



Matematiksel Düşünme ve Bilgi İşlemsel Düşünmenin Epistemolojik Bağlantısına Kuramdan Uygulamaya Bir Bakış

Behiye DİNÇER AKSOY¹, Berna CANTÜRK GÜNHAN², Filiz MUMCU³

Özet

Matematiksel düşünme, günlük yaşamın sürdürülmesinde ve bilimin gelişiminde kritik bir öneme sahiptir. Bu çalışmada, matematiksel düşünme ile Bilgi İşlemsel Düşünme (BİD) arasındaki epistemolojik bağlantı incelenmektedir. Çünkü BİD, problem çözme sürecini düşünme biçimi ve bilgisayar bilimi araçlarıyla ele aldığı için, matematiksel düşünmeyle önemli bir ilişkiye sahip olduğu düşünülmektedir. Bu ilişkinin anlaşılması için, çalışmada matematiksel modelleme problemleri bilişsel perspektifle ele alınmıştır. Durum çalışması araştırma deseni kullanılarak, matematik eğitimi BİD'i entegre etmeye çalışan çalışmalar incelenmiş ve bir kavramsal çerçeve oluşturulmuştur. Oluşturulan çerçeve doğrultusunda bir mesleki gelişim kursu hazırlanmış ve bir matematik öğretmenine uygulanmıştır. Böylece modelleme sürecindeki bilişsel süreçler ile BİD bileşenleri arasındaki ilişki incelenmiştir. Araştırmanın bulgularına göre, (a) soyutlamanın Piaget'in soyutlama teorisi bağlamında ele alınmasının matematiksel düşünmeyi anlamada daha etkili olduğu, (b) modelleme sürecinde birden fazla BİD bileşeninin her aşamada açığa çıkabileceği ve herhangi bir bileşenin tek bir aşama ile ilişkilendirilemeyeceği belirlenmiş, (c) matematiksel düşünme ile BİD arasındaki ortak ve farklı düşünme süreçleri ortaya konmuştur. Bu bulgular, matematiksel düşünme ve BİD arasındaki karmaşık ilişkilerin daha derinlemesine anlaşılmasına katkı sağlamaktadır.

Makale Bilgileri

Araştırma
Makalesi

Gönderim Tarihi
16/02/2024
Kabul Tarihi
02/12/2024

Anahtar Kelimeler

Matematiksel
düşünme,
Bilgi işlemsel
düşünme,
Matematiksel
modelleme

¹Dokuz Eylül Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, ORCID: 0000-0002-6452-6066, behiyedincer@gmail.com

²Dokuz Eylül Üniversitesi, ORCID: 0000-0002-9585-0811, berna.gunhan@deu.edu.tr

³Celal Bayar Üniversitesi, ORCID: 0000-0001-9371-6734, filizkuskaya@gmail.com, filiz.mumcu@cbu.edu.tr

Atıf:

Dinçer Aksoy, B., Cantürk Günhan, B. ve Mumcu, F. (2025). Matematiksel düşünme ve bilgi işlemsel düşünmenin epistemolojik bağlantısına kuramdan uygulamaya bir bakış. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi [PAÜEFD]*, 64, 123-149. <https://doi.org/10.9779/pauefd.1438401>

Giriş

Temel bir bilim olarak matematik, doğanın ve dolayısıyla insanın günlük yaşamının ayrılmaz bir parçasıdır. Matematik bilimini ve bu bilimi anlama konusunda farklı bakış açıları bulunmaktadır. Bir bakış açısında göre matematik, matematiksel gerçekleri ve süreçleri anlamak olarak tanımlarken diğerinde matematik, örüntülerin keşfi ve anlayışı üzerine odaklanarak diğer bilimlerle benzerlik taşıyan bir disiplin olarak tanımlanmaktadır (Schoenfeld, 1982). Bu farklı tanımlar, matematik ve matematiği anlama konusundaki bakış açılarını matematiksel düşünmeyi tanımlama şekillerine de yansıtmaktadır. Bu tanımlar incelendiğinde, matematiksel düşünmenin; matematiksel kavramların nasıl oluşturulduğu (Dreyfus 2002; Freudenthal, 1973; Tall, 1995) ve matematiksel süreçlerin gelişimi (Isoda ve Katagiri, 2012; Mason ve diğerleri, 2010; Polya, 1945; Schoenfeld, 1992) bakış açılarıyla ele alınmaktadır (Çelik, 2014; Isoda ve Katagiri, 2012). Yani matematiği tanımlama biçiminin matematiksel düşünmeyi tanımlama biçimini de etkilediği söylenebilir. Bu nedenle matematiksel düşünmeye yönelik bakış açılarını ele almak önemlidir.

Matematiksel Düşünmeye Yönelik Bakış Açıları

Matematiksel düşünmeyi kavramların oluşturulması olarak açıklayan bakış açısı, temel bir matematiksel bilginin üstüne inşa edilerek daha ileri seviyedeki matematiksel bilginin oluşumunda matematiksel kavramların bilişte nasıl inşa edildiğine odaklanır. Bu bilişsel gelişim süreci, küçük yaş dönemlerinde başlar ve somut düşünceden soyut düşünceye doğru ilerler. Kavramların zihinsel oluşumu ve gelişimi de, araştırmacılar tarafından farklı bakış açılarıyla ele alınmıştır. Örneğin matematiksel düşünmenin gelişimini, Freudenthal (1973) kişinin kendi deneyimlerinden yola çıkarak durumları matematikleştirmenin gelişimi; Tall (1995) matematiksel bilginin zihinde nesneleştirilmesi yani somutlaştırılarak zihinde kapsüllemesi ve eyleme geçmesi olarak tanımladığı subjenin gelişimi; Dreyfus (2002) matematiksel bilginin temsili ve soyutlama süreçlerinin gelişimi ile açıklamıştır. Bu araştırmacıların matematiksel düşünme ile temel seviyede bir matematiksel bilgiden ileri matematiksel bilgiye geçiş sürecine odaklandıkları söylenebilir. Bu süreçteki ileri matematiksel düşünmeye geçiş “üniversite matematiği” veya lisansüstü matematiği olarak da tarif edilir (Tall, 1991; Dreyfus, 2002).

Matematiksel süreçlere yoğunlaşan diğer bakış açısı ise matematiksel düşünme araçlarının ve matematiksel düşünmenin nasıl geliştiğine odaklanır (Çelik, 2014). Mason vd. (2010) matematiksel düşünmeyi “uzmanlaşma ve genelleme” ile “varsayımda bulunma ve ikna etme” süreçleriyle problem çözme; Schoenfeld (1992), matematiksel araçlar yardımı ile örüntüyü fark edip matematikleştirmek ve soyutlama süreçleri ile matematiksel bakışın gelişimi; Isoda ve Katagiri (2012),

matematiksel içerik (kavram, beceriler, vb) ve matematiksel süreçler (matematiksel düşünme, değer verme ve fikir üretme, vb) yardımıyla problem çözme olarak görmektedir. Bu bakış açısında matematiksel düşünme araştırmacılar tarafından matematiksel düşünme araçları ve matematiksel beceriler yardımıyla problem çözme olarak görülür.

Matematiksel düşünmenin gelişimine yönelik bakış açılarının ortak noktası da matematiksel bilginin oluşumu ve soyutlamasına odaklanma (Dreyfus, 2002; Freudenthal 1973; Schoenfeld, 1992; Tall 1991) olduğu söylenebilir. Zihindeki bilgiler gereksiz ayrıntılarından soyutlanır ve nesneleştirilir, bu nesneleşmiş bilgi yeni matematiksel bilginin oluşumunda araç olur. Böylelikle matematiksel bilgilerin soyutlama yardımı ile karmaşıklık düzeyinin artması beklenir (Tall, 1995). Örneğin kesir kavramıyla çalışmak; sayma, çoklu temsil, dört işlem becerileri ve orantısal akıl yürütme gibi bilgi ve becerilerin soyutlaması yani bilginin zihinde nesneleştirilip bir kapsüle dönüştürülmesi ve gerekli yeni bilginin oluşumunda bu kapsülün kullanılmasını gerektirir. Bilişte oluşan kapsüller yardımı ile kesir kavramında karmaşık yapıda problemler çözüme ulaşır. Kesir örneğinden de anlaşılacağı gibi matematiksel bilginin soyutlaması süreci oldukça karmaşıktır. Bu nedenle matematikçiler ve matematik eğitimcileri uzun yıllardır soyutlama sürecine açıklık getirmeye çalışmıştır.

Soyutlama fikri, Aristotile'nun çalışmalarından bu yana karşılaşılan insanoğlunun düşünmesi ile ilgili felsefi ve psikolojik çalışmalara etkide bulunmaktadır (Yeşildere ve Türnüklü, 2008). Aristotile'dan 21. Yüzyıla taşınan soyutlama fikrine yönelik varsayımlar şu şekilde özetlenebilir (Van Oers, 2001):

- Nesnelerin sınıflandırılması ve temsil edilmesi ile oluşur.
- Zihinde oluşur, yani ortamı koşullarından bağımsızdır.
- Düşüncenin gelişimi üstüne daha ileri ve ayırt edici bir özelliktir.

Bu varsayımlara bakıldığında soyutlama, zaman, mekân ve ortamdan bağımsız olarak düşünme sürecinin üst düzeylerinde gerçekleşir. Günümüz araştırmaları soyutlamanın iki şekilde gerçekleştiğine vurgu yapmaktadır:

- Bilişte geliştiği ve bilişsel bir bakış açısıyla açıklandığı çalışmalar (Dubinsky 1991; Gray ve Tall 1991; Piaget 2001),
- Sosyal çevre, sosyal etkileşim ve ortamı çevreleyen koşullar ile gerçekleşeceğini yani sosyokültürel bir bakış açısıyla açıklayan çalışmalar (Herskowitz vd., 2001; Van Overs, 2001).

Soyutlama sürecini bilişsel bakış açısı ile açıklayan araştırmacılardan Piaget'nin "soyutlama (abstraction)" düşüncesi, matematiksel bir kavramın zihinde oluşumunu açıklayan en temel düşünce olarak

görülebilir (Zembat, 2016). Piaget, küçük yaş gruplarında bilişsel yapıların nasıl oluştuğuna (Tall, 1999) açıklık getirirken deneysel (emprical) ve yansıtıcı (reflective) soyutlama kavramları ile açıklamıştır. Piaget, yansıtıcı soyutlamayı, (1) daha düşük bilişsel düzeyden daha yüksek bir düzeye geçiş (süreç sonunda nesneleştirme) ve (2) yüksek düzeydeki bilişsel yapının yeniden düzenlenmesi olarak açıklamıştır (Tall, 1999). Bu araştırmalardan özetle bilginin oluşumu ve soyutlama süreci bilişte gerçekleşir. Bir üst düzey bilginin oluşumu önceki bilginin oluşumuyla ardışıktır. Bu hiyerarşik bilgi birimlerinin birbirine dönüşümü mümkün olup birbirlerinden faydalandıkları söylenebilir.

Soyutlama, matematiksel düşünme kadar bilgi işlemsel düşünme için de önemlidir. Bilgisayar bilimi ve matematikte bir kavramın soyutlamasının en önemli ve en yaygın anlamı, çeşitli örneklerin ortak özelliklerini dikkate alma ve bu özelliklerin tümüne sahip bir yapı veya kategori oluşturma fikri olan çıkarmadır (extraction). Bu açıdan Piaget'in deneysel soyutlama kavramına çok yakındır ve matematiksel kavramların çoğunun gereksiz değişkeni çıkarma (extraction) yoluyla oluşturulduğu düşünülse de çıkarma (extraction) güçlü bir soyutlama mekanizması değildir (Çetin ve Dubinsky, 2017). Bu nedenle güçlü soyutlama mekanizmalarını açıklayabilecek kavramlara ihtiyaç vardır. Güçlü soyutlama mekanizmalarını açıklamada, yansıtıcı soyutlama önem kazanmaktadır. Piaget (1985), *yansıtıcı soyutlamayı matematiksel düşüncedeki tüm gelişimin temeli* olarak ifade etmiştir. Deneysel soyutlama, nesnelerin veya çevrelerin doğrudan gözlemlenebilir özelliklerini; yansıtıcı soyutlama ise bireyin kendi eylemlerine dair özellikleri (gruplama, eş parçalama, vb) temele almaktadır (Zembat, 2016). Bu durum ise iki bilim açısından soyutlama kavramındaki en temel ayrımdır.

Bilgi İşlemsel Düşünmeye Yönelik Bakış Açıları

BİD yaygın olarak kabul gören tanımıyla, "problem çözme, sistem tasarlama ve insan davranışlarını anlama"dır (Wing, 2011, p.20). Bilgisayar Bilimleri Öğretmenleri Derneği (Computer Science Teachers Association, CSTA) ve Uluslararası Eğitimde Teknoloji Derneği (The International Society for Technology in Education, ISTE) (2011) tarafından önerilen BİD'i bir problem çözme süreci olarak ifade eden tanımı aşağıdaki gibidir:

- (a) Problemleri (bilgisayar ve diğer araçlarla çözülebilecek şekilde) formüle etme,
- (b) Verileri düzenleme ve analiz etme,
- (c) Verilerin soyutlamalar (modeller ve simülasyonlar gibi) aracılığıyla gösterme,
- (d) Algoritmik düşünme yardımıyla çözümleri otomatikleştirme,
- (e) Olası çözümlerin belirleme, analiz etme ve uygulama,

(f) Bu süreci genelleme ve farklı problemlere uygulama olarak ifade eder.

ISTE (2016) öğrencilerin BİD becerilerine sahip olmaları gerektiğini vurgular. Öğrencilerin BİD becerilerini geliştirmeleri problem çözmek, formüle etmek, modeller geliştirmek, karar vermeyi kolaylaştırmak ve otomatik çözümler oluşturmak için kullanılmalıdır. BİD yönelik bakış açıları incelendiğinde farklı noktalara odaklandığı görülmektedir. Örneğin; Román-González vd. (2017) BİD tanımlarını

(1) genel tanımlar (Wing, 2006),

(2) operasyonel tanımlar (CSTA ve ISTE 2011) ve

(3) eğitimsel ve müfredat tanımları (Barefoot, 2014; Brennan ve Resnick, 2012)

olacak şekilde üç kategoride toplamıştır.

Bu tanımlar dışında 2006-2013 yılları arasında yayınlanan makaleleri inceleyen Selby ve Woollard (2013), BİD'i "problem çözme ile ilişkili ancak bununla sınırlı olmayan, genellikle ürün odaklı bir faaliyet" olarak tanımlamıştır. Wing'e (2006) göre bilgiyi işleme süreçlerinin gücü ve sınırları üstüne kurulu olan BİD, bilgisayar biliminin zihinsel araçları ile bir sisteme veya probleme çözüm bulurken sezgisel akıl yürütmeyi kullanır. BİD'e yönelik Wing'in (2006) dikkat çektiği diğer unsurlar ise şu şekilde sıralanabilir; BİD,

- Çoklu soyutlama seviyelerinde düşünmeyi gerektirir.
- Ezbere değil, düşünme süreçlerine dayalı temel bir beceridir.
- İnsanların zekâ ve yaratıcılıkları ile bilgisayar gibi düşünmesini sağlamak yerine insanların problemleri çözme yoludur.
- Doğası gereği matematiksel düşünceden yararlanır.
- Herkes için ve her yerdedir.
- Bilgiyi işleme süreçlerini hızlandırmak amaçlı büyük verileri kullanmayı içerir.
- Bilgisayar biliminin biyoloji, ekonomi, nano-hesaplama, kimya gibi diğer disiplinlere BİD bileşenlerini (örüntü tanıma, ayrıştırma, soyutlama ve algoritmalar) kullanarak problemlerin çözümüne ve bu disiplinlerin düşünme biçiminin dönüşmesine katkı sunar.

Aynı zamanda BİD, karmaşık problemleri çözmek için "bilgi ve görevleri sistematik, doğru ve verimli bir şekilde işlemenin" kavramsal bir yoludur (Lu ve Fletcher, 2009 s. 261). Benzer şekilde Liu ve Wang (2010), karmaşık problemlerin çözümünde eleştirel düşünmeyi gerektiren BİD ile bilgisayar bilimi kavram ve tekniklerinin kullanılmasını gerektirdiğini belirtmektedir. Yani gerek BİD gerekse matematiksel düşünmenin, düşünmede biliş, üstbiliş ve problem

çözmeyi merkeze alan kavramları kullandığı görülmektedir (Kallia ve diğerleri, 2021). Kalelioğlu, Gülbahar ve Kukul (2016), sistematik bir literatür taraması yaparak Polya (1945) problem çözme süreçleri ile BİD bileşenlerini arasındaki ilişkiyi açığa çıkaran aşağıdaki şekilde bir çerçeve geliştirmiştir:

- Problemin tanımlanması: soyutlama, ayrıştırma
- Veri toplama, temsil etme ve analiz etme: veri toplama, analiz, örüntü tanıma, kavramsallaştırma, veri temsili
- Çözüm üretme, seçme ve planlama: matematiksel akıl yürütme, algoritma ve prosedür oluşturma, paralelleştirme
- Çözümlerin uygulanması: otomasyon, modelleme ve simülasyonlar
- Çözümlerin değerlendirilmesi ve iyileştirmeye devam edilmesi: test etme, hata ayıklama ve genelleme ile ilişkilendirilmiştir.

Bu araştırmaların ortak yanının BİD sistematik olarak problem çözmeye odaklanan bir düşünme sürecidir. Buradan yola çıkarak matematik eğitimcileri ve bilgisayar bilimcilerinin matematiksel problem çözme ile BİD arasında bir bağlantı kurmaya çalıştığı söylenebilir. Tüm bu sebepler ile BİD ile matematiksel düşünme arasındaki bağlantının ortaya konması önem kazanmaktadır.

Bilgi işlemsel düşünmeye yönelik araştırmalar, 2013 yılından bu yana hızla büyümekte ve eğitim, bilişim ve sosyal bilimlerde üretilen bilgiden beslenmektedir (Tekdal, 2021). Özellikle STEM eğitimi bağlamında (Li ve diğerleri, 2020) araştırmaların arttığı, fen bilimleri ve matematik özelinde çalışmaların yoğunlaştığı görülmektedir (Mumcu vd., 2023). Araştırmacıların BİD'in matematik eğitime entegrasyonunda bilgisayarsız bilgisayar biliminden (Örneğin Andić ve diğerleri, 2023; Mumcu ve diğerleri, 2023) ve blok tabanlı programlamadan (Örneğin Bråting ve Kilhamn, 2021; Gleasman ve Kim, 2020; Kaup, 2022; Kilhamn ve diğerleri, 2022; Ng ve Cui, 2021), yararlanıldığı görülmektedir. Bu çalışmalara bakıldığında özellikle BİD ile matematik eğitimi arasında teknoloji destekli matematik eğitimi bağlamında bir bağ kurma çabasının artış gösterdiği söylenebilir. Bu çalışmanın amacı matematiksel bilginin inşasında bilgi işlemsel düşünme ve matematiksel düşünme arasındaki epistemolojik bağ ortaya koymaktır. Epistemolojik bağ bilginin doğası, kaynağı ve kapsamıyla ilgilenir. BİD ve Matematiksel düşünmenin epistemolojik bağ irdelendiğinde her ikisi de;

- Semboliktir, kendine has bir dile sahiptirler,
- Süreç becerileri (işlemler, kavramları işe koşma, vb.) gerektirirler,
- Soyutlamalar aracılığı ile problemlerin çözümüne hizmet ederler.

Ayrıca BİD, bilginin toplanması, sınıflandırılması, depolanması, işlenmesi, iletilmesi ve sunumu gibi bilginin işlenmesine yönelik fonksiyonlar içerir (Gülbahar, 2017, s. 402). Bireyin çevresini anlamak için edindiği bilgileri organize etmesi ve işlemesi matematiksel düşünmedir (Burton, 1984). Yani BİD becerisi ile matematiksel düşünme süreç becerileri açısından da bağlantılıdır.

Matematiksel Düşünme ve BİD

Bu araştırmada son yıllarda matematik eğitimi ve BİD arasındaki bağlantının açığa çıkarılması için yapılan çalışmalar incelenmiştir. BİD ile matematiksel düşünme arasındaki ilişkiyi açıklamada; problem çözme (Wing, 2008), BİD ve matematiksel düşünmeye ait ortak yetenekler (Sneider ve diğerleri, 2014), ortak beceriler (Barcelos ve Silveira, 2012), BİD ile matematiksel düşünme arası etkileşim (Kallia vd., 2021), bilişsel performans ve süreçlerine odaklanma (Denning, 2009; Furber, 2012; Hemmendinger, 2010; Humphreys, 2015; ISTE, 2016; Shute vd., 2017; Wing 2014; Yadav ve diğerleri, 2014) ve gibi farklı odaklar kullanılmıştır. Bu araştırmalar ile ilgili incelemeler aşağıdaki gibidir.

Wing'e göre (2008) BİD ile matematiksel düşünme arasındaki ortak nokta problem çözme süreçleridir. BİD tanımlarının en önemli ortak noktaları olan problemi anlama ve genelleme, aynı zamanda problem çözme aşamalarıdır (Barr ve diğerleri, 2011; Zhenrong ve diğerleri, 2009). BİD, problem çözme sürecinin ve üretilen çözümlerin niteliğini arttırmada kolaylaştırıcı ve hızlandırıcıdır (Yıldız, 2017). Benzer şekilde ISTE'nin ve CSTA'nın bildirdiği ortak bir çalışmada BİD sistematik bir biçimde problem çözme süreci olarak tarif edilmiştir (CSTA ve ISTE, 2011). Bu bağlamlar doğrultusunda BİD ile matematiksel düşünme arasında problem çözme ve süreçleri sebebi ile bir bağlantı olduğu söylenebilir.

Şekil 1'de Sneider vd. (2014) tarafından ifade edilen BİD ile matematiksel düşünme arasındaki benzerlikler ve farklılıklar gösterimi uyarlaması bulunmaktadır. Örneğin Şekil 1 incelendiğinde matematiksel düşünme ile BİD arasındaki bağlantının modelleme, problem çözme, olasılık ve veri analizi gibi bileşenler olduğu görülmüştür. Kallia vd. (2021) BİD ile matematiksel düşünme arasındaki ilişkiyi açığa çıkarma amaçlı yaptıkları sistematik araştırmalarında bu iki düşünme biçimi arasındaki etkileşimleri araştırmıştır. Barcelos ve Silveira (2012) hem matematiksel düşünme hem de BİD tarafından ortaklaşa geliştirilebilecek üç grup beceri tanımlamıştır:

- (1) Matematiksel Temsiller Oluşturma ve Bunların Algoritmalarla Olan Semiyotik İlişki: Her iki düşünme biçiminde de bir "dilde" alana özgü temsillerin (sembol, kod ve isimlerin) ifade edilmesi, yorumlanması ve transfer edebilmesi

(2) Alana Özgü İlişkiler Kurma ve Örüntü Tanımlama: her iki düşünme biçiminde de verilen problemin çözüm sürecinde matematiksel akıl yürütme örüntü bulmayla,

(3) Tanımlayıcı ve Temsili modeller: Durumları açıklamak ve analiz etmek adına oluşturulan matematiksel modelleme yoluyla üç gruba yönelik becerilerin gelişimi gerek matematiksel düşünmeyi gerekse de BİD'i geliştirir.

Şekil 1

Sneider vd. (2014) Tarafından Belirtilen BİD ve Matematiksel Düşünme İlişkisi



Matematiksel Düşünme ile BİD arasındaki ilişkiyi yorumlayan çalışmalar incelendiğinde BİD ile Matematiksel Düşünme arasında etkileşim, yetenekler veya beceriler anlamında bağlantılarını ele aldıkları ve matematiksel düşünme ile BİD arasında ilişki kurdukları görülmektedir.

BİD'in bileşenleri dışında bireyin bilişsel performans ve süreçlerine odaklanarak da tanınmaktadır (Cansu ve Cansu, 2019). BİD'e dayalı etkinlikler, bilişsel becerileri ve öğretme öğrenme süreçlerini geliştirmeyi amaçlar (Deniz, 2020).

Matematiksel Düşünme ve Matematiksel Modelleme

Matematiksel modelleme, günlük yaşam problemlerine matematiksel bir bakış açısıyla çok yönlü çözüm üretilmesinde önemli bir rolü olan problem çözme sürecidir (Blum ve Niss, 1989; Aydın-Güç ve Baki, 2016). Matematiksel modelleme sürecinde gerçek yaşam problemine matematiksel ifadeler geliştirilerek matematiksel çözümler ile konu çözüme ulaştırılır (Doruk ve Umay, 2011). Modelleme süreci, bilişsel ve üstbilişsel becerilerin oluşması veya geliştirilmesini sağlayacak zihinsel modellemeyi ve açıklamasını gerektirir (Hıdıroğlu ve Bukova Güzel, 2013).

Kaiser ve Sriraman (2006) matematiksel modellemeye yönelik araştırma yaklaşımları ve bakış açılarını değerlendirirken matematiksel

modelleme üzerine etkili yaklaşımlardan biri olarak bilişsel perspektifi tanımlamıştır. Çünkü bu perspektifin amacı modelleme süreçleri sırasında gerçekleşen bilişsel süreçleri analiz ederek bu süreçlerin daha iyi anlaşılmasını sağlamaktır. Sonuç olarak, bu bilişsel perspektifin amaçları (a) bilişsel süreçlerin analizi ve anlaşılması (örneğin, öğrencilerin bireysel modelleme rotaları, engelleri veya stratejileri) ile (b) matematiksel modelleme sırasında matematiksel düşünmenin teşvik edilmesidir (Kaiser ve Sriraman, 2006). Bilişsel modelleme sürecinde ise Borromeo-Ferri' nin (2007), bilişsel modelleme döngüsünün yaygın olarak kullanıldığı bilinmektedir (Borromeo-Ferri, 2018, s. 18). Bu çalışmada bilişsel modelleme sürecinde matematiksel düşünmenin teşvik edilmesi ve bilişsel süreçlerde görülen eylemlerde BİD bileşenleri ile entegrasyonuna odaklanılmıştır. Bu amaç doğrultusunda matematiksel modelleme sürecinde açığa çıkan bilişsel eylemlerin BİD bileşenleri ile ilişkisi irdelenmiştir. Böylelikle BİD bileşenleri ile matematiksel düşünmenin nasıl bütünleştiği sorusuna yanıt aranmıştır.

Bu araştırmanın bir temel araştırma sorusu bulunmaktadır;

1-Matematiksel modellemedeki bilişsel süreçler ile BİD bileşenleri nasıl bütünleşmiştir? Bu soruya yanıt aranırken alt araştırma sorularına yanıt aranmıştır:

- Alan yazında matematik eğitimi ile BİD bileşenleri entegrasyonunda hangi bileşenler kullanılmıştır?
- BİD bileşenleri ile entegre edilmiş bir mesleki gelişim eğitiminde bilişsel eylemler ile BİD bileşenleri nasıl bütünleşir?

Yöntem

Bu çalışmada matematiksel modelleme sürecindeki bilişsel eylemler ile BİD bileşenlerinin nasıl bütünleştiklerinin incelenmesi amaçlanmıştır. Bu amaç doğrultusunda bilişsel eylemler ile BİD bileşenlerin derinlemesine incelenmesi ve irdelenmesi planlanmıştır. Araştırmada süreçler değerlendirilip ilişkiler araştırılacağından nitel bir araştırma desenlerinden durum çalışması kullanılmıştır (Yıldırım ve Şimşek, 2008). Araştırma iki aşamadan oluşmaktadır. Birinci aşamada BİD bileşenleri üzerine yapılmış çalışmalar incelenmiştir. İkinci aşamada ise matematiksel modelleme ve BİD bileşenleri arasındaki entegrasyonu ortaya çıkarmak amacıyla bir öğretmen eğitimi programı oluşturulmuş ve uygulanmıştır.

Araştırmanın Birinci Aşaması

Birinci aşamada alan yazında matematik eğitime BİD bileşenlerini entegre etmeye çalışan araştırmalar incelenmiştir. Böylelikle BİD bileşenlerinin araştırmada bulunacağının doğrulaması yapılmıştır. Bu süreçte var olan durumun yorumlanabilmesi için literatür taraması yapılmıştır. Araştırma kapsamına alınan çalışmaları belirlemek

amacıyla Web of Science (WOS) bünyesinde tarama yapılmıştır. BİD ve matematik eğitiminin ortak bileşenlerini irdellemek için 2013-2023 yılları arasında ile “computational thinking” ve “mathematics” ve (“primary” OR “elementary” OR “secondary” OR “middle” OR “high” OR “K-12”) anahtar kelimeleri ile tarama yapılmıştır. 276 adet çalışmaya ulaşılmıştır. Yapılan taramada BİD’in çeşitli bileşenlerini matematik eğitime entegre eden araştırmalar sürece dâhil edilmiştir. Böylelikle toplam 16 makale incelenmiştir.

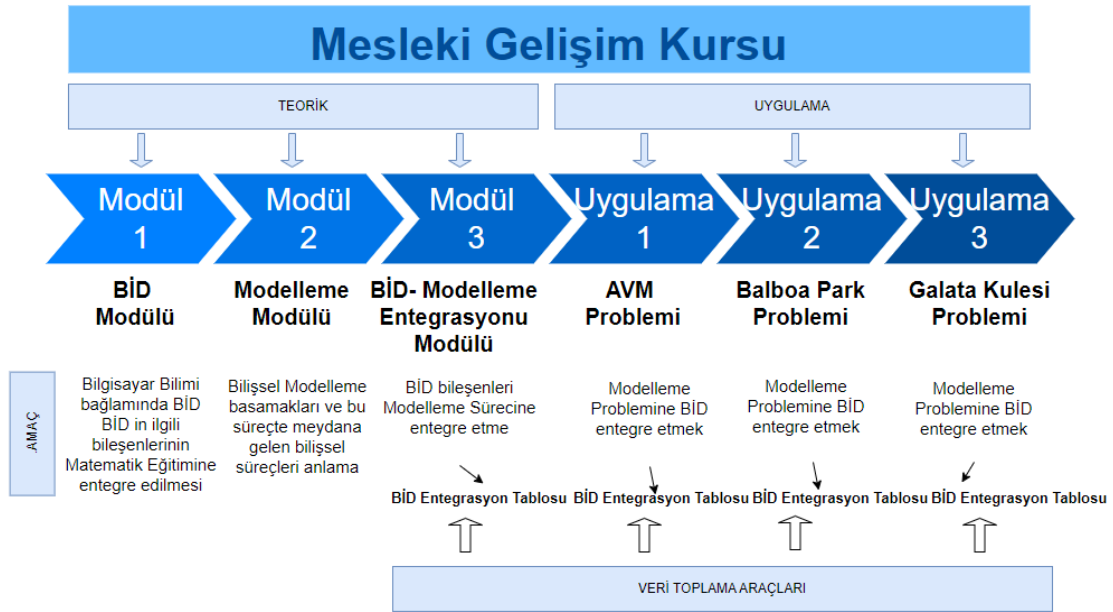
Araştırmaya dâhil edilen 16 çalışma BİD bileşenlerinin hangilerini kullandıklarına göre sınıflandırılmıştır. Araştırmalar diğer araştırmacılar tarafından da beraber sınıflandırmış, veriler Tablo 3’te betimsel biçimde bulgular bölümünde sunulmuştur.

Araştırmanın İkinci Aşaması

İkinci aşamada ise matematiksel modelleme sürecindeki bilişsel eylemler ile BİD bileşenler arasındaki bütünleşmeyi ortaya çıkarmak amacıyla bir öğretmen eğitimi programı oluşturulmuş ve uygulanmıştır.

İçerik Geliştirme

BİD’in matematik eğitimiyle bütünleştirilmesi öğretmen eğitimi programı bir doktora öğrencisi, bir matematik alan eğitimcisi ve bir bilişim teknolojileri alan eğitimcisi tarafından oluşturulmuştur. Araştırmada tasarlanacak olan öğretim modeli için ilk olarak araştırmacılar tarafından BİD’in entegrasyonu üstüne yapılmış araştırmalar ve bilişsel süreçleri açığa çıkarmaya odaklanan modelleme (Borromeo Ferri, 2007) perspektifi incelenmiş, süreci değerlendirmeye yönelik katılımcı problem çözme sürecini ve bu süreçteki bilişsel eylemlerini açığa çıkaracakları katılımcı beyanlarındaki gelişim ölçüt belirlenmiş ve içerik hazırlanmıştır. Hazırlanan içerik program geliştirme alan uzman görüşüne sunulmuştur. Program geliştirme esasları doğrultusunda verilen geri dönüşlere göre programın kazanımları revize edilmiştir. Araştırmacılar tarafından öğretmenlere yönelik hazırlanan eğitim içeriği mesleki eğitim kursu olarak isimlendirilmiş ve Şekil 2’de gösterilmiştir.

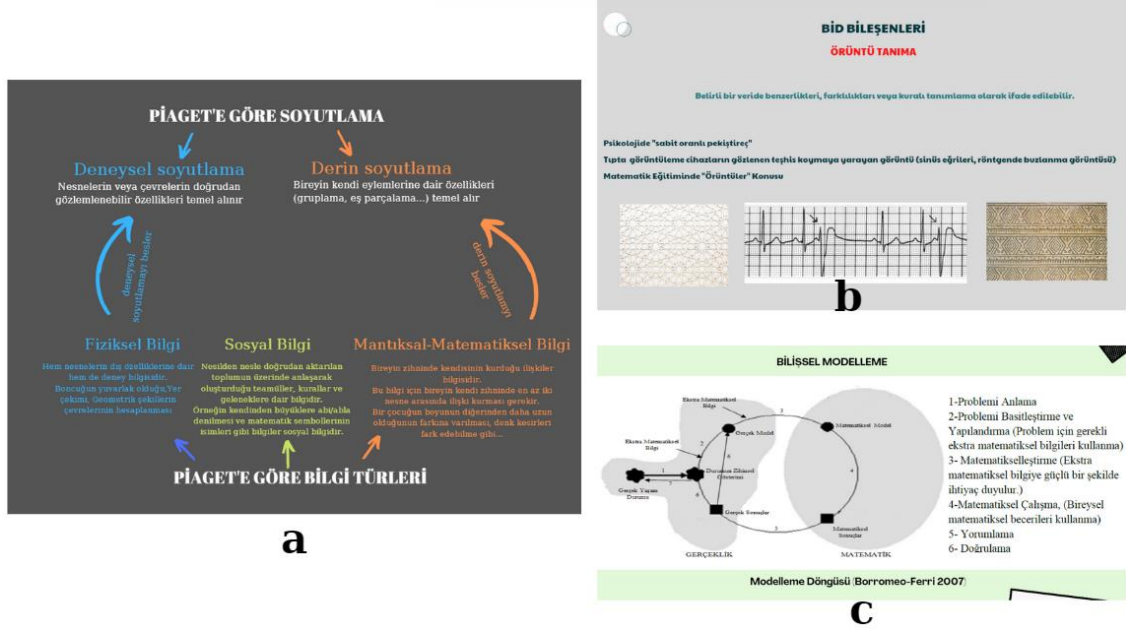
Şekil 2*Araştırma Süreci*

Bu araştırmanın amacı “Matematiksel modellemede ki bilişsel süreçler ile BİD bileşenleri arasında ilişki nasıl bütünleştiğinin araştırılmasıdır. Bu nedenle mesleki gelişim kursunun öncelikle (1) BİD e yönelik temel bilgileri edindirmesi, (2) Modelleme sürecinde açığa çıkan bilişsel eylemleri tanılama becerisini kazandırması, (3) Ardından da bu epistemolojik düzeyde bağlanan BİD ve bilişsel modelleme sürecinin entegrasyonunun kazandırılması gerekmektedir. Bu becerilerin pekişmesi için ise döngüsel olarak son modülün tekrar edilmesine karar verilmiştir. Bu doğrultuda ilk modülde BİD tanımı ve öneminden bahsedilmiştir. Şekil 3 (a) ve (b)’de görülen Piaget’nin Soyutlama Teorisine yönelik bir kavram haritası, BİD bileşenlerine yönelik ppt sunumu (b) kullanılmış, bilgi notu çalışma yaprakları ile verilmiştir. Ardından günlük yaşam durumları ve matematik eğitiminden örnekler sunulmuş, katılımcının da örnek sunması teşvik edilmiştir. İkinci modülde bilişsel perspektifte matematiksel modellemenin (MM) basamakları, odağı ve örnekleri sunulmuştur. Borromeo-Ferri’nin (2006) bilişsel perspektifte MM ve alan yazından MM problem örnekleri için ppt sunumu şekil 3 (c) kullanılmıştır. Yine bu sürece yönelik bilgi notu çalışma yaprağı katılımcıya sunulmuştur. Üçüncü modül MM ve BİD entegrasyonu için saman balyası problemi (Borromeo-Ferri, 2007) çözülmüş ve bilişsel süreçler BİD ile entegre edilmiştir. Teorik bilginin daha yoğun olduğu ilk üç modül bitiminde matematiksel modelleme ve BİD bileşenleri arasındaki entegrasyonu içselleştirilmesi için 3 uygulama daha yapılmıştır. Bu uygulamaların temelinde araştırmacı tarafından verilen görsel ile ilişkili MM problemi kurma, çözme, açığa

çıkan bilişsel süreçleri entegre üstüne kurulmuştur. Katılımcıların bu mesleki gelişim kursu ile MM ile açığa çıkan bilişsel süreçleri BİD ile entegre edebilecek bilgi, beceri ve yeterliğe ulaşmasıdır.

Şekil 3

Mesleki Gelişim Kursunun İlgili Modüllerinde Sunulan Öğretim Materyali Örnekleri



Katılımcı

Hazırlanan içeriğin uygunluğu için pilot uygulama yapılmıştır. Uygulama için katılımcı amaçlı örnekleme yöntemi ile belirlenmiştir. Öğretmenin matematiksel modelleme veya BİD hakkında bilgi sahibi, eğitime düzenli katılmayı kabul etmesi ve gönüllü olmasıdır. Öğretmen hakkında ayrıntılı bilgi Tablo 1' de verilmiştir.

Tablo 1

Katılımcı Özellikleri

Katılımcı İsmi	Branşı	Mesleki Deneyimi	Eğitim Durumu	Matematiksel Modelleme Deneyimi	BİD Bilgisi
MTI	Ortaokul Matematik Öğretmeni	9 yıl	Yüksek Lisans Mezunu	Matematiksel modelleme konusunda deneyimli	Var

Veri Toplama Araçları

Veriler, katılımcının matematiksel modelleme problemi çözümünde ortaya çıkan bilişsel eylemler ile BİD bileşenleri entegrasyonunu yazabileceği bir tablo oluşturulmuştur. Bu tablo "Bilişsel Modelleme

Basamakları ve BİD Bileşen Entegrasyon Tablosu” olarak adlandırılmıştır. Tüm süreç boyunca alınan video kayıtları ve eğitim süreci sonrası görüşme kaydı ile toplanmıştır.

BİD Bileşen Entegrasyon Tablosu

Katılımcının aldığı eğitimin son oturumunda ve ilişkilendirme oturumları boyunca bilişsel modelleme basamakları ve BİD bileşenlerini nasıl entegre ettiklerini değerlendirmek amacıyla geliştirilmiştir. “Bilişsel Modelleme Basamakları ve BİD Bileşen Entegrasyon Tablosu” aşağıda Ek 1’de sunulmuştur.

Video ve Ses Kayıtları

Katılımcıya video kayıtlarının alınması hususunda görüşleri sorulmuş ve onayları alındıktan sonra kaydedilmiştir. Video kayıtları, veri kaybının önlenmesi ve sürecin yeniden incelenip analiz edilmesi amacıyla kullanılmıştır.

Görüşme

Eğitim sürecinin sonunda katılımcının eğitimin etkililiği üstüne görüşlerini almak için yapılandırılmamış görüşme gerçekleştirilmiştir. Süreç kayda alınmış ve bulgularda gerekli görülen noktalarda sunulmuştur.

Veri Analizi

Araştırma sürecinde elde edilen veriler, Borromeo Ferri’nin (2007) bilişsel modelleme döngüsü kuramsal çerçeve ile BİD bileşenleri dikkate alınarak analiz edilmiştir. Araştırmada bilişsel modelleme basamakları ve BİD bileşenlerini ilişkilendirme sürecinde elde edilen verilerin betimsel analizi yapılmıştır. Araştırmanın birinci bölümünde belirtilen anahtar kelimeler ile arama yapılmış, 276 adet makaleye ulaşılmıştır. Bu makaleler incelenmiş, BİD bileşenlerini matematik eğitimine entegre eden çalışmalar araştırma kapsamına alınmıştır.

Araştırmanın ikinci aşamasının veri analizinde ise yapılan örnek inceleme verilmiştir. Tablo 2’de BİD bileşen Entegrasyon Tablosunun örnek bir satırına yönelik katılımcı yanıtı verilmiştir. Bu örnek bulgular bölümünde sunulan Uygulama 1- AVM problemi ile ilgilidir. Katılımcı AVM’nin yüksekliğinin modelini oluşturmak hedefiyle problemi çözmeye başlar. Ardından AVM görselini inceler. “*Problemi çözmek için palmiyeden faydalanabileceği düşünüldü.*” ifadesini yazdığı bölüm incelendiğinde MM problemine yönelik bilişsel süreçlerini doğru ifade etmiştir. “*Palmiyelerden ikincisinin perspektiften dolayı daha kullanışlı olabileceği belirlendi.*” ifadesi problemi çözmek için günlük yaşamdan gerekli değişkeni belirleyip gereksiz değişkeni (birinci palmiyeyi) saf dışı bırakarak deneysel soyutlama yapmaktır. Katılımcı bunu fark etmemiştir.

Tablo 2.*Katılımcının Örnek Çözümü*

Bilişsel Modelleme Basamakları	Gerekçe	Bilgi İşlemsel Düşünme Bileşenleri	Gerekçe
Problemi Sadeleştirme	Problemi çözmek için palmiyeden faydalanılacağı düşünüldü. Palmiyelerden ikincisinin perspektiften dolayı daha kullanışlı olabileceği belirlendi. Palmiyenin ve yüksekliğin fotoğraf üzerindeki uzunlukları cetvelle bulundu.	Örüntü tanıma, veri	Problemin çözümü için palmiyenin uzunluğundan yararlanılması (veri) farklı olan bu uzunluğun kullanılması gerektiğinin belirlenmesi (örüntü tanıma)

Bununla birlikte çalışma yaprağının hazırlanmasında, çalışma yapraklarından ve entegrasyon tablolarından elde edilen verileri analiz ederken araştırma grubu içinde veri analizinin geçerliği ve güvenilirliği sağlanmıştır. Matematiksel modelleme döngüsünde ortaya çıkan BİD bileşenlerin uygunluğu kodlanırken birinci araştırmacı ile matematik eğitimi alan uzmanından da verilerin %50'sini analiz etmesi istenmiş ve uyum yüzdesi %90 olarak hesaplanmıştır. Bu çalışmada, araştırmacılar çalışma kağıtlarını, entegrasyon tabloları ve video kayıtları ile çoklu veri toplama kaynakları kullanılarak çeşitleme yapılmıştır. Araştırmada katılımcının kimliklerini ortaya çıkaracak ifadeler kullanılmamış, takma isimler kullanılmıştır. Araştırmada teyit edilebilirliğin sağlanması adına uygulama sürecinde ve analiz süreçlerinde katılımcının ifade etmeye çalıştıkları durumlar anlaşılamadığı durumlarda katılımcının görüşüne başvurulmuştur. Ayrıca tutarlılığı sağlamak için katılımcı söylemlerine yer verilmiştir. Araştırmada amaçlı örnekleme yöntemi kullanılmış, maksimum yanıt çeşitliliği sağlamak adına matematiksel modelleme ve BİD hakkında bilgisi olan bir öğretmen belirlenmiştir. Ayrıca tutarlılığı sağlamak için video ve ses kayıtları alınmıştır. Mevcut çalışmada ilk yazar olan araştırmacı, eğitim içeriklerinin ve ders tasarımlarının oluşturulması, araştırmadaki katılımcının seçilmesi ve uygulama sürecinin yürütülmesini sağlamıştır. Ayrıca araştırmacı eğitim sürecinde destekleyici müdahalelerini süreç ilerledikçe sistematik olarak

azaltılmıştır. Araştırmada diğer yazarlar eğitim içeriklerinin ve ders tasarımlarının oluşturulması, uygulamalar sonrası nesnel bir çerçevede değerlendirme yapılmasını sağlamıştır.

Bulgular

Bu bölümde araştırmanın amacı olan matematiksel modellemedeki bilişsel süreçler ile BİD bileşenlerinin nasıl bütünleştiğini ortaya çıkarmak için yapılan literatür taraması ve öğretmen eğitimi tasarımı sonuçları sunulmuştur. Literatür taraması ile matematik eğitimine entegre edilmiş BİD bileşenleri kavramsal çerçevesi belirlenmiştir. Bu çerçeve ile geliştirilen mesleki gelişim kursunda açığa çıkan bilişsel eylem ve BİD bileşenleri bulguları bulunmaktadır. Bu kursta bilişsel süreçleri açığa çıkarmak için matematiksel modelleme problemleri kullanılmış ve katılımcının bu problemlere geliştirdiği çözümlere yer verilmiştir.

BİD Bileşenleri ve Matematik Eğitimi Entegrasyonu

BİD bileşenlerini matematik eğitimine entegre eden çalışmalar, Tablo 3'te verilmiştir.

Tablo 3

BİD Bileşenlerini Matematik Eğitimine Entegre Eden Çalışmalar

	Veri Analizi	Ayrıştırma	Soyutlama	Algoritma Tasarımı	Örüntü tanıma	Hata avıklama	Genelleme	Otomasyon	Parelelleştirme	Modelleme	Simülasyon	Analiz
Yadav ve Chakraborty, 2023												
Leonard vd., 2023												
Mumcu vd., 2023												
Abdul Hanid vd., 2022												
Rich vd., 2022												
Wang vd., 2022												
Shumway vd., 2021												
Ng ve Cui, 2020												
Valovičova vd., 2020												
Pires vd., 2019												
Pei vd., 2018												
Sinclair ve Patterson, 2018												
Benton vd., 2017												
Costa vd., 2017												
Hsu ve Hu, 2017												
Sung vd., 2017												

Tablo 3 incelendiğinde BİD bileşenlerinden *ayrıştırma*, *algoritma tasarımı* ve soyutlamanın matematik eğitimi çalışmalarında daha fazla ele alındığı görülmektedir. Ardından *örüntü tanıma*, *hata ayıklama*, *veri işleme* ve *genelleme* bileşenlerine yer verildiği görülmektedir. Örneğin; Mumcu vd. (2023) çalışmalarında öğretmenlerin 5E öğrenme modeline göre tasarladıkları bütünleşik STEM eğitimi ders planında ayrıştırmayı şu şekilde kullanmışlardır: "Yangın algılama sistemi, çeşitli alt sorunlara ayrılmıştır: Sensörlerin ölçüm yapması, verilerin işlenmesi ve bir yangın durumu algılandığında SMS gönderme. Her adım ayrı bir problem olarak ele alınarak çözülmüştür."

Mesleki Gelişim Eğitimi Bilişsel Eylemleri İle BİD Bileşenleri Entegrasyonu

Literatür taraması sonunda oluşturulan mesleki gelişim kursunda 3 modül uygulanmıştır. Modüller yöntem kısmında ayrıntılı bir şekilde anlatılmıştır. Bu modüllerden üçüncüsü; BİD ve MM entegre üstüne kurulmuş bir modüldür. Bu modülde Borromeo-Ferri, saman balyası problemi verilmiştir. Katılımcıya ait çözüm ise Şekil 4'te sunulmuştur. Ardından katılımcıdan problemi çözmesi ve modelleme süreçlerini BİD bileşenleri tablosuna yazması beklenmiştir. Katılımcı problemi çözerken öncelikle saman balyalarının yarıçapı için görseldeki kadının üst bacak boyunu belirlemiştir. Bu seçimin doğru hesaplama sağlamayacağı kanısına varıp kol uzunluğu ile devam etmeye karar vermiştir. Katılımcının matematiksel çözümü incelendiğinde saman balyasının uzunluğunu bulmaya yönelik bir çözüm geliştirdiği görülmektedir. Problem çözme sürecine yönelik problemi anlama aşamasında "*saman balyası için değer belirleme; deneysel soyutlamadır. Kadının kol uzunluğunu kullanılmasına karar vermek ise hata ayıklama*", problemi sadeleştirme aşaması için "*Problemi çözmek için daha basit hale getirme; ayrıştırmadır, "Matematiksel olarak çalışmak için yarıçaptan ilerlemek; derin soyutlamadır"* yanıtını vermiştir. Bu yanıtlar incelendiğinde ayrıştırma bileşenine yönelik hatalı yanıt verdiği görülmüştür.

Şekil 4

Modül 3-Katılımcının Çözümü



Yukarıdaki şekilde en alt sırada 5 saman balyası bulunmaktadır. Bir üst sıraya geçildiğinde her defasında bir saman balyası eksilmektedir. En üstte bir saman balyası kaldığına göre tüm yığınım yüksekliği ne kadardır? En iyi tahmininizi yapınız ve neden o sayıyı tahmin ettiğinizi matematiksel işlemlerle açıklayıp düşüncelerinizi nedenleriyle ayrıntılı yazınız.

$$\begin{aligned}
 h^2 + (4r)^2 &= (8r)^2 \\
 h^2 + 16r^2 &= 64r^2 \\
 h^2 &= 48r^2 \\
 h &= \sqrt{48} r \\
 h &= 4\sqrt{3} r \\
 4\sqrt{3} r &< 13 < 4\sqrt{3} r \\
 4\sqrt{3} r &= \frac{29}{13} \approx 2.23 \\
 r &\rightarrow \text{kol uzunluğu (cm)} \rightarrow \text{orta balya, yarıçapı } = 4\sqrt{3} r \\
 \text{Bir balyanın kol uzunluğu} &= 4\sqrt{3} r \approx 2.23 \text{ m} \\
 4\sqrt{3} r &\rightarrow \frac{29}{13} \cdot 65 = 75 \\
 4\sqrt{3} r &= 75 \text{ cm} \\
 &\text{Oranlanabilir}
 \end{aligned}$$

Modül sonunda ayrıştırma olarak tanımladığı bilişsel eylem katılımcıya görüşme esnasında yeniden sorulmuştur. *“Burada hatalı bir cevap vermişim. Ayrıştırma değil ancak bilişsel eylemleri tanılamak zor”* demiştir. Ayrıştırma, problemi çözerken parçalara ayırıp çözümü kolaylaştırır. Ancak katılımcı *“problemi daha basit hale getirme”* olarak beyan etmiştir. Bu durum sorunun gerekli değişkenlerini seçip diğer değişkenlerden arındırmıştır. Bu durum deneysel soyutlamadır. Bu aşamada modelleme problemi çözmede zorluk yaşamamış, ancak bilişsel süreçlerini ifade etmekte zorlanmıştır.

Modüller bitince uygulamalar başlamıştır. Bu uygulamalardan birincisinde katılımcıya bir AVM görseli verilmiş MM problemi kurması ve çözmesi istenmiştir. Çözüm süreci şekilde 5’te verilmiştir. Katılımcı görselde verilen AVM’nin yüksekliğinin modelini oluşturmak istemiştir. Bunun için görselde görünen palmyenin gerçek boyu ve ekrandan ölçülen boyu arasındaki oranı AVM’nin gerçek boyunu hesaplamada kullanmıştır. Ardından modelleme sürecinde açığa çıkan bilişsel süreçleri ifade etmesi beklenmiştir. Katılımcı problemi anlama aşamasında *“Fotoğrafın farklı ayrıntılarının parçalanarak düşünülmesi; ayrıştırmadır”*, problemin sadeleştirilmesi aşamasında *“Problemin çözümü için kullanılacak verilerin toplanması, palmye uzunluklarının araştırılması; veri işlemedir”*, matematiksel çalışma basamağında *“Sıralı matematiksel işlemlerin yapılması; algoritmadır”*, MM problemin yorumlama basamağında *“Gerçek dışı çıkan değerler olursa varsayımlara geri dönülmesi; hata ayıklamadır”* yanıtını vermiştir. Katılımcı bu oturumda ayrıştırma bileşenini yönetilebilir parçalara ayırma olarak yorumlamıştır. Hatta sonuçlarında gerçek dışı bir sonuç elde etmemiştir. Buna rağmen *“gerçek dışı değer bulunursa bu hata ayıklamadır”* demiştir. Bu durum uygulama 1 de AVM nin yüksekliğini hesaplamayı tercih eden katılımcı bilişsel süreçlerini ifade etmekle ilgili deneyim kazandığını göstermektedir.

Şekil 5**Uygulama 1 İçin Katılımcı Yanıtları**

$$P_{\text{katıncı}} = 4,42 \text{ cm}^2 \quad \text{yükseklik} = 8,26 \text{ m}$$

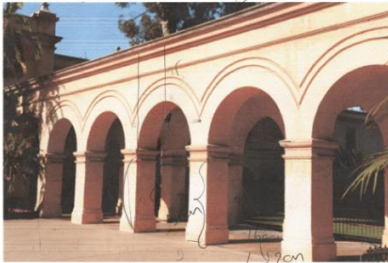
$$P_{\text{katıncı}} \text{ gerçek uzunluğu} = \text{En fazla } 17 \text{ m}$$

$$\begin{array}{cc} 17 \text{ m} & 4,42 \\ ? & 8,26 \end{array}$$

$$\text{yükseklik} = 31,76 \text{ m}$$

AVM'nin yüksekliği kaç m olabilir?

Uygulama 2 de katılımcı, verilen görsel için kullanılacak boyama miktarının modelini oluşturma problemi kurmuştur. Bu oturumda katılımcının bilişsel süreçleri ifade etme becerisinden belirgin bir gelişme görülmektedir. Bu gelişmeyi önceki oturumlarda bilişsel basamaklar için birer bilişsel süreç belirten katılımcı bu oturumda “sanki bir basamakta birden fazla BİD bileşeni var, yanılıyor muyum?” diye bir soru sormuştur. Yani katılımcı, bir modelleme problemi çözerken bilişte birden fazla bilişsel eylem gerçekleştiğini fark etmiştir. Ardından matematiksel çalışma aşaması için “Gerçek değer ile fotoğraftaki uzunluk arasındaki ilişkiyi kullanma, örüntü tanıma; matematiksel bir model oluşturma süreci ise soyutlamadır.” yanıtını vermiştir. Matematiksel çalışma basamağında katılımcının verdiği yanıtların zihninde yaptığı işlemleri adım adım tanımlama ve bu bilişsel eylemleri doğru ifade etmede gelişim gösterdiği duruma örnektir.

Şekil 6**Uygulama 2 Çözümü**

aydınlatma
sistemleri için

Temel varsayım: Korkuluklar arası mesafe en fazla 25 cm
olabilir. Yüksekliği ise 800-915 mm dir.

$$16 \text{ açıklık} \rightarrow 16 \cdot 25 \text{ cm} = 400 \text{ cm} = 4 \text{ m}$$

Varsayım



$$\text{Korkuluk açıklığı} = x \quad \text{Kolon} = k$$

$$\text{Kaç açıklık} = y \quad r = \text{daire yarıçapı}$$

$$\text{Kaç kolon var} = n$$

$$\text{Yapı yüksekliği} (h \cdot n \cdot x + h \cdot k) - \left(n \left[\frac{\pi r^2}{2} + 2r \cdot z \right] \right) = A$$

boyanacak alan

Yukarıdaki yapı boyanacaktır. Korkuluklar boyanacak alanı hesaplayalım.

Uygulama 3'te katılımcıdan kendi seçtiği bir görsele MM problemi kurması ve çözmesi istenmiştir. Katılımcı bu soruda da önceki oturumların etkisi ile Galata Kulesinin yüksekliğin hesaplamak istemiştir. Bu oturumda katılımcı matematikleştirme aşamasında “En yakın ve en uzaktaki yolun genişliği arasındaki oran bulunarak perspektifin uzunluğa etkisinin belirlenmesi, derin soyutlamadır” yanıtını vermiştir. Oran ve perspektif gibi iki matematiksel kavramın ilişkisinde yararlanan katılımcı, problemi çözerken derin soyutlamadan faydalandığını fark etmiştir. Katılımcının modelleme sürecinde açığa çıkan bilişsel eylemlerini doğru ve eksiksiz ifade edebilir noktaya geldiği gözlenmiştir.

Katılımcının MM problemi kurmada ve çözmede zorlanmamış ancak BİD bileşenlerini entegre etmekte zorlanmıştır. *“BİD bileşenlerini anlamak zor, sanırım eğitim içeriğinde daha çok örneğe ihtiyaç var”* demiştir. Modül 3 ve Uygulama 1’de araştırmacı desteği ile bilişsel süreçleri tanılayan katılımcı, Uygulama 3 te bilişsel süreçleri ve BİD bileşenlerini tek başına tanılamıştır. Katılımcı modül 3’te araştırmacının soruları ve rehberliğinde bilişsel eylemlerini BİD ile entegre etmektedir. Bu süreç Uygulama 1-2-3’te sistematik olarak azalmıştır. Uygulama 3’te kendi bilişsel süreçlerini ve BİD entegrasyonunu gerçekleştirmesi bu konuda gelişim gösterdiği kanısını oluşturmaktadır.

Şekil 7

Uygulama 3 Çözümü



6. problem

En baskı 0,9 = 1,94
Ortalama baskı 1,94 = 1,94 m

Yol genişliği 1,97 - yol genişliği 1,94 = 0,03 m

Yol genişliği 0,03 m = 3,80 m

En baskı 0,9 = 5,52
5,52

Yol genişliği 0,03 = 0,178
0,178

Ortalama yol genişliği 1,97 → 3,80 m

Sorulara göre

0,22 = 3,80 m
3,42 ?

7 = 59,07 → Çizim 63 m

Katılımcının MM problemi çözme sürecinde fark ettiği ve örnek verdiği BİD bileşenleri Borromeo-Ferri (2006) bilişsel modelleme basamaklarına göre Tablo 4'te gösterilmiştir.

Tablo 4*Uygulamalar Sürecinde Açığa Çıkan BİD Bileşenleri*

	Deneysel Soyutlama	Yansıtıcı Soyutlama	Ayrıştırma	Algoritma Tasarımı	Örüntü Tanıma	Genelleme	Hata Ayıklama	Veri İşleme
Problemi Anlama Sadeleştirme	■	■	■	■	■	■	■	■
Matematikleştirme	■	■	■	■	■	■	■	■
Matematiksel Çalışma Yorumlama	■	■	■	■	■	■	■	■
Doğrulama	■	■	■	■	■	■	■	■

Tablo dikey ve yatay eksende analiz edildiğinde;

- (a) Dikey eksende: soyutlama, ayrıştırma, veri işlemenin en yoğun gözlenen bileşenler, algoritma tasarımı, örüntü tanıma ve hata ayıklamanın yoğun gözlenen bileşenler olduğu görülmüştür. Bunun yanında genelleme bileşenin de 2 basamakta açığa çıkmıştır.
- (b) Yatay eksende: matematikleştirme ve matematiksel çalışma en yoğun bilgiyi işleme süreçleri içerdiği; problemi anlama, sadeleştirme ve yorumlamanın yoğun bilgiyi işleme süreçleri içerdiği; doğrulama basamağında ise genelleme süreçlerinin açığa çıkmıştır.

Tablo 3 te alan yazında BİD in çeşitli bileşenlerini kullanan araştırmalar sunulmuştur. Bu araştırmalarda yoğunlukla soyutlama, algoritmik düşünme ve ayrıştırma bileşenlerinin; otomasyon, paralelleştirme gibi teknolojik araç odaklı bileşenlerin daha az kullanıldığı görülmüştür. Tablo 4'te ise yapılan mesleki gelişim kursu sürecinde matematiksel modelleme problemi çözen bir katılımcının modelleme problemi çözme sürecinde açığa çıkan bileşenler gösterilmiştir. Tablo 4'te dikkat çekici bir unsur da deneysel soyutlamanın modelleme tabiriyle gerçek dünya bölümünde, yansıtıcı soyutlamanın ise matematik dünyası bölümünde açığa çıkmasıdır. Bu durum BİD ile matematiksel düşünmenin bağı anlamında Şekil 8'de görünen ayrım ile ifade edilebilir.

Bu iki tablo karşılaştırıldığında alan yazında kullanılan çerçeve bileşenler (soyutlama, ayrıştırma, algoritma tasarımı, örüntü tanıma,

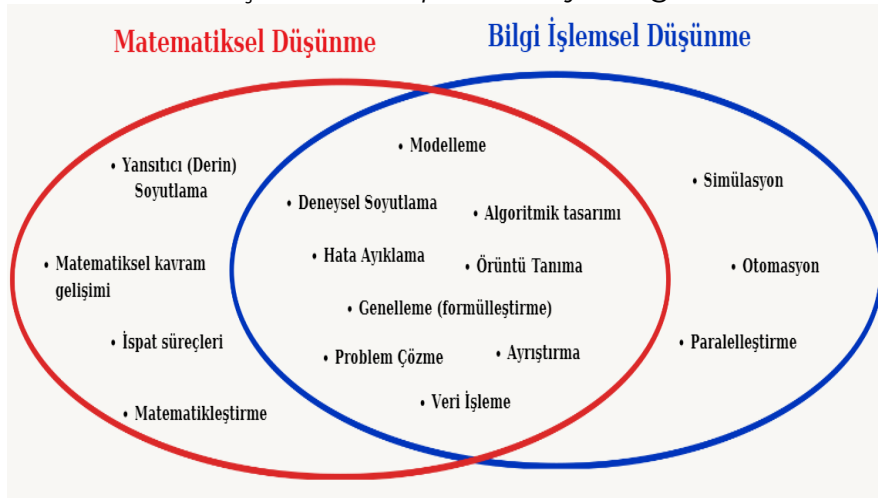
genelleme) ile çalışmada kullanılan bileşenler arasında genel olarak tutarlılık bulunmuştur. Bununla birlikte veri işleme ve hata ayıklama bileşenleri Tablo 3'te belirtilen araştırmalarda kullanımı az olsa da, bu çalışmanın bulgularında sıklıkla açığa çıkan bileşenlerdendir.

Sonuç, Tartışma ve Öneriler

Bu çalışma matematiksel düşünme ile BİD arasındaki epistemolojik bağı açığa çıkarmak amacıyla tasarlanmıştır. Bu çalışmada matematiksel düşünme ile BİD arasındaki bağı açığa çıkarmada bilişsel perspektifte matematiksel modelleme sürecinden faydalanılmıştır. Modelleme faaliyetlerinin matematiksel düşünme, öğrenme ve problem çözme için verimli olduğu bilinmektedir (Lesh ve Lehrer, 2003). Bu çalışmada modelleme faaliyetleri doğrultusunda matematiksel düşünme ile BİD bileşenlerin örtüştüğü bileşenler (deneysel soyutlama, ayrıştırma, algoritma tasarımı, veri işleme, hata ayıklama, örüntü tanıma ve genelleme) ile farklılaşan bileşen (yansıtıcı soyutlama) açığa çıkmıştır. Soyutlama bileşeninin Piaget'nin soyutlama bakışı ile ele alınması MM problemi çözme süreci gibi yoğun bilişsel süreçlerin anlamlandırılmasına katkı sunacağı düşünülmektedir.

Şekil 8

BİD ile Matematiksel Düşünmenin Epistemolojik Bağı



Bu çalışmada matematiksel düşünme ile BİD'in epistemolojik bağlantısı irdelenmiştir. Çalışmadan elde edilen bulgular doğrultusunda epistemolojik bağ Şekil 8'de belirtildiği gibidir. Bu bulgu Sneider vd. (2014)'in bulguları ile benzer ve farklı yönler içermektedir. Oluşturulan diyagram düşünme süreçleri bağlamında ele alındığı için ilgili çalışmaya eleştirel bir bakışla iyileştirme olduğu düşünülmektedir.

Kalelioğlu vd. (2016) yaptıkları çalışmalarında Polya'nın problem çözme aşamalarıyla BİD bileşenlerini ilişkilendirmiş ve problem çözme

basamakları ile kimi BİD bileşenleri eşleştirilmiştir (örneğin; ayrıştırma ve soyutlama bileşenlerinin sadece problemin anlama basamağında bulunması). Tablodan 4'ten yola çıkarak bir modelleme basamağında birden fazla BİD bileşenin açığa çıkmaktadır. Bir BİD bileşenin tek basamak ile ilişkilendirilemeyeceği görülmektedir (örneğin yansıtıcı soyutlama ve ayrıştırma tüm modelleme basamaklarında gözlenmektedir). Aktaş'ın (2022) çalışmasında teknoloji destekleme modelleme süreçlerinde birden fazla BİD bileşeninin açığa çıktığı görülmüştür. Bu da çalışmamız ile benzer bir bulgudur.

Bu çalışmadan yola çıkarak BİD bileşenlerinden soyutlamanın matematik eğitime entegrasyonunda Piaget'nin soyutlama teorisinin süreci anlamlandırmaya katkı sunduğu bulgusuna ulaşılmıştır. Bu bağlamda hazırlanacak bir mesleki gelişim kursunun BİD entegrasyonu için katkı sunacağı düşünülmektedir.

Alan yazında ve bu araştırmada açığa çıkan bileşenler, farklı bağlamlardaki test edilerek yeniden araştırılabilir.

Öğretmenlerin hizmet öncesi ve sonrası eğitim süreçlerine BİD ve MM'yi temel alan eğitimlerin eklenmesi, eğitim süreçlerinde matematiksel düşünmenin ve BİD'in gelişimine katkı sunacaktır.

Etik Kurul İzin Bilgisi: Bu araştırma, Dokuz Eylül Üniversitesi Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Sosyal ve Beşeri Bilimler kurulunun 21/11/2023 tarihli E-87347630-659-806813 sayılı kararı ile alınan izinle yürütülmüştür.

Yazar Çıkar Çatışması Bilgisi: Yazarların beyan edeceği bir çıkar çatışması yoktur.

Yazar Katkısı: Araştırmanın birinci yazarı tüm süreçlerde rol almış, Araştırmada diğer yazarlar eğitim içeriklerinin ve ders tasarımlarının oluşturulması, uygulamalar sonrası nesnel bir çerçevede değerlendirme yapılması rolünde bulunmuşlardır.

Kaynakça

- Aktaş, S. E. (2022). *Matematik öğretmeni adaylarının teknoloji destekli matematiksel modelleme sürecindeki bilgi işlemsel düşünmeye ilişkin zihinsel eylemlerinin incelenmesi* [Yüksek lisans tezi, Pamukkale Üniversitesi]. Ulusal Tez Merkezi.
- Anđić, B., Mumcu, F., Tejera, M., Schmidthaler, E., & Lavicza, Z. (2023). Unplugging math: Integrating computational thinking into mathematics education through poly-universe. In M. De Rossi, L. Hadjileontiadou, & A. Ottaviano (Eds.), *Proceedings of the Conference on Smart Learning Ecosystems and Regional Development* (pp. 247–263). Springer. https://doi.org/10.1007/978-981-99-5540-4_15

- Barcelos, T. S., & Silveira, I. F. (2012). Teaching computational thinking in initial series: An analysis of the confluence among mathematics and computer sciences in elementary education and its implications for higher education. In *Proceedings of the XXXVIII Conferencia Latinoamericana en Informática (CLEI)* (pp. 1–8). IEEE.
- Barefoot. (2014). Computational thinking. *Barefoot*.<https://barefootcas.org.uk/barefoot-primary-computing-resources/concepts/computational-thinking/>
- Barr, D., Harrison, J., & Conery, L. (2011). Computational thinking: A digital age skill for everyone. *Learning & Leading with Technology*, 38(6), 20-23.
- Blum, W., & Niss, M. (1989). Mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects: State, trends, and issues in mathematics instruction. In W. Blum, M. Niss, & I. Huntley (Eds.), *Modelling, applications and applied problem solving* (pp. 1–21). Ellis Horwood.
- Borromeo Ferri, R. (2010). On the influence of mathematical thinking styles on learners' modeling behavior. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 31(1), 99-118.
- Bråting, K., & Kilhamn, C. (2021). Exploring the intersection of algebraic and computational thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 23(2), 170–185.
- Brennan, K., & Resnick, M. (2012). New frameworks for studying and assessing the development of computational thinking. *Proceedings of the 2012 Annual Meeting of the American Educational Research Association* (Vol 1, p. 25). AERA.
- Cansu, F. K. ve Cansu, S. K. (2019). An overview of computational thinking. *International Journal of Computer Science Education in Schools*, 3(1), 17-30.
- Çetin, I., & Dubinsky, E. (2017). Reflective abstraction in computational thinking. *The Journal of Mathematical Behavior*, 47, 70–80.
- CSTA ve ISTE. (2011). Computational thinking in K–12 education leadership toolkit.<http://csta.acm.org/Curriculum/sub/CurrFiles/471.11CTLeadershipToolkit-SP-vF.pdf>
- Cui, Z., & Ng, O. L. (2021). The interplay between mathematical and computational thinking in primary school students' mathematical problem-solving within a programming environment. *Journal of Educational Computing Research*, 59(5), 988-1012.
- Çelik, D. (2016). Matematiksel düşünme. E. Bingölbalı, S. Arslan ve I. Zembat (Ed.), *Matematik eğitiminde teoriler* (ss. 17–42) içinde. Pegem Akademi.
- Deniz, G. (2020). *Programlama eğitiminde tinkercad kullanımının öğrencilerin bilgi işlemsel düşünme becerisine ve algılarına etkisi* [Yüksek lisans tezi, Gazi Üniversitesi]. Ulusal Tez Merkezi.

- Denning, P. J. (2009). The profession of IT Beyond computational thinking. *Communications of the ACM*, 52(6), 28-30.
- Doruk, K. B. ve Umay, A. (2011). Matematikçi günlük yaşama transfer etmede matematiksel modellemenin etkisi. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 41(41), 124-135.
- Dreyfus, T. (2002). Advanced mathematical thinking processes. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (Vol 11, pp. 25-41). Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_2
- Dubinsky, E. (1991). Constructive aspects of reflective abstraction in advanced mathematics. In A. Hirst & K. Hirst (Eds.), *Epistemological foundations of mathematical experience* (pp. 160-187). Springer-Verlag.
- Ferri, R. B. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM*, 38, 86-95.
- Ferri, R. B. (2007). Modelling problems from a cognitive perspective. In *Mathematical Modelling* (pp. 260-270). Woodhead Publishing.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. D. Reidel Publishing Company.
- Furber, S. (2012). *Shut down or restart? The way forward for computing in UK schools*. The Royal Society. <https://royalsociety.org/education/policy/computing-in-schools/report/>
- Gleasant, C., & Kim, C. (2020). Pre-service teacher's use of block-based programming and computational thinking to teach elementary mathematics. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 6, 52-90.
- Gray, E., & Tall, D. (1991). Duality, ambiguity, and flexibility in successful mathematical thinking. In *Proceedings of the 18th Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 72-79). PME.
- Güç, F. A. ve Baki, A. (2016). Matematiksel Modelleme Yeterliklerini Geliştirme ve Değerlendirme Yaklaşımlarının Sınıflandırılması 1. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, 7(3), 621.
- Gülbahar, Y. (2017). Bilgi işlemsel düşünme ve programlama konusunda değişim ve dönüşümler. Y. Gülbahar (Ed.), *Bilgi işlemsel düşünmeden programlamaya* (ss. 395-410) içinde. Pegem Akademi.
- Hemmendinger, D. (2010). A plea for modesty. *ACM Inroads*, 1(2), 4-7. <https://doi.org/10.1145/1805724.1805725>
- Hershkowitz, R., Schwarz, B. B., & Dreyfus, T. (2001). Abstraction in context: Epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(2), 195-222.
- Hıdıroğlu, Ç. N. ve Güzel, E. B. (2013). Matematiksel modelleme sürecini açıklayan farklı yaklaşımlar. *Bartın Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*.
- Huang, W., Deng, Z., & Rongsheng, D. (2009). Programming courses teaching method for ability enhancement of computational thinking. In 2009

- International Association of Computer Science and Information Technology-Spring Conference* (pp. 182–185). IEEE.
- Humphreys, S. (2015). *Computational thinking: A guide for teachers*. Computing at School. Charlotte BCS: The Chartered Institute for IT.
- Isoda, M., & Katagiri, S. (2012). Introductory chapter: Problem solving approach to develop mathematical thinking. In M. Isoda & S. Katagiri (Eds.), *Mathematical thinking: How to develop it in the classroom* (pp. 1–28). World Scientific.
- ISTE (2016). Computational thinking teacher resources. https://csta.acm.org/Curriculum/sub/CurrFiles/472.11CTTeacherResources_2ed-SPvF.pdf.
- Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM*, 38(4), 302–310.
- Kalelioglu, F., Gulbahar, Y. ve Kukul, V. (2016). A framework for computational thinking based on a systematic research review. *Baltic Journal of Modern Computing*, 4(3), 583–596.
- Kallia, M., van Borkulo, S. P., Drijvers, P., Barendsen, E., & Tolboom, J. (2021). Characterising computational thinking in mathematics education: a literature-informed Delphi study. *Research in Mathematics Education*, 23(2), 159-187.
- Kaup, C. F. (2022). Mapping the relations between computational thinking and mathematics in terms of problem-solving. *Acta Didactica Norden*, 16(4), 9185.
- Kilhamn, C., Bråting, K., Helenius, O., & Mason, J. (2022). Variables in early algebra: exploring didactic potentials in programming activities. *ZDM–Mathematics Education*, 54(6), 1273-1288.
- Lesh, R., & Lehrer, R. (2003). Models and modeling perspectives on the development of students and teachers. *Mathematical Thinking And Learning*, 5(2-3), 109-129.
- Li, Y., Schoenfeld, A. H., diSessa, A. A., Graesser, A. C., Benson, L. C., English, L. D., & Duschl, R. A. (2020). Computational thinking is more about thinking than computing. *Journal for STEM Education Research*, 3, 1-18.
- Liu, J., & Wang, L. (2010). Notice of retraction: Computational thinking in discrete mathematics. In *2010 Second International Workshop on Education Technology and Computer Science* (Vol. 1, pp. 413–416). IEEE
- Lu, J. J., & Fletcher, G. H. (2009). Thinking about computational thinking. In *Proceedings of the 40th ACM Technical Symposium on Computer Science Education* (pp. 260–264). ACM.
- Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (2010). *Thinking mathematically* (2nd Edition). Pearson Education Limited.
- Mumcu, F., Bardakçı, S. ve Lavicza, Z. (2023). Reimagining STEM: Booming computer science education as a component of STEM education. In Z.

- Lavicza, I. F. Rahmadi, S. Arkün-Kocadere, & K. Fenyvesi (Eds.), *STEAM-BOX: Empowering educators to integrate transdisciplinary STEAM practices in schools* (pp. 72–92). Johannes Kepler Universität Linz. <https://doi.org/10.35011/9783903480032>
- Mumcu, F., Kidiman, E. ve Özdiñ, F. (2023). Integrating Computational Thinking into Mathematics Education through an Unplugged Computer Science Activity. *Journal of Pedagogical Research*, 7(2), 72-92.
- Piaget, J. (2001). In (R.L. Campell, Ed.) *Studies in reflecting abstraction* (1st ed.). Psychology Press. <https://doi.org/10.4324/9781315800509>
- Pólya, G. (1945). *How to solve it*, Princeton University Press.
- Román-González, M., Pérez-González, J. C., & Jiménez-Fernández, C. (2017). Which cognitive abilities underlie computational thinking? Criterion validity of the Computational Thinking Test. *Computers in Human Behavior*, 72, 678-691.
- Saritepeci, M. ve Durak, H. (2017). Analyzing the effect of block and robotic coding activities on computational thinking in programming education. In I. Koleva & G. Duman (Eds.), *Educational research and practice* (pp. 490–501). St. Kliment Ohridski University Press.
- Schoenfeld, A. H. (1982). *Measures of problem-solving performance and of problem-solving instruction*. *Journal for Research in Mathematics Education*, 13(1), 31-49.
- Selby, C., & Woollard, J. (2013). Computational thinking: The developing definition. In *Proceedings of the Special Interest Group on Computer Science Education (SIGCSE)*.
- Shute, V. J., Sun, C., & Asbell-Clarke, J. (2017). Demystifying computational thinking. *Educational Research Review*, 22, 142-158.
- Sneider, C., Stephenson, C., Schafer, B., & Flick, L. (2014). Exploring the science framework and NGSS: Computational thinking in the science classroom. *Science Scope*, 38(3), 10.
- Tall, D. (1995). Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking. In L. Meira & D. Carraher (Eds.), *Proceedings of the 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 1–61).
- Tall, D. (1999). Reflections on APOS theory in elementary and advanced mathematical thinking. In *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 148-155).
- Tekdal, M. (2021). Trends and development in research on computational thinking. *Education and Information Technologies*, 26(5), 6499-6529.
- Van Oers, B. (2001). Contextualisation for abstraction. *Cognitive Science Quarterly*, 1(3), 279-305.

- Wing, J. (2011). Research notebook: Computational thinking-What and why. *The Link Magazine*, 6, 20-23.
- Wing, J. M. (2006). Computational thinking. *Communications of the ACM*, 49(3), 33-35.
- Wing, J. M. (2008). Computational thinking and thinking about computing. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 366(1881), 3717-3725.
- Wing, J. M. (2014, January 10). Computational thinking benefits society. *40th Anniversary Blog Of Social Issues in Computing*. <http://socialissues.cs.toronto.edu/index.html%3Fp=279.html>
- Yadav, A., Mayfield, C., Zhou, N., Hambruch, S., & Korb, J. T. (2014). Computational thinking in elementary and secondary teacher education. *ACM Transactions on Computing Education (TOCE)*, 14(1), 1-16.
- Yeşildere, S. ve Türnüklü, E. B. (2008). İlköğretim sekizinci sınıf öğrencilerinin bilgi oluşturma süreçlerinin matematiksel güçlerine göre incelenmesi. *Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 21(2), 485-510.
- Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2008). Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri. Seçkin Yayınevi.
- Yıldız, B. (2017). Disiplinlerarası öğretim yaklaşımı: Bilgi işlemsel düşünme ve FeTeMM. Y. Gülbahar (Ed.), *Bilgi işlemsel düşünmeden programlamaya* (ss. 319-336) içinde. Pegem Akademi.
- Zembat, I. (2016). Piaget'ye göre soyutlama ve çeşitleri. E. Bingölbalı, S. Arslan, & I. Zembat (Ed.), *Matematik eğitiminde teoriler* (pp. 448-458) içinde. Pegem Akademi.



An Overview of the Epistemological Link between Mathematical Thinking and Computational Thinking from Theory to Practice

Behiye DİNÇER AKSOY¹, Berna CANTÜRK GÜNHAN², Filiz MUMCU³

Abstract

Mathematical thinking is critical to the maintenance of daily life and the development of science. This study examines the epistemological connection between mathematical and Computational Thinking (CT). Since CT involves the problem-solving process through thinking and computer science tools, it is thought to have an important relationship with mathematical thinking. In order to understand this relationship, mathematical modeling problems are addressed from a cognitive perspective in this study. Using a case study, a conceptual framework was developed by examining studies that attempt to integrate CT into mathematics education. In line with the framework, a professional development course was prepared and administered to a mathematics teacher. Subsequently, the relationship between the cognitive processes in the modeling process and the components of CT was examined. The study's findings revealed that (a) considering abstraction in the context of Piaget's abstraction theory is a more effective approach for understanding mathematical thinking, (b) more than one CT component can be identified at each stage of the modeling process, and no single component can be exclusively associated with a single stage, and (c) common and distinct thinking processes between mathematical thinking and CT were uncovered. These findings contribute to a more nuanced comprehension of the intricate interrelationships between mathematical thinking and cognitive flexibility.

Article Information

Research Article

Received

16/02/2024

Accepted

02/12/2024

Key words

Mathematical thinking,
Computational thinking,
Mathematical modeling

¹ Enstitute of Educational Science, Dokuz Eylul University, ORCID: 0000-0002-6452-6066, behiyedincer@gmail.com

² Department of Mathematics and Science Education, Dokuz Eylul University, ORCID: 0000-0002-9585-0811, berna.gunhan@deu.edu.tr

³ Department of Computer Education and Instructional Technology, Manisa Celal Bayar University, ORCID: 0000-0001-9371-6734, filizkuskaya@gmail.com, filiz.mumcu@cbu.edu.tr

Suggested Citation:

Dinçer Aksoy, B., Cantürk Günhan, B., & Mumcu, F. (2025). An overview of the epistemological link between mathematical thinking and computational thinking from theory to practice. *Pamukkale University Journal of Education [PUJE]*, 64, 123-149. <https://doi.org/10.9779/pauefd.1438401>

Introduction

As a fundamental science, mathematics is an integral part of nature and, therefore, of human daily life. There are different perspectives on mathematics and understanding this science. Two distinct perspectives exist regarding the definition of mathematics. One perspective defines mathematics as the understanding of mathematical facts and processes. The other perspective defines mathematics as a discipline that is similar to other sciences, with a focus on the discovery and understanding of patterns (Schoenfeld, 1982). These different definitions reflect perspectives on understanding mathematics and mathematical thinking. When these definitions are examined, it is evident that mathematical thinking is addressed from the perspectives of how mathematical concepts are formed (Dreyfus, 2002; Freudenthal, 1973; Tall, 1995) and the development of mathematical processes (Isoda & Katagiri, 2012; Mason et al., 2010; Polya, 1945; Schoenfeld, 1992) (Çelik, 2014; Isoda & Katagiri, 2012). In other words, it can be stated that how mathematics is defined also affects how mathematical thinking is defined. It is therefore crucial to consider the various perspectives on mathematical thinking.

Perspectives on Mathematical Thinking

The perspective that explains mathematical thinking as the construction of concepts focuses on how mathematical concepts are constructed in cognition, building on basic mathematical knowledge to form more advanced mathematical knowledge. This cognitive development process starts at an early age and progresses from concrete to abstract thinking. The cognitive construction and development of concepts have been addressed by researchers from different perspectives. For example, Freudenthal (1973) explained the development of mathematical thinking in terms of the development of mathematizing situations based on one's own experiences; Tall (1995) explained the development of the subject, which he defined as the objectification of mathematical knowledge in the mind, that is, its encapsulation in the mind by concretizing it and putting it into action; Dreyfus (2002) explained the development of representation and abstraction processes of mathematical knowledge. These researchers focus on mathematical thinking and the process of transition from basic mathematical knowledge to more advanced mathematical concepts. The transition to advanced mathematical thinking in this process is also described as "university mathematics" or graduate mathematics (Tall, 1991; Dreyfus, 2002).

The other perspective that focuses on mathematical processes examines how mathematical thinking tools and mathematical thinking develop (Çelik, 2014). Mason et al. (2010) posit that mathematical thinking can be understood as problem-solving that involves the application of two fundamental cognitive operations: the processes of "specialization and generalization" and "conjecture and

persuasion"; Schoenfeld (1992) views mathematical thinking as the development of mathematical perspective through the processes of recognizing and mathematizing patterns and abstraction; Isoda and Katagiri (2012) see mathematical thinking as problem-solving with the assistance of mathematical content (concepts, skills, etc.) and mathematical processes (mathematical thinking, valuing, and idea generation, etc.). From this perspective, mathematical thinking is defined as a process of problem-solving that employs the utilization of specific mathematical techniques and competencies.

It can be argued that the common thread running through these perspectives on the development of mathematical thinking is the emphasis on the formation and abstraction of mathematical knowledge (Dreyfus, 2002; Freudenthal, 1973; Schoenfeld, 1992; Tall, 1991). Knowledge in the mind is abstracted from unnecessary details and objectified, becoming a tool in the formation of new mathematical knowledge. It is therefore anticipated that the level of complexity associated with mathematical knowledge will increase as a consequence of the application of abstraction (Tall, 1995). For example, working with the concept of fractions requires the abstraction of knowledge and skills such as counting, multiple representation, four operations, and proportional reasoning. This process entails the objectification of knowledge within the mind, its subsequent encapsulation, and its utilization in the formation of new, requisite knowledge. With the help of the capsules formed in cognition, complex problems related to fractions can be solved. As can be understood from the fraction example, the process of abstraction of mathematical knowledge is quite complex. For this reason, mathematicians and mathematics educators have tried to clarify the abstraction process for many years.

The idea of abstraction has been influencing philosophical and psychological studies on human thinking since the works of Aristotle (Yeşildere & Türnüklü, 2008). The assumptions about the idea of abstraction carried from Aristotle to the 21st century can be summarised as follows (Van Oers, 2001):

- It is formed by the classification and representation of objects.
- It is formed in the mind, i.e. it is independent of environmental conditions.
- It is a more advanced and distinctive feature on the development of thought.

Given these assumptions, abstraction occurs at higher levels of the thinking process, independent of time, space and environment. Current research emphasizes that abstraction occurs in two ways:

- it develops in cognition and is explained from a cognitive perspective (Dubinsky 1991; Gray and Tall 1991; Piaget 2001),

- the social environment, social interaction and the conditions surrounding the environment will be realized through a sociocultural perspective (Herskowitz et al., 2001; Van Overs, 2001).

Among the researchers who explain the abstraction process from a cognitive perspective, Piaget's idea of "abstraction" can be seen as the most basic idea that explains the formation of a mathematical concept in the mind (Zembat, 2016). Piaget explained how cognitive structures are formed in young age groups (Tall, 1999) with the concepts of empirical and reflective abstraction. Piaget described reflective abstraction as (1) the transition from a lower cognitive level to a higher level (objectification at the end of the process) and (2) the reorganization of the higher-level cognitive structure (Tall, 1999). To summarize these studies, the formation of knowledge and the process of abstraction take place in cognition. The formation of higher-level knowledge is sequential with the formation of previous knowledge. These hierarchical units of knowledge can be transformed into each other, and it can be pointed out that they benefit from each other.

Abstraction is as important for computational thinking as it is for mathematical thinking. In computer science and mathematics, the most important and most common meaning of abstraction of a concept is extraction: the idea of taking into account the common properties of various instances and creating a structure or category that has all of these properties. In this respect, it is very close to Piaget's concept of empirical abstraction, and extraction is not a strong abstraction mechanism, even though most mathematical concepts are thought to be constructed by the extraction of unnecessary variables (Çetin & Dubinsky, 2017). Consequently, there is a need for concepts that can explain strong abstraction mechanisms. Reflective abstraction gains importance in explaining strong abstraction mechanisms. Piaget (1985) pointed out that reflective abstraction is the basis of all development in mathematical thinking. Empirical abstraction is based on the directly observable properties of objects or environments, whereas reflective abstraction is based on the properties of the individual's own actions (grouping, pair segmentation, etc.) (Zembat, 2016). This is the most fundamental distinction in the concept of abstraction for the two sciences.

Perspectives on Computational Thinking

The widely accepted definition of CT is "problem-solving, system design, and understanding human behavior" (Wing, 2011, p. 20). The definition proposed by the Computer Science Teachers Association and the International Society for Technology in Education (CSTA and ISTE, 2011), which expresses CT as a problem-solving process, is as follows:

- (a) Formulate problems (in such a way that they can be solved with computers and other tools),
- (b) Organize and analyze data,
- (c) Represent data through abstractions (such as models and simulations),
- (d) Automate solutions with the help of algorithmic thinking,
- (e) Identify, analyze, and implement possible solutions,
- (f) Refer to this process as generalization and application to different problems.

ISTE (2016) emphasizes that students should have CT skills. Developing students' CT skills should be used to solve problems, formulate, and develop models, facilitate decision-making, and create automated solutions. When the perspectives on CT are examined, it is seen that they focus on different points. For example, Román-González et al. (2017)

- (1) general definitions (Wing, 2006),
- (2) operational definitions (CSTA and ISTE, 2011), and
- (3) educational and curricular definitions (Barefoot, 2014; Brennan & Resnick, 2012) as three categories.

In addition to these definitions, Selby and Woollard (2013), who analyzed articles published between 2006 and 2013, defined CT as "an activity related to, but not limited to, problem-solving, usually product oriented." According to Wing (2006), CT, which is based on the power and limits of information processing processes, uses intuitive reasoning while finding a solution to a system or problem with the mental tools of computer science. Other elements of CT that Wing (2006) draws attention to can be listed as follows, CT:

- requires thinking at multiple levels of abstraction.
- is a basic skill based on thinking processes, not rote learning.
- is a way for people to solve problems instead of enabling people to think like computers with their intelligence and creativity.
- benefits from mathematical thinking by its very nature.
- is for everyone and everywhere.
- involves using big data to speed up information processing.
- contributes to other disciplines such as biology, economics, nanocomputing, chemistry, etc., by using CT components (pattern recognition, decomposition, abstraction, and algorithms) to solve problems and transform the thinking of these disciplines.

At the same time, CT is a conceptual way of "systematically, accurately,

and efficiently processing information and tasks" to solve complex problems (Lu & Fletcher, 2009, p. 261). Similarly, Liu and Wang (2010) posit that solving complex problems necessitates the utilization of CT and computer science concepts and techniques that demand critical thinking. In other words, it can be observed that both CT and mathematical thinking use concepts that center on cognition, metacognition, and problem-solving in thinking (Kallia et al., 2021). Kalelioğlu, Gülbahar, and Kukul (2016), through a systematic literature review, developed a framework that reveals the relationship between Polya's (1945) problem-solving processes and CT components as follows:

- Defining the problem: abstraction, decomposition
- Data collection, representation, and analysis: data collection, analysis, pattern recognition, conceptualization, data representation
- Solution generation, selection, and planning: mathematical reasoning, algorithm and procedure generation, parallelization
- Implementation of solutions: automation, modeling, and simulations
- Evaluating and continuing to improve solutions: associated with testing, debugging, and generalization.

What these studies have in common is that CT is a thinking process that systematically focuses on problem-solving. In light of the above, it can be posited that mathematics educators and computer scientists are trying to establish a connection between mathematical problem-solving and CT. For all these reasons, it is important to elucidate the interconnection between CT and mathematical reasoning.

Research on computational thinking has been growing rapidly since 2013 and is fed by the knowledge produced in education, informatics, and social sciences (Tekdal, 2021). Especially in the context of STEM education (Li et al., 2020), it is observed that research has increased and studies in science and mathematics have intensified (Mumcu et al., 2023). It is evident that researchers benefit from computer science in the absence of computers (e.g., Anđić et al., 2023; Mumcu et al., 2023) and block-based programming (e.g., Bråting & Kilhamn, 2021; Gleasman & Kim, 2020; Kaup, 2022; Kilhamn et al., 2022; Ng & Cui, 2021) in the integration of CT into mathematics education. Considering these studies, it can be stated that there has been a notable increase in the efforts to establish a correlation between CT and mathematics education within the context of technology-supported mathematics education. The objective of this study is to elucidate the epistemological connection between computational thinking and mathematical thinking in the construction of mathematical knowledge. The epistemological link pertains to nature, source, and

scope of knowledge. When the epistemological link between CT and mathematical thinking is examined, both of them:

- are symbolic; they have a language of their own,
- require process skills (operations, operationalizing concepts, etc.),
- serve to solve problems through abstractions.

In addition, CT includes functions for processing information such as collecting, classifying, storing, processing, transmitting, and presenting information (Gülbahar, 2017, p. 402). Mathematical thinking is the organization and processing of information that an individual acquires to understand his/her environment (Burton, 1984). In other words, CT skills and mathematical thinking are also related in terms of process skills.

Mathematical Thinking and CT

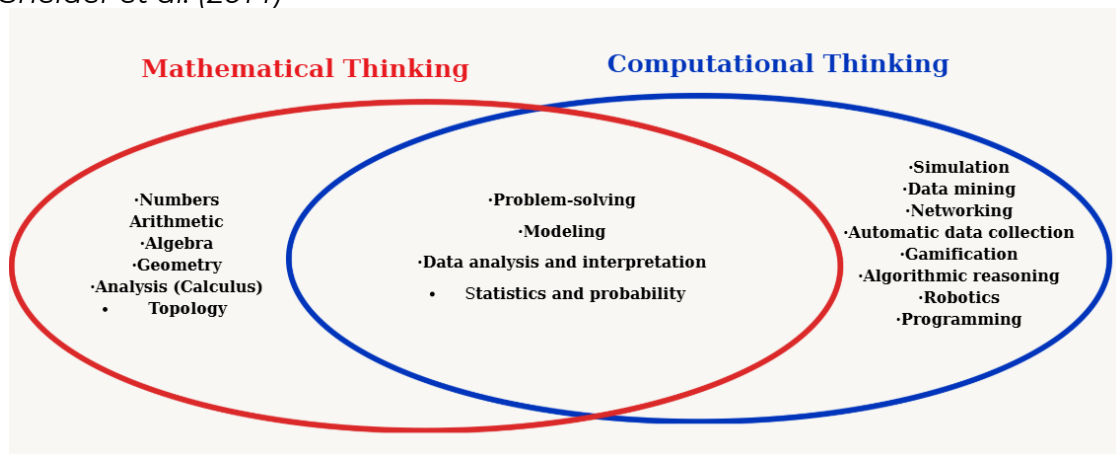
In this study, the research conducted in recent years to reveal the connection between mathematics education and CT was examined. In explaining the relationship between CT and mathematical thinking, problem-solving (Wing, 2008), common abilities of CT and mathematical thinking (Sneider et al., 2014), common skills (Barcelos & Silveira, 2012), interaction between CT and mathematical thinking (Kallia et al., 2021), focus on cognitive performance and processes (Denning, 2009; Furber, 2012; Hemmendinger, 2010; Humphreys, 2015; ISTE, 2016; Shute et al., 2017; Wing, 2014; Yadav et al., 2014). Reviews of these studies are as follows. According to Wing (2008), the common point between CT and mathematical thinking is problem-solving processes. Understanding and generalizing the problem, which are the most important common points of CT definitions, are also the stages of problem-solving (Barr et al., 2011; Zhenrong et al., 2009). CT is a facilitator and accelerator in increasing the quality of the problem-solving process and the solutions produced (Yıldız, 2017). Similarly, in a joint study reported by ISTE and CSTA, CT was described as a systematic problem-solving process (ISTE & CSTA, 2011). In line with these contexts, it can be said that there is a connection between CT and mathematical thinking due to problem-solving and its processes.

Figure 1 represents an adaptation of the representation of the similarities and differences between CT and mathematical thinking originally presented by Sneider et al. (2014). For example, when Figure 1 is examined, it is seen that the connection between mathematical thinking and CT includes components such as modeling, problem-solving, probability, and data analysis. Kallia et al. (2021) investigated the interactions between these two ways of thinking in their systematic research aimed at revealing the relationship between CT and mathematical thinking. Barcelos and Silveira (2012) identified three groups of skills that can be jointly developed by both mathematical thinking and CT:

- (1) Constructing Mathematical Representations and their Semiotic Relationship with Algorithms: In both ways of thinking, the ability to express, interpret, and transfer domain-specific representations (symbols, codes, and names) in a "language."
- (2) Establishing Domain-Specific Relationships and Pattern Identification: In both ways of thinking, mathematical reasoning in the process of solving a given problem is related to pattern finding.
- (3) Descriptive and Representational Models: The development of skills in the three groups through mathematical to explain and analyze situations improves both mathematical thinking and CT.

Figure 1

The Relationship between CT and Mathematical Thinking as stated by Sneider et al. (2014)



When the studies interpreting the relationship between Mathematical Thinking and CT are examined, it is seen that they address the connections between CT and Mathematical Thinking in terms of interaction, abilities, or skills, and establish a relationship between mathematical thinking and CT.

It is also recognized by focusing on the cognitive performance and processes of the individual, apart from the components of CT (Cansu & Cansu, 2019). Activities based on CT aim to improve cognitive skills and teaching-learning processes (Deniz, 2020).

Mathematical Thinking and Mathematical Modeling

Mathematical modeling is a problem-solving process that plays an important role in producing multidimensional solutions to daily life problems from a mathematical perspective (Blum & Niss, 1989; Aydın-Güç & Baki, 2016). In the mathematical modeling process, mathematical expressions are developed for real-life problems, and the issue is solved with mathematical solutions (Doruk & Umay, 2011). The modeling process requires mental modeling and explanation that will enable the formation or development of cognitive and metacognitive skills (Hıdıroğlu & Bukova-Güzel, 2013).

Kaiser and Sriraman (2006), while evaluating research approaches and perspectives on mathematical modeling, identified the cognitive perspective as one of the effective approaches to mathematical modeling. This is because this perspective aims to analyze the cognitive processes that take place during modeling processes and to provide a better understanding of these processes. Consequently, the aims of this cognitive perspective are:

(a) to analyze and understand cognitive processes (e.g., students' individual modeling routes, barriers, or strategies) and

(b) to promote mathematical thinking during mathematical modeling (Kaiser & Sriraman, 2006). In the cognitive modeling process, Borromeo-Ferri's (2007) cognitive modeling cycle is widely used (Borromeo-Ferri, 2018, p. 18). In this study, we focused on the promotion of mathematical thinking in the cognitive modeling process and the integration of CT components in the actions seen in cognitive processes. In line with this purpose, the relationship between the cognitive actions that emerged in the mathematical modeling process and the CT components was examined. Thus, an answer was sought to the question of how CT components and mathematical thinking are integrated.

This study has one main research question;

1- How are the cognitive processes in mathematical modeling and the components of CT integrated? While searching for an answer to this question, answers to sub-research questions were sought:

- Which components have been used in the integration of CT components with mathematics education in the literature?
- How to integrate cognitive actions and CT components in professional development training integrated with CT components?

Method

This study aimed to examine how cognitive actions and CT components were integrated into the mathematical modeling process. For this purpose, it was planned to examine and analyze cognitive actions and CT components in depth. Since the processes would be evaluated and relationships would be investigated in the research, a case study, one of the qualitative research designs, was used (Yıldırım & Şimşek, 2008). The research consisted of two stages. In the first stage, studies on the components of CT were examined. In the second stage, a teacher training program was created and implemented to reveal the integration between mathematical modeling and CT components.

First Phase of the Research

In the first stage, the studies in the literature that tried to integrate CT

components into mathematics education were examined. In this way, it was verified that the components of CT would be present in the research. In this process, a literature review was conducted to interpret the existing situation. A search of the Web of Science (WoS) was conducted to identify the studies included in the research. In order to examine the common components of CT and mathematics education, a search was made with the keywords "computational thinking" and "mathematics" and ("primary" OR "elementary" OR "secondary" OR "middle" OR "high" OR "K-12") between 2013-2023. 276 studies were reached. In the search, studies integrating various components of CT into mathematics education were included in the process. Consequently, a total of 16 articles were analyzed.

The 16 studies included in the study were categorized according to which components of CT they used. The studies were also categorized together by other researchers, and the data are presented in Table 3 in the findings section in a descriptive form.

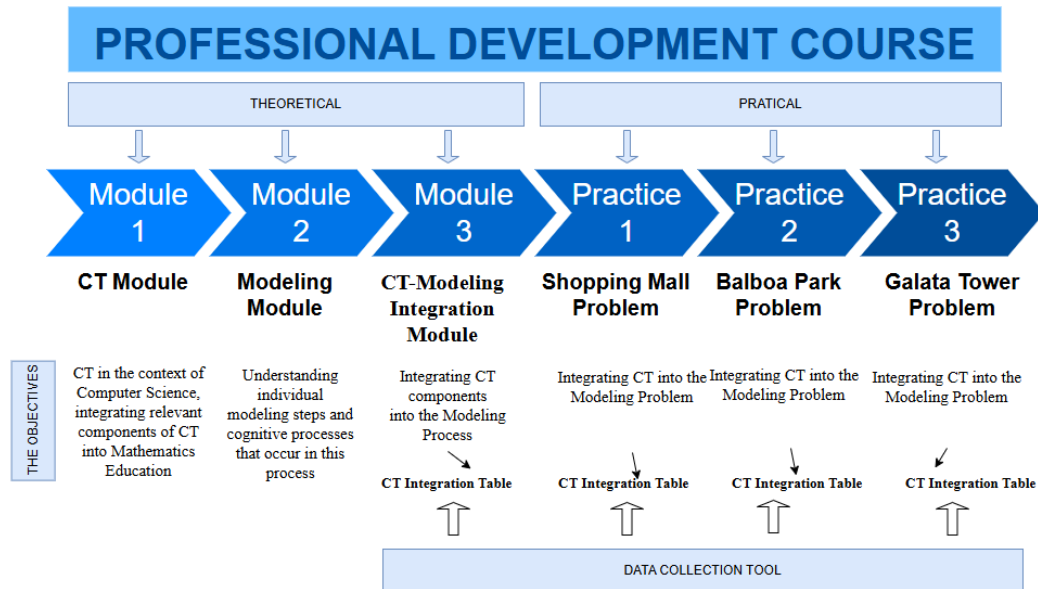
Second Phase of Research

In the second stage, a teacher training program was created and implemented in order to reveal the integration between cognitive actions in the mathematical modeling process and the CT components.

Content Development

The teacher education program on the integration of CT into mathematics education was designed by a doctoral student, a mathematics field educator, and an information technology field educator. For the instructional model to be designed in the research, the researchers first examined the research on the integration of CT and the modeling perspective that focused on revealing cognitive processes (Borromeo Ferri, 2007), and the development criterion in the participant statements was determined. The content was prepared to reveal the participant problem-solving process and their cognitive actions in this process to evaluate the process. The prepared content was presented for expert opinion in the field of curriculum development. The outcomes of the program were revised according to the feedback given in line with the program development principles. The training content prepared by the researchers for teachers was named a vocational training course and is shown in Figure 2.

Figure 2
The Research Process

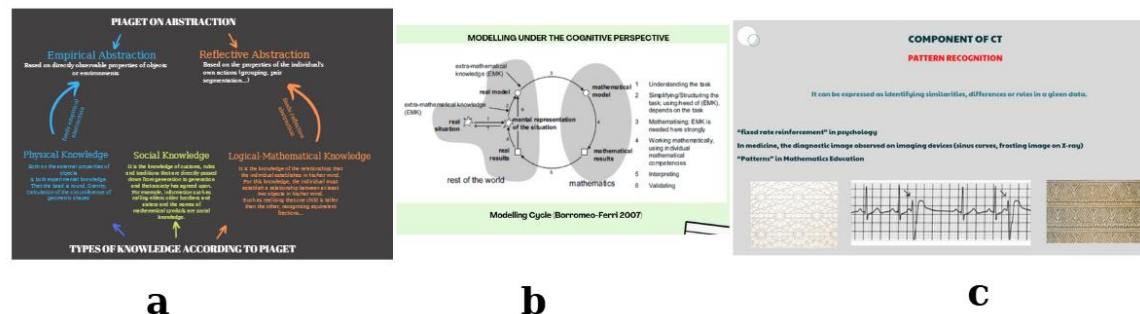


The purpose of this study is to investigate how the relationship between the cognitive processes in mathematical modeling and the components of CT is integrated. For this reason, the professional development course should firstly (1) provide basic knowledge about CT, (2) provide the ability to diagnose the cognitive actions that occur in the modeling process, and (3) then integrate CT and the cognitive modeling process at this epistemological level. To reinforce these skills, it was decided to repeat the last module cyclically. Accordingly, in the first module, the definition and importance of CT were mentioned. A concept map on Piaget's Theory of Abstraction is shown in Figure 3 (a) and (b), a PowerPoint presentation on the components of CT was used, and the information was given with worksheets. Then, examples from daily life situations and mathematics education were presented, and the participant was encouraged to present examples. In the second module, the steps, focus, and examples of mathematical modeling (MM) from a cognitive perspective were presented. Borromeo-Ferri's (2006) PowerPoint presentation for MM from a cognitive perspective and MM problem examples from the literature were used as shown in Figure 3 (c). Again, an information note worksheet for this process was presented to the participant. In the third module, the straw bale problem (Borromeo-Ferri, 2007) was solved for the integration of MM and CT, and cognitive processes were integrated with CT. At the end of the first three modules, in which theoretical knowledge was more intense, three more applications were made to internalize the integration between mathematical modeling and CT components. The basis of these applications was based on setting up and solving the MM problem related to the visual

given by the researcher and integrating the cognitive processes revealed. The aim of this professional development course was to provide the participants with the knowledge, skills, and competence to integrate the cognitive processes revealed by MM with CT.

Figure 3

Examples of Teaching Materials Presented in the Related Modules of the Professional Development Course



Participant

A pilot study was conducted for the suitability of the prepared content. Participants for the application were determined by purposive sampling method. The teacher should have knowledge about mathematical modeling or CT, should agree to participate in the training regularly, and should volunteer. Detailed information about the teacher is given in Table 1.

Table 1
Participant Characteristics

Participant Name	Field	Professional Experience	Educational Background	Experience with Mathematical Modeling	Knowledge of Computational Thinking
MTI	Middle School Mathematics Teacher	9 years	Master's Degree Graduate	Experienced in mathematical modeling	Yes

Data Collection Tools

A table was created in which the participant could write the cognitive actions that emerged in the solution of the mathematical modeling problem and the integration of the CT components. This table was named the "Cognitive Modeling Steps and CT Component Integration Table." Video recordings taken during the whole process and interview recordings were collected after the training process.

CT Component Integration Table

It was developed to assess how the participant integrated the cognitive modeling steps and CT components in the last session of the training and during the linking sessions. The "Cognitive Modeling

Steps and CT Component Integration Table" is presented in Appendix 1.

Video and Audio Recordings

The participant was asked for their opinion on the video recordings, and they were recorded after their consent was obtained. Video recordings were used to prevent data loss and to re-examine and analyze the process.

Interview

At the end of the training process, an unstructured interview was conducted to obtain the participant's views on the effectiveness of the training. The process was recorded and presented in the findings where necessary.

Data Analysis

The data obtained during the research process were analyzed by taking into account Borromeo Ferri's (2007) cognitive modeling cycle theoretical framework and the components of CT. In the research, a descriptive analysis of the data obtained in the process of associating cognitive modeling steps and CT components was conducted. A search was made with the keywords specified in the first part of the study, and 276 articles were found. These articles were analyzed, and the studies integrating CT components into mathematics education were included in the scope of the research.

In the data analysis of the second stage of the research, a sample analysis is given. Table 2 shows the participant response to a sample row of the CT Component Integration Table. This example is related to Application 1 - Shopping Mall problem presented in the findings section. The participant starts to solve the problem with the aim of creating a model of the height of the shopping mall. Then, he examines the visual of the shopping center. When the section in which he wrote the statement "It was thought that he could use the palm tree to solve the problem." was examined, he correctly expressed his cognitive processes for the MM problem. The statement "It was determined that the second of the palm trees could be more useful due to the perspective." refers to making empirical abstraction by determining the necessary variable from daily life to solve the problem and eliminating the unnecessary variable (the first palm tree). The participant did not realize this.

Table 2*Participant's Example Solution*

Cognitive Modeling Steps	Justification	Computational Thinking Components	Justification
Simplification of the Problem	It was decided to use the palm tree to solve the problem. The second palm tree was identified as more useful due to perspective. The lengths of the palm tree and its height were measured on the photograph using a ruler.	Pattern recognition, data	Utilizing the length of the palm tree (data) to solve the problem and identifying that a different length should be used (pattern recognition).

In addition, the validity and reliability of the data analysis were ensured within the research group while analyzing the data obtained from the worksheets and integration tables. The first researcher and the mathematics education field expert were asked to analyze 50% of the data while coding the appropriateness of the components of the CT that emerged in the mathematical modeling cycle, and the percentage of agreement was calculated as 90%. In this study, the researchers triangulated by using multiple data collection sources, including worksheets, integration tables, and video recordings. In the research, expressions that would reveal the identities of the participants were not used, and pseudonyms were used. To ensure confirmability in the research, the participant's opinion was consulted in cases where the situations that the participant tried to express were not understood during the implementation and analysis processes. In addition, participant discourses were included to ensure consistency. A purposive sampling method was used in the study, and a teacher with knowledge about mathematical modeling and CT was identified to ensure maximum response diversity. In addition, video and audio recordings were taken to ensure consistency. In the current study, the researcher, who is the first author, created the educational content and course designs, selected the participants in the study, and carried out the implementation process. In addition, the researcher systematically reduced her supportive interventions during the training process as the process progressed. The other authors in the study ensured that the training contents and course designs were created and that an objective evaluation was made after the implementation.

Findings

In this section, the results of the literature review and teacher training design conducted to reveal how the cognitive processes in mathematical modeling were integrated with the CT components were presented. Through the literature review, the conceptual framework of CT components integrated into mathematics education was determined. The findings of cognitive action and CT components revealed in the professional development course developed with this framework are presented. In this course, mathematical modeling problems were used to reveal cognitive processes, and the solutions developed by the participant to these problems were included.

CT Components and Mathematics Education Integration

The studies integrating the components of CT into mathematics education are given in Table 3.

Table 3

Studies Integrating Computational Thinking Components into Mathematics Education

	Data Analysis	Decompositio	Abstraction	Algorithm	Pattern Recognition	Debugging	Generalization	Automation	Parallelization	Modeling	Simulation	Analysis
Yadav and Chakraborty, 2023												
Leonard et al., 2023												
Mumcu et al., 2023												
Abdul Hanid et al., 2022												
Rich et al., 2022												
Wang et al., 2022												
Shumway et al., 2021												
Ng and Cui, 2020												
Valovičová et al., 2020												
Pires et al., 2019												
Pei et al., 2018												
Sinclair and Patterson, 2018												
Benton et al., 2017												
Costa et al., 2017												
Hsu and Hu, 2017												
Sung et al., 2017												

When Table 3 is examined, it is seen that decomposition, algorithm design, and abstraction, which are components of CT, are addressed more in mathematics education studies. Then, pattern recognition, debugging, data processing, and generalization components are included. For example, Mumcu et al. (2023) used decomposition in the integrated STEM education lesson plan designed by teachers according to the 5E learning model as follows: "The fire detection system is divided into various sub-problems: Sensors taking measurements, processing the data, and sending an SMS when a fire situation is detected. Each step is treated and solved as a separate problem."

Integration of Professional Development Training Cognitive Actions and CT Components

At the end of the literature review, three modules were implemented in the professional development course. The modules were described in detail in the methodology section. The third of these modules was built on the integration of CT and MM. In this module, Borromeo-Ferri's straw bale problem was given. The solution of the participant is presented in Figure 4. Then, the participant was expected to solve the problem and write the modeling processes in the CT components table. While solving the problem, the participant first determined the upper leg length of the woman in the image for the radius of the straw bales. She decided that this choice would not provide an accurate calculation and decided to continue with the arm length. When the mathematical solution to the problem understanding was examined, it was seen that she developed a solution to find the length of the straw bale. In the problem understanding stage of the problem-solving process, the participant stated that "determining the value for the straw bale was an empirical abstraction. Deciding to use the length of the woman's arm was debugging," "Making the problem simpler to solve the problem was decomposition," "Proceeding from the radius to work mathematically was deep abstraction" for the problem simplification stage. When these responses were analyzed, it was seen that she gave an incorrect response for the decomposition component.

Figure 4

Module 3-Participant's Solution



Yukarıdaki şekilde en alt sırada 5 saman balyası bulunmaktadır. Bir üst sıraya geçildiğinde her defasında bir saman balyası eksilmektedir. En üstte bir saman balyası kaldığına göre tüm yığınım yüksekliği ne kadardır? En iyi tahmininizi yapınız ve neden o sayıyı tahmin ettiğinizi matematiksel işlemlerle açıklayıp düşüncelerinizi nedenleriyle ayrıntılı yazınız.

$$h^2 + (4r)^2 = (8r)^2$$

$$h^2 + 16r^2 = 64r^2$$

$$h^2 = 48r^2$$

$$h = \sqrt{48}r$$

$$h = 4\sqrt{3}r$$

$$4\sqrt{3}r \rightarrow 4 \cdot 1.73 \cdot 29 = 200.76 \text{ cm}$$

$$201 \text{ cm}$$

Bir bedanın kol uzunluğu 65cm r 29cm alınarak

$$4\sqrt{3}r \rightarrow \frac{29 \cdot 4 \cdot 1.73}{13} = 75$$

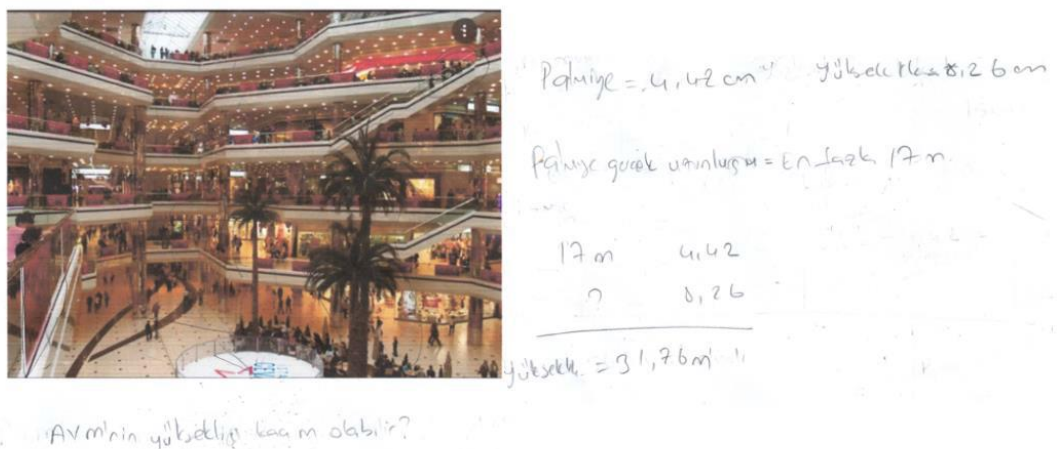
$$450 = 75 \text{ cm}$$

At the end of the module, the participant was asked again about the cognitive action she defined as parsing during the interview. *"I gave a wrong answer here. It is not decomposition, but it is difficult to recognize cognitive actions."* Decomposition facilitates the solution by breaking the problem into parts while solving it. However, the participant stated it as "making the problem simpler." This situation selected the necessary variables of the problem and purified it from other variables. This situation was an empirical abstraction. At this stage, she did not have difficulty in solving the modeling problem, but she had difficulty in expressing her cognitive processes.

When the modules were completed, the applications started. In the first of these applications, the participant was given a shopping mall visual and asked to set up and solve the MM problem. The solution process is given in Figure 5. The participant wanted to create a model of the height of the shopping mall given in the visual. For this purpose, she used the ratio between the actual height of the palm tree in the visual and the height measured from the screen to calculate the actual height of the shopping center. Then, she was expected to express the cognitive processes that emerged during the modeling process. The participant answered *"Thinking about the different details of the photograph by breaking them down; decomposition"* at the problem comprehension stage, *"Collecting the data to be used for the solution of the problem, investigating the palm lengths; data processing"* at the problem simplification stage, *"Performing sequential mathematical operations; algorithm"* at the mathematical study stage, and *"Returning to assumptions in case of unrealistic values; debugging"* at the MM problem interpretation stage. In this session, the participant interpreted the decomposition component as separating into manageable parts. In fact, she did not obtain an unrealistic result in her results. Despite this, she said *"if an unrealistic value is found, this is debugging."* This shows that the participant who preferred to calculate the height of the shopping mall in Practice 1 gained experience in expressing her cognitive processes.

Figure 5

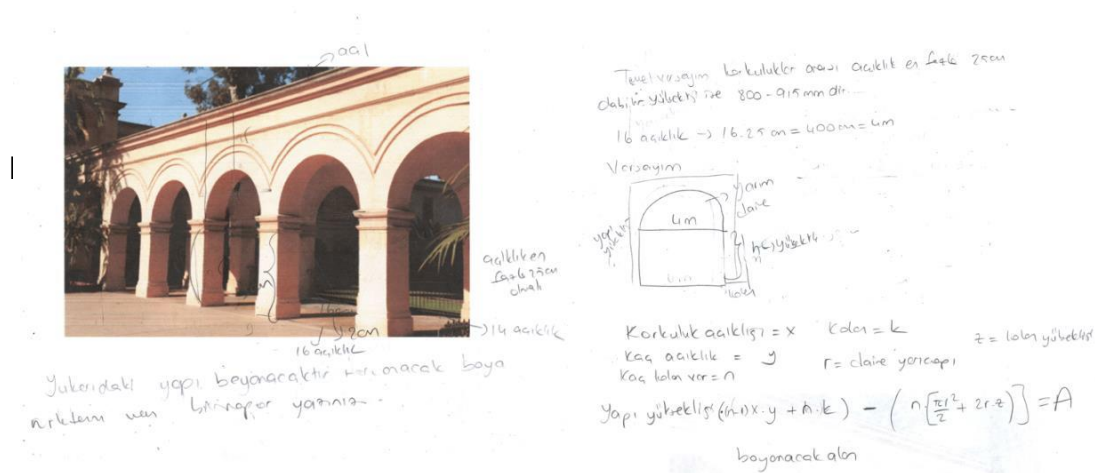
Participant Responses for Practice 1



In Practice 2, the participant constructed a problem of modeling the amount of coloring to be used for the given image. In this session, a significant improvement was observed in the participant's ability to express cognitive processes. The participant, who stated one cognitive process for each cognitive step in the previous sessions, asked a question in this session: *"It seems like there is more than one CT component in a step, am I wrong?"* In other words, the participant realized that more than one cognitive action occurs in cognition when solving a modeling problem. Then, for the mathematical study step, he answered, *"Using the relationship between the real value and the length in the photograph is pattern recognition; the process of creating a mathematical model is abstraction."* The answers given by the participant in the mathematical study step are an example of a situation in which the participant showed improvement in identifying the operations performed in his mind step by step and expressing these cognitive actions correctly.

Figure 6

Practice 2 Solution



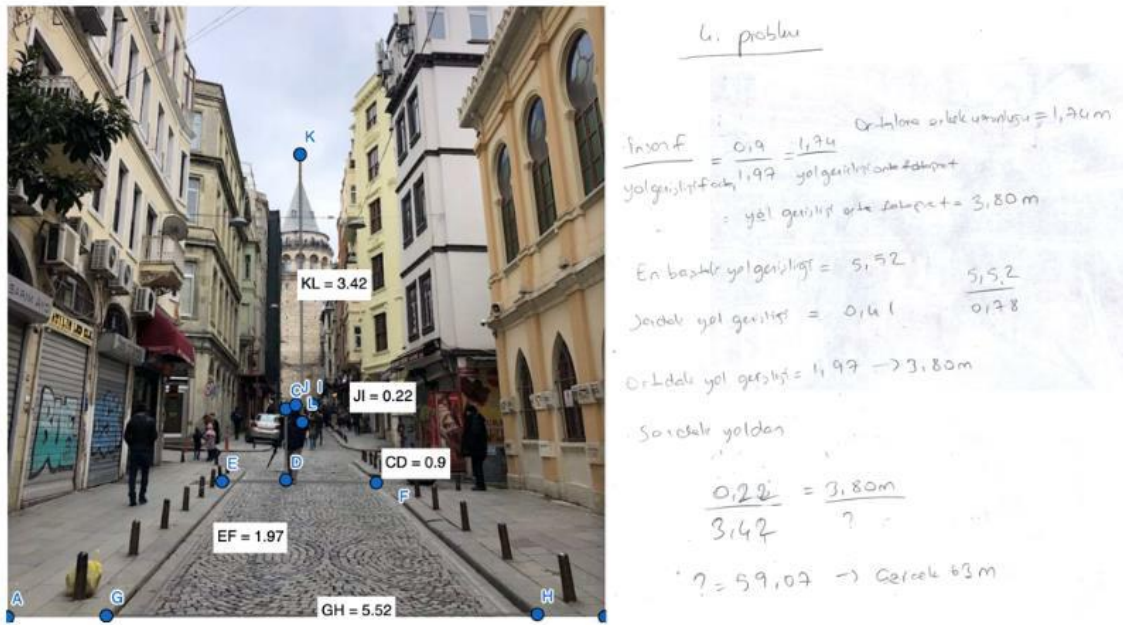
MM problem with an image of his choice. In this question, the participant wanted to calculate the height of the Galata Tower with the effect of the previous sessions. In this session, the participant answered, *"Determining the effect of perspective on length by finding the ratio between the width of the nearest and farthest road is deep abstraction"* in the mathematization phase. The participant, who benefited from the relationship between two mathematical concepts such as ratio and perspective, realized that she benefited from deep abstraction while solving the problem. It was observed that the participant reached a point where she could express her cognitive actions that emerged during the modeling process accurately and completely.

The participant did not have difficulty setting up and solving the MM problem, but she had difficulty integrating the components of CT. She

reported, "It is difficult to understand the components of CT; I think more examples are needed in the training content." The participant, who diagnosed cognitive processes with the support of the researcher in Module 3 and Practice 1, diagnosed cognitive processes and CT components alone in Practice 3. In Module 3, the participant integrated her cognitive actions with the CT under the questions and guidance of the researcher. This process systematically decreased in Practices 1-2-3. The fact that she realized her own cognitive processes and CT integration in Practice 3 indicates that she has improved in this regard.

Figure 7

Practice 3 Solution



The CT components that the participant noticed and gave examples during the MM problem solving process are shown in Table 4 according to Borromeo-Ferri (2006) cognitive modeling steps.

Table 4*Computational Thinking Components Emerging in the Application Process*

	Empirical Abstraction	Reflective Abstraction	Decomposition	Algorithm Design	Pattern Recognition	Generalization	Debugging	Data Processing
Understanding the Problem								
Simplification								
Mathematization								
Mathematical Work								
Interpretation								
Validation								

When the table is analyzed on the vertical and horizontal axes:

(a) On the vertical axis: abstraction, parsing, and data processing were the most intensively observed components, while algorithm design, pattern recognition, and debugging were also frequently observed components. In addition, the generalization component was revealed in 2 steps.

(b) On the horizontal axis: mathematization and mathematical work involved the most intensive information processing processes; problem understanding, simplification, and interpretation involved intensive information processing processes; and generalization processes were revealed in the verification step.

In Table 3, the studies using various components of CT in the literature are presented. In these studies, abstraction, algorithmic thinking, and decomposition components were mostly used, while technological tool-oriented components such as automation and parallelization were used less. Table 4 shows the components revealed during the modeling problem-solving process of a participant who solved a mathematical modeling problem during the professional development course. A striking element in Table 4 is that empirical abstraction is revealed in the real-world section of modeling, while reflective abstraction is revealed in the mathematical world section. This situation can be expressed by the distinction in Figure 8 in terms of the connection between CT and mathematical thinking.

When these two tables are compared, a general consistency is found between the framework components used in the literature (abstraction, decomposition, algorithm design, pattern recognition, generalization) and the components used in this study. However, although data processing and debugging components are less frequently used in the studies mentioned in Table 3, they are among

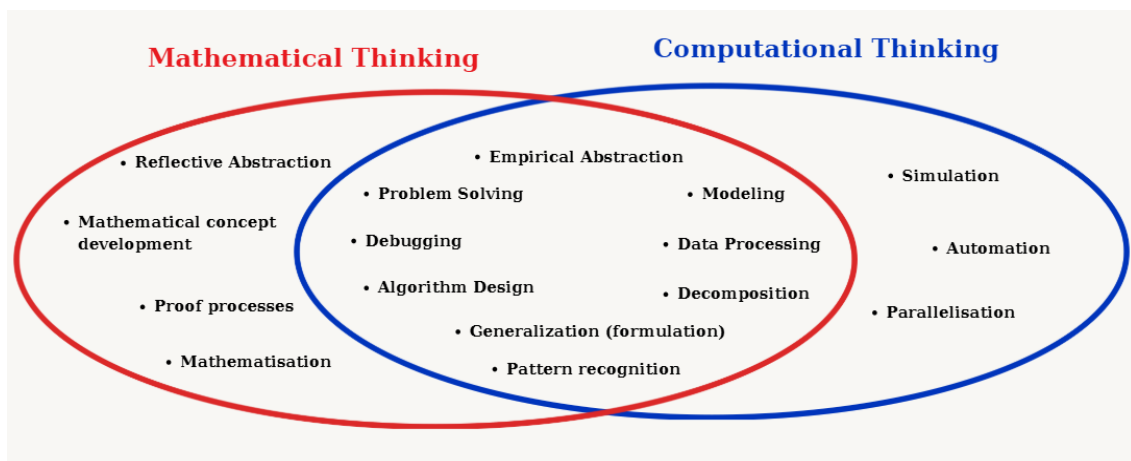
the components that are frequently revealed in the findings of this study.

Conclusion, Discussion and Recommendations

This study was designed to reveal the epistemological link between mathematical thinking and CT. In this design, the mathematical modeling process from a cognitive perspective was used to reveal the link between mathematical thinking and CT. Modeling activities are known to be productive for mathematical thinking, learning, and problem-solving (Lesh & Lehrer, 2003). In this study, in line with the modeling activities, the overlapping components of mathematical thinking and CT components (empirical abstraction, decomposition, algorithm design, data processing, debugging, pattern recognition, and generalization) and the differentiating component (reflective abstraction) were revealed. It is thought that addressing the abstraction component with Piaget's view of abstraction will contribute to the understanding of intensive cognitive processes such as the MM problem-solving process.

Figure 8

Epistemological Link between CT and Mathematical Thinking



In this study, the epistemological connection between mathematical thinking and CT was examined. In line with the findings obtained from the study, the epistemological link is as shown in Figure 8. This finding has similar and different aspects to the findings of Sneider et al. Since the diagram is handled in the context of thinking processes, it is considered to be an improvement with a critical view of the related study.

In their study, Kalelioğlu et al. (2016) associated Polya's problem-solving stages with CT components, and some CT components were matched with problem-solving stages (for example, decomposition and abstraction components were found only in the comprehension stage of the problem). Based on Table 4, more than one CT

component is revealed in a modeling step. It is seen that a CT component cannot be associated with a single step (for example, reflective abstraction and decomposition are observed in all modeling steps). In Aktaş's (2022) study, it was observed that more than one CT component emerged in technology-supported modeling processes. This is a similar finding to our study.

Based on this study, it was found that Piaget's theory of abstraction contributed to making sense of the process in the integration of abstraction into mathematics education. In this context, it is thought that a professional development course to be prepared will contribute to the integration of CT.

The components revealed in the literature and this study can be re-investigated by testing them in different contexts.

Adding training based on CT and MM to the pre-service and in-service training processes of teachers will contribute to the development of mathematical thinking and CT in educational processes.

Ethics Committee Permission: *This research was conducted with the permission of Dokuz Eylul University Scientific Research and Publication Ethics Social and Human Sciences Committee with the decision dated 21/11/2023 and numbered E-87347630-659-806813.*

Conflict of Interest : *The authors have no conflict of interest to declare.*

Authors' Contribution: *The first author of the study played a role in all the processes, and the other authors played a role in the creation of educational content and course designs, and in the objective evaluation after the implementations.*

References

- Aktaş, S. E. (2022). *Investigation of mathematics teacher candidates' mental actions related to information processing thinking in the process of technology supported mathematical modeling* [Master's Thesis, Pamukkale University] National Thesis Center.
- Anđić, B., Mumcu, F., Tejera, M., Schmidthaler, E., & Lavicza, Z. (2023). Unplugging math: Integrating computational thinking into mathematics education through poly-universe. In M. De Rossi, L. Hadjileontiadou, & A. Ottaviano (Eds.), *Proceedings of the Conference on Smart Learning Ecosystems and Regional Development* (pp. 247–263). Springer. https://doi.org/10.1007/978-981-99-5540-4_15
- Barcelos, T. S., & Silveira, I. F. (2012). Teaching computational thinking in initial series: An analysis of the confluence among mathematics and computer sciences in elementary education and its implications for higher education. In *Proceedings of the XXXVIII Conferencia Latinoamericana en Informática (CLEI)* (pp. 1–8). IEEE.
- Barefoot. (2014). Computational thinking. Barefoot. <https://barefootcas.org.uk/barefoot-primary-computing-resources/concepts/computational->

thinking/

- Barr, D., Harrison, J., & Conery, L. (2011). Computational thinking: A digital age skill for everyone. *Learning & Leading with Technology*, 38(6), 20-23.
- Blum, W., & Niss, M. (1989). Mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects: State, trends, and issues in mathematics instruction. In W. Blum, M. Niss, & I. Huntley (Eds.), *Modelling, applications and applied problem solving* (pp. 1-21). Ellis Horwood.
- Borromeo Ferri, R. (2010). On the influence of mathematical thinking styles on learners' modeling behavior. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 31(1), 99-118.
- Bråting, K., & Kilhamn, C. (2021). Exploring the intersection of algebraic and computational thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 23(2), 170-185.
- Brennan, K., & Resnick, M. (2012). New frameworks for studying and assessing the development of computational thinking. *Proceedings of the 2012 Annual Meeting of the American Educational Research Association* (Vol. 1, p. 25). AERA.
- Cansu, F. K., & Cansu, S. K. (2019). An overview of computational thinking. *International Journal of Computer Science Education in Schools*, 3(1), 17-30.
- Çetin, I., & Dubinsky, E. (2017). Reflective abstraction in computational thinking. *The Journal of Mathematical Behavior*, 47, 70-80.
- CSTA & ISTE. (2011). Computational thinking in K-12 education leadership toolkit. <http://csta.acm.org/Curriculum/sub/CurrFiles/471.1ICTLeadershipToolkit-SP-vF.pdf>
- Cui, Z., & Ng, O. L. (2021). The interplay between mathematical and computational thinking in primary school students' mathematical problem-solving within a programming environment. *Journal of Educational Computing Research*, 59(5), 988-1012.
- Çelik, D. (2016). Matematiksel düşünme. In E. Bingölbalı, S. Arslan & I. Zembat (Eds.), *Matematik eğitiminde teoriler* (pp. 17-42). Pegem Akademi.
- Deniz, G. (2020). *The effect of using tinkercad in programming education on students' information processing thinking skills and perceptions* [Master's Thesis, Gazi University]. National Thesis Center.
- Denning, P. J. (2009). The profession of IT Beyond computational thinking. *Communications of the ACM*, 52(6), 28-30.
- Doruk, K. B., & Umay, A. (2011). Matematikçi günlük yaşama transfer etmede matematiksel modellemenin etkisi. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 41(41), 124-135.
- Dreyfus, T. (2002). Advanced mathematical thinking processes. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (Vol. 11, pp. 25-41). Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_2

- Dubinsky, E. (1991). Constructive aspects of reflective abstraction in advanced mathematics. In A. Hirst & K. Hirst (Eds.), *Epistemological foundations of mathematical experience* (pp. 160–187). Springer-Verlag.
- Ferri, R. B. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM*, 38, 86-95.
- Ferri, R. B. (2007). Modelling problems from a cognitive perspective. In *Mathematical Modelling* (pp. 260-270). Woodhead Publishing.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. D. Reidel Publishing Company.
- Furber, S. (2012). *Shut down or restart? The way forward for computing in UK schools*. The Royal Society. <https://royalsociety.org/education/policy/computing-in-schools/report/>
- Gleasant, C., & Kim, C. (2020). Pre-service teacher's use of block-based programming and computational thinking to teach elementary mathematics. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 6, 52-90.
- Gray, E., & Tall, D. (1991). Duality, ambiguity, and flexibility in successful mathematical thinking. In *Proceedings of the 18th Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 72–79). PME.
- Güç, F. A., & Baki, A. (2016). Matematiksel Modelleme Yeterliklerini Geliştirme ve Değerlendirme Yaklaşımlarının Sınıflandırılması 1. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, 7(3), 621.
- Gülbahar, Y. (2017). Bilgi işlemsel düşünme ve programlama konusunda değişim ve dönüşümler. In Y. Gülbahar (Ed.), *Bilgi işlemsel düşünmeden programlamaya* (pp. 395–410). Pegem Akademi.
- Hemmendinger, D. (2010). A plea for modesty. *ACM Inroads*, 1(2), 4–7. <https://doi.org/10.1145/1805724.1805725>
- Hershkowitz, R., Schwarz, B. B., & Dreyfus, T. (2001). Abstraction in context: Epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(2), 195-222.
- Hıdıroğlu, Ç. N., & Güzel, E. B. (2013). Matematiksel modelleme sürecini açıklayan farklı yaklaşımlar. *Bartın Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*.
- Huang, W., Deng, Z., & Rongsheng, D. (2009). Programming courses teaching method for ability enhancement of computational thinking. In 2009 *International Association of Computer Science and Information Technology-Spring Conference* (pp. 182–185). IEEE.
- Humphreys, S. (2015). *Computational thinking: A guide for teachers*. Computing at School. Charlotte BCS: The Chartered Institute for IT.
- Isoda, M., & Katagiri, S. (2012). Introductory chapter: Problem solving approach to develop mathematical thinking. In M. Isoda & S. Katagiri (Eds.), *Mathematical thinking: How to develop it in the classroom* (pp. 1–28). World Scientific.
- ISTE (2016). Computational thinking teacher resources.

https://csta.acm.org/Curriculum/sub/CurrFiles/472.11CTTeacherResources_2ed-SPvF.pdf.

- Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM*, 38(4), 302–310.
- Kalelioglu, F., Gulbahar, Y., & Kukul, V. (2016). A framework for computational thinking based on a systematic research review. *Baltic Journal of Modern Computing*, 4(3), 583–596.
- Kallia, M., van Borkulo, S. P., Drijvers, P., Barendsen, E., & Tolboom, J. (2021). Characterising computational thinking in mathematics education: a literature-informed Delphi study. *Research in Mathematics Education*, 23(2), 159-187.
- Kaup, C. F. (2022). Mapping the relations between computational thinking and mathematics in terms of problem-solving. *Acta Didactica Norden*, 16(4), 9185.
- Kilhamn, C., Bråting, K., Helenius, O., & Mason, J. (2022). Variables in early algebra: exploring didactic potentials in programming activities. *ZDM–Mathematics Education*, 54(6), 1273-1288.
- Lesh, R., & Lehrer, R. (2003). Models and modeling perspectives on the development of students and teachers. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(2-3), 109-129.
- Li, Y., Schoenfeld, A. H., diSessa, A. A., Graesser, A. C., Benson, L. C., English, L. D., & Duschl, R. A. (2020). Computational thinking is more about thinking than computing. *Journal for STEM Education Research*, 3, 1-18.
- Liu, J., & Wang, L. (2010). Notice of retraction: Computational thinking in discrete mathematics. In *2010 Second International Workshop on Education Technology and Computer Science* (Vol. 1, pp. 413–416). IEEE
- Lu, J. J., & Fletcher, G. H. (2009). Thinking about computational thinking. In *Proceedings of the 40th ACM Technical Symposium on Computer Science Education* (pp. 260–264). ACM.
- Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (2010). *Thinking mathematically* (Second Edition). Pearson Education Limited.
- Mumcu, F., Bardakçı, S., & Lavicza, Z. (2023). Reimagining STEM: Booming computer science education as a component of STEM education. In Z. Lavicza, I. F. Rahmadi, S. Arkün-Kocadere, & K. Fenyvesi (Eds.), *STEAM-BOX: Empowering educators to integrate transdisciplinary STEAM practices in schools* (pp. 72–92). Johannes Kepler Universität Linz. <https://doi.org/10.35011/9783903480032>
- Mumcu, F., Kidiman, E., & Özdiñç, F. (2023). Integrating Computational Thinking into Mathematics Education through an Unplugged Computer Science Activity. *Journal of Pedagogical Research*, 7(2), 72-92.
- Piaget, J. (2001). In (R.L. Campell, Ed.) *Studies in reflecting abstraction* (1st ed.). Psychology Press. <https://doi.org/10.4324/9781315800509>

- Pólya, G. (1945). *How to Solve It*, Princeton University Press.
- Román-González, M., Pérez-González, J. C., & Jiménez-Fernández, C. (2017). Which cognitive abilities underlie computational thinking? Criterion validity of the Computational Thinking Test. *Computers in human behavior*, 72, 678-691.
- Saritepeci, M., & Durak, H. (2017). Analyzing the effect of block and robotic coding activities on computational thinking in programming education. In I. Koleva & G. Duman (Eds.), *Educational research and practice* (pp. 490–501). St. Kliment Ohridski University Press.
- Schoenfeld, A. H. (1982). *Measures of problem-solving performance and of problem-solving instruction*. *Journal for Research in Mathematics Education*, 13(1), 31-49.
- Selby, C., & Woollard, J. (2013). Computational thinking: The developing definition. In *Proceedings of the Special Interest Group on Computer Science Education (SIGCSE)*.
- Shute, V. J., Sun, C., & Asbell-Clarke, J. (2017). Demystifying computational thinking. *Educational Research Review*, 22, 142-158.
- Sneider, C., Stephenson, C., Schafer, B., & Flick, L. (2014). Exploring the science framework and NGSS: Computational thinking in the science classroom. *Science Scope*, 38(3), 10.
- Tall, D. (1995). Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking. In L. Meira & D. Carraher (Eds.), *Proceedings of the 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 1–61).
- Tall, D. (1999). Reflections on APOS theory in elementary and advanced mathematical thinking. In *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 148-155).
- Tekdal, M. (2021). Trends and development in research on computational thinking. *Education and Information Technologies*, 26(5), 6499-6529.
- Van Oers, B. (2001). Contextualisation for abstraction. *Cognitive Science Quarterly*, 1(3), 279-305.
- Wing, J. (2011). Research notebook: Computational thinking-What and why. *The Link Magazine*, 6, 20-23.
- Wing, J. M. (2006). Computational thinking. *Communications of the ACM*, 49(3), 33-35.
- Wing, J. M. (2008). Computational thinking and thinking about computing. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 366(1881), 3717-3725.
- Wing, J. M. (2014, January 10). Computational thinking benefits society. *40th Anniversary Blog Of Social Issues in Computing*. <http://socialissues.cs.toronto.edu/index.html%3Fp=279.html>

- Yadav, A., Mayfield, C., Zhou, N., Hambruch, S., & Korb, J. T. (2014). Computational thinking in elementary and secondary teacher education. *ACM Transactions on Computing Education (TOCE)*, 14(1), 1-16.
- Yeşildere, S., & Türnüklü, E. B. (2008). Investigation of knowledge construction processes of primary eighth grade students according to their mathematical strengths. *Journal of Uludag University Faculty of Education*, 21(2), 485-510.
- Yıldırım, A., & Şimşek, H. (2008). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. Seçkin Yayınevi.
- Yıldız, B. (2017). Disiplinlerarası öğretim yaklaşımı: Bilgi işlemsel düşünme ve FeTeMM. In Y. Gülbahar (Ed.), *Bilgi işlemsel düşünmeden programlamaya* (pp. 319–336). Pegem Akademi.
- Zembat, I. (2016). Piaget'ye göre soyutlama ve çeşitleri. In E. Bingölbalı, S. Arslan, & I. Zembat (Eds.), *Matematik eğitiminde teoriler* (pp. 448-458). Pegem Akademi.