade edersek : (Ramsey'in ifadesi ile) tasarruf hızı *çarpı* tüketiminin marjinal faydası, *eşittir* ulaşılabilecek en yüksek fayda *eksi* gerçekte elde edilen net fayda.

h — Modelin Özelliği :

Görüldüğü gibi, maksimum faydanın elde edilebilmesi için, emek, sermaye ve tasarrufu gösteren kurallara uyulması gerekmektedir. Bulduğumuz optimal sonuçların, faydayı minimum değil de maksimum yaptığını işin özelliğinden çıkarıyoruz; yoksa kullandığımız gerek koşul bunu garanti etmiyor.

Ramsey modelinin özelliği, varılan sonuçların hep marjinal fayda ile ifade edilmiş olması ve üretim fonksiyonundan bağımsız olmasıdır. Bu çeşitli sorunlar ortaya çıkarmaktadır.

Burada Ramsey modeli ile ilgili sorunlarla uğraşmayacağız. Kuralın anlamını daha açık hale getirmeğe çalışalım.

---

(19) Mutluluğu gerçekleştirecek tüketim ve gelir düzeyi tamamen hipotetik bir şey. Ama Ramsey'in aklındaki düzey ne idi? Makalesinde verdiği bir tablodan anlaşılıyor ki, bir ailenin yıllık geliri 5 000 sterlin olursa artık o ailenın para ile satın alınabilecek bütün mutluluğa kavuşacağı varsayılmış. Bu miktar tabiî 1920 lere ve İngiltere'ye ait; bugünün ve Türkiye koşulları ile ne kadarlık bir satın alma gücünü göstereceğini hesaplamak çok zor. Ama, kabaca bir fikir elde etmek için küçük bir hesap yaptık. Önce sterlin ile T.L. arasındaki parite değişmesini göz önüne aldık, sonra T.L. nin zaman içindeki satın alma gücündeki değişmeyi... Bu şekilde yaptığımız yaklaşık hesap, Ramsey'e göre bir ailenin mutluluk gelirinin yıllık olarak (bugünün Türkiye'sindeki satın alma gücü ile) 400 000 T.L. tuttuğunu gösteriyor.

Kolaylık sağlanması için kısaca :

Net fayda = φ (C) − ψ (L) = N

Mutluluğun fayda düzeyi = M

Marjinal fayda = φ'

Tasarruf hızı = K′ diyelim.

Böylece Ramsey kuralı :

$$K' = (M - N) / \varphi' \quad \text{dür.}$$

Mutluluğa yaklaştıkça M − N farkı küçülecektir; yine bu süreç içinde φ' büyüyecektir. Bu durum, K′ nün küçülmesi anlamını taşımaktadır. M − N farkının ortaya çıkardığı yatırım gereği, marjinal fayda ile değerlendirilmiş olmaktadır :

M − N farkı büyükse yatırım gereği büyüktür; «*ne kadar* büyüktür?» : marjinal faydanın zorunlu kıldığı kadar; yani marjinal fayda küçükse yatırım yüksek, büyükse yatırım daha az olacaktır.

Böylece sermaye birikiminin bazı iki faktöre bağlanmış olmaktadır : fiilî tüketimini, azamî fayda sağlayacak tüketim düzeyine uzaklığı; ve marjinal faydanın düzeyi.

Buradan çıkan sonuç, toplumun tüketim düzeyi düşük olduğunda sermaye birikimi hızının yüksek, tasarruf oranının büyük olması gerektiğidir. Tüketim yükseldikçe sermaye birikimi hızı düşecektir. Yalnız, düşük bir tüketim düzeyi, aynı zamanda yüksek bir marjinal faydayı da gerçekleştiriyorsa, bu söylediğimiz nokta bu ölçüde zayıflayacaktır.

Görüldüğü gibi kalkınma konusuna da yatkın bir sonuçla karşılaşıyoruz. Bundan sonra ele alacağımız model, Ramsey kuralını, kalkınmanın somut sorunları ile pekiştirmeye çalışacaktır.

3 — Goodwin Modeli [20]

a — Kalkınmanın Parametreleri :

Ramsey modelinin genel olması, ona yanlış yapmama olanağını tanıyor ama kalkınmanın gerçeklerine uygun parametrelerden de yoksun.

---

(20) R. M. Goodwin, «The Optimal Path for an Underdeveloped Economy», **Economic Journal**, Dec., 1961.

Onun için genel fayda fonksiyonuna öyle parametreler sokabilmeliyiz ki, kalkınmaya elverişli hale getirilsin.

Önce fayda fonksiyonunu açık hale getirelim. Öyle bir fonksiyon bulalım ki, azalan marjinal faydanın bu özelliğini göstersin. Goodwin, geleneksel logaritmik fayda fonksiyonunu seçiyor.[21]

$$u = \varphi(C) = \log_e C$$

Az gelişmişlik söz konusu olunca, en az geçim düzeyinin $(\bar{C})$ modele alınması yerinde olabilir :

$$\boxed{\varphi(C) = \log_e (C - \bar{C})} \quad \ldots \text{I}$$

Çözümü yaparken görüyoruz ki, hem logaritmik fayda fonksiyonu, hem de en az geçim düzeyi, matematik çözüme kolaylık tanıyor.

Ramsey modelindeki sermayenin marjinal prodüktivitesi yerine daha kullanışlı bir parametrenin getirilmesi uygun düşecekti. Goodwin bunu da getirmiştir : marjinal sermaye/hasıla oranı $= \sigma$:

$\sigma = K'/Y'$ dersek, $K' = I$ dan :

$I = \sigma Y'$ nü elde ederiz.

Öte yandan,

$C = Y - S$ ve $I = S$ deyip,

$C = Y - I$ ve :

$$\boxed{C = Y - \sigma Y'} \quad \ldots \text{II}$$

Şimdiye kadar bulduklarımız Goodwin'e özgü değildi. Goodwin'in asıl katkısı, modele nüfusu (işgücünü) almasıdır. Kalkınma-

---

(21) Bugün logaritmik fayda fonksiyonu yerine, aynı özellikleri taşıyan ama ondan daha genel olan 'iyi huylu' fayda fonksiyonu kullanılmaktadır. İyi huylu fayda fonksiyonu, tüketim arttıkça, sürekli olarak azalarak artan bir fonksiyon. Üstelik diğerine göre bir üstünlüğü var : logaritmik fayda fonksiyonunda, tüketimin fayda esnekliği zorunlu olarak 'bir' kabul ediliyor. (Yani Bernoulli hipotezi : paranın marjinal faydası sabit, var sayılıyor). Paranın marjinal faydasının değişebileceğini düşünüyorsak. daha genel halleri içeren iyi huylu fayda fonksiyonu tercih edilmeli; bu tür fonksiyonlar kullanıldığında söz konusu esneklik bir parametre olarak modele girip çözümde görülebiliyor.

da millî hasıladan çok adam başına millî hasıla önemli olduğu için bu parametre önem kazanıyor ve Goodwin modelinin de ayırıcı özelliğini teşkil ediyor. Adam başına tüketime Z diyelim :

$$\boxed{Z = C/L} \qquad \ldots \text{III}$$

L işgücünü gösteriyor. L nin sabit bir hızda arttığını varsayacağız :

$$L = L_o \exp (nt)$$

Böylece fayda fonksiyonumuz (I ve III ten) :

$$\boxed{\varphi (Z) = \log_e (Z - \bar{Z})} \qquad \ldots \text{IV}$$

Burada $\bar{Z}$, bir kişi için en az tüketim düzeyi.

Ve tüketim fonksiyonumuz (II ve III ten) :

$$\boxed{Z = (Y - \sigma Y') / L} \qquad \ldots \text{V}$$

yeni biçimlerine girmiş oluyor.

b — Ramsey - Goodwin Kuralı :

Şimdi, nüfus artışı halinde Ramsey'in kuralı nasıl değişecek, onu inceleyebiliriz.

Yukarıdaki bulgularımızdan yararlanarak fayda fonksiyonelimizi kolayca yazabiliriz :

$$U = \int_a^b \varphi (Z) \; dt$$

Şimdilik fayda fonksiyonunun logaritmik özelliğini ihmal edelim. Böyle yapınca Z, daha önce gördüğümüz gibi :

$$Z = (Y - \sigma Y') / L \qquad \text{idi;}$$

L de t nin fonksiyonu olduğu için, Z şu üç değişkenin fonksiyonu olmaktadır :

$$Z = \psi (Y, Y', t)$$

Böylece fonksiyonelimiz :

$$U = \int_a^b \varphi \left\{ \psi (Y, Y', t) \right\} dt$$

biçimindedir. Görüldüğü gibi fonksiyonelin bu durumu, matematik bölümünde ele aldığımız genel hale tekabül etmektedir.

Euler denklemi :

$$\varphi_Y = d/dt \ \varphi_{Y'}$$

biçimindedir. Burada :

$$\varphi_Y = \partial\varphi / \partial Y \qquad \text{ve}$$
$$\varphi_{Y'} = \partial\varphi / \partial Y' \qquad \text{dür.}$$

Fonksiyonun fonksiyonu kuralını uygularsak :

$$\varphi' (Z) \psi_Y = d/dt \ \ \varphi' (Z) \psi_{Y'}$$

Öyle ki :

$$\psi_Y = \partial\psi / \partial Y \qquad \text{ve}$$
$$\psi_{Y'} = \partial\psi / \partial Y' \qquad \text{dür.}$$

Burada ψ yi yerine koyarsak :

$$\varphi' \partial \left\{ (Y - \sigma Y') / L \right\} / \partial Y$$
$$= d/dt \ \varphi' \partial \left\{ (Y - \sigma Y') / L \right\} / \partial Y'$$

Kısmî türevleri alırsak :

$$\varphi' (1/L) = d/dt \ \ \varphi' (-\sigma/L)$$

Sağ taraftaki türev alma işlemini yaparsak :

$$\varphi' (1/L) = - d/dt \ \varphi' (\sigma/L) + \varphi' (\sigma n/L)$$

bu ifadeye düzenlersek :

$$\varphi' = -\, d/dt\ \varphi'\sigma + \varphi'\sigma n$$

$$d/dt\ \varphi'\sigma = \varphi'\sigma n - \varphi'$$

$$d/dt\ \varphi'\sigma = \varphi'(\sigma n - 1)$$

Ve buradan da Goodwin kuralına ulaşıyoruz :

$$\boxed{\left\{ d/dt\ \varphi' \right\} / \varphi' = -(1/\sigma - n)} \quad \ldots \text{VI}$$

Görüldüğü gibi $f_K = 1/\sigma$ olduğuna göre, bu kuralın Ramsey kuralından tek farkı, 'n' yi kapsamasıdır. Çünkü sermayenin marjinal prodüktivitesinin yerini burada sermaye/hasıla oranı almıştır. (Ramsey kuralında olduğu gibi, çözümün negatif işareti, denklemin sol tarafının azaldığını gösteriyor.)

Goodwin kuralının sonucu şu oluyor: nüfus artışının etkisi, sermaye gereğini, hızı kadar artırmaktadır: artan nüfusun tüketim gereklerini karşılamak üzere daha fazla yatırım yapmak gerekmektedir.

c — Optimal Kalkınma Yolu :

Şimdi, kalkınma parametrelerini kapsayan optimal büyüme yolunu, yani, adam başına tüketimi maksimum kılacak yolu araştıralım.

IV ve V ten, fayda fonksiyonelimizi şu şekilde yazabiliriz :

$$U = \int_a^b \log_e \left\{ (Y - \sigma Y' - \bar{Z}L) / L \right\} dt$$

Burada :

$$F = \log_e \left\{ (Y - \sigma Y' - \bar{Z}L) / L \right\} \text{ dersek :}$$

$$F_Y = 1 / (Y - \sigma Y' - \bar{Z}L) \qquad \text{ve}$$

$$F_{Y'} = \sigma (Y' - \sigma Y'' - n\bar{Z}L) / (Y - \sigma Y' - \bar{Z}L)^2$$

$$F_Y - d/dt\ F_{Y'} = 0 \quad \text{dan :}$$

$$Y - \sigma Y' - \bar{Z}L - \sigma (Y' - \sigma Y'' - nL_o) \exp (nt)\ \bar{Z} = 0 \quad \text{böylece :}$$

$$\sigma^2 Y'' - 2\sigma Y' + Y = L\ \bar{Z} - L_o\ \bar{Z}\sigma n\ \exp (nt)$$

şeklindeki diferansiyel denkleme ulaşırız.

$D = d/dt$ şeklinde bir operatör kullanarak tamamlayıcı çözümü arayalım. Denklemin sol tarafını homojen çözümü bulmak için kullanıyoruz.

$$(D\sigma - 1)^2 \; Y = \bar{Z}L - \sigma n \; \exp (nt)$$

Buradan köklerin eşit ve $1/\sigma$ ya eşit olduğunu görüyoruz. Öyle ise tamamlayıcı çözüm :

$$Y_c = (A + Bt) \; \exp \; (t/\sigma) \qquad \text{dır.}$$

Burada A ve B, başlangıç koşullarını gösteren iki sabittir. Şimdi özel çözümü elde etmeğe çalışalım :

Önce yukarıdaki standart hali tekrar yazalım :

$$\begin{aligned} \sigma^2 Y'' - 2\sigma Y' + Y &= \bar{Z}L - L_o \; \bar{Z} \; \sigma n \; \exp (nt) \\ &= L_o \; \bar{Z} \; \exp (nt) - L_o \; \bar{Z} \; \sigma n \; \exp (nt) \\ &= L_o \bar{Z} \; (1 - \sigma n) \; \exp (nt) \end{aligned}$$

Özel çözümün t nin fonksiyonu olduğu görülüyor :

$$Y_p = f \, (t)$$

Öyle ise sorunumuz, üstel bir fonksiyonun sabitesini aramak Bu sabiteye k diyelim :

$$Y_p = f \, (t) = k \; \exp \; (nt)$$

Böyle olunca :

$$Y' = kn \; \exp \; (nt) \qquad \text{ve}$$

$$Y'' = kn^2 \; \exp \; (nt) \qquad \text{dir.}$$

Bulduğumuz bu iki ifadeyi yukarıdaki standart formda yerine koyarsak :

$$\begin{aligned} \sigma^2 \, kn^2 \exp \, (nt) - 2\sigma \, kn \exp \, (nt) + k \exp \, (nt) \\ = L_o \; \bar{Z} \; (1 - \sigma n) \exp \, (nt) \end{aligned}$$

Sadeleştirirsek :

$$\sigma^2 \, kn^2 - 2\sigma \, kn + k = L_o \; \bar{Z} \; (1 - \sigma n)$$

k parantezine alırsak :

$$k(\sigma^2 n^2 - 2\sigma n + 1) = L_o \bar{Z} (1 - \sigma n)$$

Sol taraftaki parantez içindeki ifade bir «mükemmel kare» dir, onun için :

$$k(\sigma n - 1)^2 = L_o \bar{Z} (1 - \sigma n) \qquad \text{böylece :}$$

$$k(1 - \sigma n) = L_o \bar{Z} \qquad \text{ve buradan}$$

$$k = (L_o \bar{Z}) / 1 - \sigma n \qquad \text{yi buluruz.}$$

Böylece :

$$Y_p = (L_o \bar{Z}) / 1 - \sigma n \ \exp(nt)$$

Öyle ise genel çözüm (tamamlayıcı ve özel çözümlerin toplamı) şu şekildedir :

$$\boxed{Y = (A + Bt) \exp(t/\sigma) + (L_o \bar{Z}/1 - \sigma n) \exp(nt)} \quad \ldots \text{VII}$$

Bu şekilde elde ettiğimiz optimal büyüme yolunu şu şekilde yorumlayabiliriz : sermaye/hasıla oranının küçük olması, büyüme üzerinde olumlu etkide bulunur; nüfus artış hızının etkisi ise ters yöndedir.

Görüldüğü gibi bunlar genel sonuçlardır. Daha belirli bilgi edinebilmek için parametrelere alternatif değerler verilerek sonuçlarını karşılaştırmak gerekir. Bununla birlikte bazı genel yargılarda bulunmak mümkün :

Denklemlerdeki en az geçim haddinin uzun dönemde fazla etkili olmayacağı görülmektedir. Çünkü uzun dönemde optimal yola üstel terimler hakim olacaktır. Onun için önemli olan, başlangıçtaki adam başına tüketim değil, sermaye/hasıla oranıdır. Benzer şekilde başlangıçtaki işgücü, L_o, yine zaman içinde etkisini yitirecektir. Etkisini sürdürecek olan, nüfus artış hızıdır. Kısa dönemde σ ve «n» nin etkileri uzun dönemdeki etkileri ile aynı yöndedir. Ama iki parametre de asıl etkilerini uzun dönemde hissetiriyorlar.

Kalkınma sorunu ele alındığında genellikle nüfus artış hızı olumsuz bir etkiye sahiptir. Burada ise tersine görünüyor. Bizce bu, denklemin mantıklama *yönüne* bağlı. Normatif bir model olduğu için şöyle yorumlanıyor: nüfus artış hızı fazla ise, adam başına tüketimi maksimize etmek için millî gelir şu kadar *olmalı*. Kanımızca $\overline{Z}$ nin pozitif etkiye sahip olması da aynı yorumlama ile açıklanabilir.

IV — DEĞİŞİMLER HESABININ GELİŞMESİ

Bu bölümde şunlarla uğraşacağız: birinci kesimde, gerek koşulu tamamlayan koşullar konusuna çok kısa olarak değineceğiz.

İkinci kesimde ise, ele aldığımız şekliyle değişimler hesabında yapılan varsayımların ne yönde gevşetilerek tekniğin geliştirilmesine çalışıldığı konusunda kısaca duracağız.

Ama değişimler hesabındaki asıl gelişmeler, iktisatçı olarak bizi ilgilendirmesi bakımından, bunlar değil. Değişimler hesabının geliştirilmesi sayılan kontrol teorisi ve maksimum prensibi. Onun için üçüncü kesimde bunun üzerinde duracağız.

1 — Tamamlayıcı Koşullar

Değişimler hesabında gördüğümüz Euler koşulu bir gerek koşuldu. Bulduğumuz optimal değerin bir maksimum mu yoksa minimum mu olduğunu bu koşulla bilemiyorduk. Yeter koşullar, kabaca, geleneksel optimizasyondaki ikinci sıra koşullarına tekabül etmektedir. Ama aynı şey değil, üstelik türetilmeleri de onunla karşılaştırılmayacak kadar zor. Bu koşullara Legendre-Clebsch koşulları adı veriliyor. Bizim ele aldığımız örneklerde zorunlu sayılmayabilir ama, pür matematik açısından, güçlü analizler için bu koşulların yerine getirilip getirilmediği kontrol edilmelidir.

2 — Varsayımların Gevşetilmesi

Ele aldığımız basit bodelin bazı sınırlayıcı varsayımlarının gevşetilmesinin hangi koşullara bağlı olduğu araştırılarak analizin uygulama alanı genişletilmek istenmiştir.

a — Değişken Uç Noktalar

Biz hep sabit uç noktalarla uğraşmıştık. Özellikle bitişin bir nokta halinde değil, bir alan halinde olması bazı uygulama alanları bulabilir.

Analizin bu hali kapsayabilmesinin koşullarına «geçiş değişimi» (transversality) koşulları ya da Hamilton-Jacobi koşulları adı verilmektedir.

b — Entegral Türünde Sınırlar :

Ele aldığımız fonksiyonellerin sınırları entegral olarak alındığında, başta basit örneğini vermiş olduğumuz «eşçevre» sorunlarının çözülmesi ile ilgili sorunlardır.

c — Köşeli Yollar :

Değişimler hesabında, fonksiyonların türevlerinin belirli bir sıraya kadar (ele aldığımız örneklerde ikinci sıraya kadar) sürekli olduğunu varsaymıştık. Bu varsayım kalktığında köşeli yollarla karşılaşıyoruz. Köşelerin varlığının neleri gerektirdiğini Weierstrass-Erdman koşulları vermektedir.

Değişimler hesabındaki bu gelişmeler iktisat teorisine (bildiğimiz kadarı ile) uygulanmamıştır. Onun için bu durumlar üzerine bu kadar bilgi ile yetinebiliriz. İktisatta uygulanan gelişmelere bundan sonraki bölümde değineceğiz.

3 — Kontrol Teorisi ve Maksimum Prensibi

Optimal iktisat, gelişmesinin son aşamasında, değişimler hesabından türediğini kabul edebileceğimiz maksimum prensibini ve kontrol teorisini kullanmaktadır. [22]

Şimdi bunlar üzerinde duralım.

Değişimler hesabında ele aldığımız fonksiyonel :

$$J = \int_a^b \varphi\,(y, y', t) \quad dt$$

biçiminde idi. Kontrol teorisinde ise şu şekildedir :

$$J = \int_a^b \varphi\,(y, z) \quad dt$$

(22) Kontrol teorisi, maksimum prensibi yanında dinamik proğramlama ile çözülmektedir. Biz sürekli hesap doğrultusunda giderek, dinamik proğramlama üzerinde durmadık. Kontrol teorisi, yapay uyduların uzayda uzaktan yönetimine kadar birçok kullanma yerleri olan bu yöntem, iktisatta, dinamik sorunların incelenmesinde (efsane benzeri bir yer tutarak) kullanılmaktadır.

Böylece y′ açık olarak görülmemektedir. Ama y′, y nin n sırasına kadar fonksiyonudur ve bu fonksiyonlar, sınır koşullarını teşkil etmektedir :

$$y' = f^i(y) \qquad i = 1, \ldots, n$$

Burada y′ ne «durum değişkeni» (state variable) adı verilmektedir. z_j yi ise «kontrol değişkenleri» (control variable) olarak tanımlıyoruz, öyle ki, $j = 1, \ldots, m$. Burada, n ile m arasındaki ilişkilerin fonksiyonelde görülmesi şart değildir, bu da olanakların geniş tutulabildiğini gösteriyor.

Bu şekilde formüle edilen kontrol probleminin en yaygın çözüm yolu, Pontryagin Prensibi, ya da Maksimum Prensibi adı verilen yöntemdir. Bu yöntemde, doğrusal fonksiyonlar kullanılmakta, bu durum yöntemin tercih nedeni olmaktadır.

Yöntemin esasını, statik Lagrange çarpanları yardımı ile açıklamak mümkün. Lagrange çarpanlarının statikliğine karşı bu yöntemde dinamik çarpanlar yer almaktadır.

Yine Lagrange yöntemindeki «büyütülmüş fonksiyon» (augmented function) yerine burada Hamiltonyen Fonksiyon almaktadır; öyle ki :

$$H(\psi, y, z) = k\,F(y, z) + \sum_{i}^{n} \psi_i f^i(y, z)$$

Burada k, gelişigüzel seçilmiş bir sabit ve ψ_i, $i = 1, \ldots, n$ olmak üzere gelişi güzel bir zaman fonksiyonudur.

Böylece ψ yi Lagrange'deki λ ya benzetebiliyoruz; şu farkla ki, λ bir sabitti, ψ ise zaman boyutu olan dinamik bir çarpan.

Çözüm ise yine Lagrange'ın büyütülmüş fonksiyonundaki gibi :

$$H\left\{ \psi(t), y(t), z(t) \right\} = 0 \qquad \text{ve}$$

$$k \leq 0 .$$

olunca optimal koşul sağlanmış olacaktır.

YARARLANDIĞIMIZ KİTAPLAR

a — **İktisat Kitapları :**

R. G. D. ALLEN **Mathematical Analysis For Economists,** Macmillan, 1966.

E. BURMEISTER ve A. R. DOBELL **Mathematical Theories of Economic Growth,** Macmillan, 1970.

S. CHAKRAVARTY **Capital and Development Planning,** M.I.T. Press, 1969.

R. FRISCH **Maxima and Minima : Theory and Economic Applications,** Reidel, 1966.

M. D. INTRILIGATOR **Mathematical Optimization and Economic Theory,** Prentice-Hall, 1971.

K. LANCASTER **Mathematical Economics,** Macmillan, 1968.

b — **Matematik Kitapları :**

F. M. APOSTOL **Mathematical Analysis : A Modern Approach to Advanced Calculus,** Addison-Wesley, 1957.

F. AYRES **Modern Algebra,** Mc Graw-Hill, 1965.

I. M. GELFAND ve S. V. FOMIN **Calculus of Variations,** Prentice-Hall, 1963.

M. R. HESTENES **Calculus of Variations and Optimal Control Theory,** Wiley, 1966.

F. B. HILDEBRAND **Methods of Applied Mathematics,** Prentice-Hall, 1965.

S. LIPSCHUTZ **Finite Mathematics,** Mc Graw-Hill, 1965.