ISSN 2757-5543 GÜFFD 5. Cilt (1): 1-10 (2024)

Gazi Üniversitesi Fen Fakültesi Dergisi

https://dergipark.org.tr/tr/pub/guffd

GÜFFD GAZİ ÜNİVERSİTESİ FEN FAKÜLTESİ DERGİSİ

Graf İşlemlerinin Eliptik Sombor Tamamlayıcı İndeksi İçin Sınırlar

Gül Özkan Kızılırmak*

Gazi Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matemeatik Bölümü, 06500, Ankara, Türkiye

Öne Çıkanlar

- Bu çalışmada Graf Teoride büyük bir çalışma alanı olan Topolojik İndekslerden Eliptik Sombor İndeksinin tamamlayıcı indeksi tanımlanmıştır.
- Tanımlanan Eliptik Sombor Tamamlayıcı İndeksinin bazı eş indekslerle olan ilişkisi bulunmuştur.
- Graf işlemlerinde Eliptik Sombor Tamamlayıcı İndeksi için sınırlar elde edilmiştir.

Makale Bilgileri

Geliş: 18/03/2024
Kabul: 05/04/2024

Anahtar Kelimeler

Graf,
Eliptik Sombor İndeks,
Topolojik İndeks.

Öz

Bu çalışmada öncelikle Eliptik Sombor Tamamlayıcı İndeksi

$$\overline{ESO}(G) = \sum_{uv \notin E(G)} \big(d_G(u) + d_G(v)\big)\sqrt{d_G(u)^2 + d_G(v)^2}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Daha sonra Eliptik Sombor Tamamlayıcı İndeksinin bazı tamamlayıcı indekslerle arasındaki ilişkiler elde edilmiş ve son olarak bazı graf işlemleri için Eliptik Sombor Tamamlayıcı İndeksinin sınırları bulunmuştur.

Bounds for the Elliptic Sombor Co-Index of Graph Operations

Highlights

- In this study, the Elliptic Sombor co-index, one of the Topological Indices, which is a major field of study in Graph Theory, is defined.
- The relationship of the defined Elliptic Sombor Co-Index with some co-indices has been found.
- In graph operations, bounds were obtained for the Elliptic Sombor Co-Index.

Article Info

Received: 18/03/2024
Accepted: 05/04/2024

Keywords

Graph,
Elliptic Sombor Index,
Topological Index.

Abstract

In this study, firstly the Elliptic Sombor Co- Index is defined as

$$\overline{ESO}(G) = \sum_{uv \notin E(G)} \big(d_G(u) + d_G(v)\big)\sqrt{d_G(u)^2 + d_G(v)^2}.$$

Then, the relationships between the Elliptic Sombor Co-Index and some co-indices were obtained, and finally, the bounds of the Elliptic Sombor Co-Index were found for some graph operations.

Araştırma Makalesi

* Sorumlu Yazar/Corresponding Author: Gül Özkan Kızılırmak, gulozkan@gazi.edu.tr

1. GİRİŞ

Topolojik indeksler, Graf Teori'nin öne çıkan çalışma konuları arasındadır. Kimyasal graf teori genel olarak moleküler grafların çeşitli topolojik indekslerini(moleküler tanımlayıcılar) göz önüne alır ve bunlara karşılık gelen moleküllerin çeşitli özellikleriyle ne kadar güçlü bir şekilde ilişkili olduklarını inceler. Böylece literatürdeki QSAR ve QSPR çalışmaları ile bu ilişkilerin matematiksel gösterimleri elde edilmiş olur.

G, sırasıyla noktalar kümesi $V(G)$ ve kenarlar kümesi $E(G)$ olan basit bağlantılı bir graf olsun. G grafındaki herhangi bir u noktasının komşu olduğu nokta sayısına u'nun derecesi denir ve $d_G(u)$ ile gösterilir. Bir G grafının tamamlayıcısı $\bar{G}$ ile gösterilir ve noktalar kümesi G'nin noktalar kümesi $V(G)$ ile aynı, kenarlar kümesi $\mathrm{E}(\bar{G})$ (eleman sayısı $\bar{m}$) olan basit bir graftır [1]. Bu makalede, G, n noktalı m kenarlı basit bağlantılı bir graf ve bu graftaki noktalarının maksimum derecesi Δ, minimum derecesi δ olarak kabul edilecektir.

Bir grafın birinci ve ikinci Zagreb indeksleri, en çok çalışılan dereceye bağlı topolojik indeksler arasındadır. Bu indeksler sırasıyla $\mathrm{M}_1(\mathrm{G})$ ve $\mathrm{M}_2(\mathrm{G})$ ile aşağıdaki şekilde gösterilmektedir [2]:

$$\mathrm{M}_1(\mathrm{G}) = \sum_{uv\in E(G)} d_G(u) + d_G(v)$$

ve

$$\mathrm{M}_2(\mathrm{G}) = \sum_{uv\in E(G)} d_G(u)d_G(v).$$

Bir G grafının F-indeksi

$$F(\mathrm{G}) = \sum_{uv\in E(G)} d_G(u)^2 + d_G(v)^2$$

olarak tanımlanmıştır [3].

Diğer bir dereceye bağlı indeks de Eliptik Sombor İndeks olup,

$$ESO(\mathrm{G}) = \sum_{uv\in E(G)} (d_G(u) + d_G(v))\sqrt{d_G(u)^2 + d_G(v)^2}$$

şeklinde gösterilmiştir [4].

Belirli birleşik grafların ağırlıklı Wiener polinomu hesaplanırken Zagreb tamamlayıcı indeksleri ortaya çıkmış ve şu şekilde tanımlanmıştır [5]:

$$\overline{\mathrm{M}_1}(\mathrm{G}) = \sum_{uv\notin E(G)} d_G(u) + d_G(v)$$

ve

$$\overline{\mathrm{M}_2}(\mathrm{G}) = \sum_{uv\notin E(G)} d_G(u)d_G(v).$$

Benzer şekilde $\bar{F}$ tamamlayıcı indeksi

$$F(\mathrm{G}) = \sum_{uv \notin E(G)} d_G(u)^2 + d_G(v)^2$$

olarak tanımlanmıştır [6].

Biz de benzer düşünce ile Eliptik Sombor Tamamlayıcı İndeksi

$$\overline{ESO}(G) = \sum_{uv \notin E(G)} \left(d_G(u) + d_G(v)\right)\sqrt{d_G(u)^2 + d_G(v)^2}$$

olarak tanımladık.

Literatürde farklı graf işlemleri için çeşitli topolojik indeksler üzerine yapılan çalışmalar bulunmaktadır [7-16].

Bu makalede öncelikle Eliptik Sombor Tamamlayıcı İndeksi'nin Zagreb Tamamlayıcı İndeksleri ve F-Tamamlayıcı indeksi ile arasındaki ilişkileri bazı bilinen eşitsizlikler yardımı ile elde edilmiştir. Daha sonra birleşim, toplam, kartezyen çarpım ve bileşim gibi bazı graf işlemlerinin Eliptik Sombor Tamamlayıcı İndeks için sınırları bulunmuştur.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. Eliptik Sombor Tamamlayıcı İndeks ile Bazı Tamamlayıcı İndeksler Arasındaki İlişkiler

Bu bölümde Eliptik Sombor Tamamlayıcı indeksi ile Zagreb Tamamlayıcı indeksleri ve F Tamamlayıcı indeksler arasında bazı ilişkiler elde edildi. Öncelikle elde edilen sonuçlar için gerekli olan aşağıdaki eşitsizlikleri verelim.

Yardımcı Teorem 2.1.1. (Pólya-Szegö Eşitsizliği) $\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \dots, \mathrm{a}_\mathrm{s}$ ve $\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \dots, \mathrm{b}_\mathrm{s}$ pozitif reel sayılar olsun. $k = 1,2, \dots, s$ için $0 < a \leq a_k \leq A < \infty$ ve $0 < b \leq b_k \leq B < \infty$ olacak şekilde a, b, A, B reel sayıları varsa o zaman

$$\frac{\sum_{k=1}^{s} {a_k}^2 \sum_{k=1}^{s} {b_k}^2}{\sum_{k=1}^{s} a_k\, b_k} \leq \frac{(ab + AB)^2}{4abAB}$$

dır.

Yardımcı Teorem 2.1.2. (Cauchy-Schwarz Eşitsizliği) $\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \dots, \mathrm{a}_\mathrm{s}$ ve $\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \dots, \mathrm{b}_\mathrm{s}$ pozitif reel sayılar olsun. O zaman

$$\left(\sum_{k=1}^{s} a_k\, b_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{s} {a_k}^2 \sum_{k=1}^{s} {b_k}^2$$

dır.

Yardımcı Teorem 2.1.3. a_k ve b_k ($1\leq k \leq s$) pozitif reel sayılar ve $m_1 = \min_{1\leq k\leq s}\{a_k\}$, $M_1 = \operatorname{maks}_{1\leq k\leq s}\{a_k\}$, $m_2 = \min_{1\leq k\leq s}\{b_k\}$, $M_2 = \operatorname{maks}_{1\leq k\leq s}\{b_k\}$ olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{s} {a_k}^2 \sum_{k=1}^{s} {b_k}^2 - \left(\sum_{k=1}^{s} a_k\, b_k\right)^2 \leq \frac{s^2}{4}(M_1M_2 - m_1m_2)^2$$

dır.

Yardımcı Teorem 2.1.4. $a_1, a_2, \dots, a_s$ ve $b_1, b_2, \dots, b_s$ pozitif reel sayılar olsun. $k = 1,2,\dots,s$ için $0 < a \leq a_k \leq A < \infty$ ve $0 < b \leq b_k \leq B < \infty$ olacak şekilde a, b, A, B reel sayıları varsa o zaman

$$\left|\frac{1}{s}\sum_{k=1}^{s} a_k b_k - \left(\frac{1}{s}\sum_{k=1}^{s} a_k\right)\left(\frac{1}{s}\sum_{k=1}^{s} b_k\right)\right| \leq \frac{1}{s}\left\lfloor\frac{s}{2}\right\rfloor\left(1-\frac{1}{s}\left\lfloor\frac{s}{2}\right\rfloor\right)(A-a)(B-b)$$

dır.

Teorem 2.1.5. G, n noktalı m kenarlı bir graf olsun. O zaman

$$\frac{4\delta^2\Delta^2}{(\delta^2+\Delta^2)^2}\bar{F}(G)(\bar{F}(G) + 2\overline{M_2}(G) \leq \overline{ESO}(G)$$

dır.

İspat. Yardımcı Teorem 2.1.1'de $a_k = d_G(u) + d_G(v)$, $b_k = \sqrt{d_G(u)^2 + d_G(v)^2}$ alınır ve $a = 2\delta$, $b = \sqrt{2}\,\delta$, $A = 2\Delta$, $B = \sqrt{2}\Delta$ seçilirse $0 < a \leq a_k \leq A < \infty$ ve $0 < b \leq b_k \leq B < \infty$ sağlanır. Ayrıca burada

$$\frac{(ab+AB)^2}{4abAB} = \frac{(\delta^2+\Delta^2)^2}{4\delta^2\Delta^2}$$

dır. Yardımcı Teorem 2.1.1, G'nin komşu olmayan kenarlarının toplamı üzerinden uygulanırsa

$$\frac{\sum_{uv\notin E(G)}(d_G(u)+d_G(v))^2\sum_{uv\notin E(G)} d_G(u)^2 + d_G(v)^2}{\sum_{uv\notin E(G)}\big(d_G(u)+d_G(v)\big)\sqrt{d_G(u)^2+d_G(v)^2}} \leq \frac{(\delta^2+\Delta^2)^2}{4\delta^2\Delta^2}$$

olup $\bar{F}(G)$ ve $\overline{M_2}(G)$ indekslerinin tanımından

$$\frac{4\delta^2\Delta^2}{(\delta^2+\Delta^2)^2}\bar{F}(G)(\bar{F}(G)+2\overline{M_2}(G)\leq\overline{ESO}(G)$$

elde edilir.

Teorem 2.1.6. G, n noktalı m kenarlı bir graf olsun. O zaman

$$\overline{ESO}(G)\leq\sqrt{\bar{F}(G)(\bar{F}(G)+2\overline{M_2}(G))}$$

dır.

İspat. Yardımcı Teorem 2.1.2'de $a_k=d_G(u)+d_G(v)$, $b_k=\sqrt{d_G(u)^2+d_G(v)^2}$ alınır ve G'nin komşu olmayan kenarlarının toplamı üzerinden uygulanırsa

$$\left(\sum_{uv\notin E(G)}\big(d_G(u)+d_G(v)\big)\sqrt{d_G(u)^2+d_G(v)^2}\right)^{\mathbf{2}}\leq\sum_{uv\notin E(G)}(d_G(u)+d_G(v))^2\sum_{uv\notin E(G)}d_G(u)^2+d_G(v)^2$$
$$=(\bar{F}(G)+2\overline{M_2}(G)\bar{F}(G)$$

elde edilir. Böylece

$$\overline{ESO}(G)\leq\sqrt{\bar{F}(G)(\bar{F}(G)+2\overline{M_2}(G))}$$

sağlanır.

Teorem 2.1.7. G, n noktalı m kenarlı bir graf olsun. O zaman

$$\big(\bar{F}(G)+2\overline{M_2}(G)\big)\overline{M_1}(G)-\big(\overline{ESO}(G)\big)^2\leq 2\bar{m}^2(\Delta^2-\delta^2)^2$$

dır.

İspat. Yardımcı Teorem 2.1.3'te $a_k=d_G(u)+d_G(v)$, $b_k=\sqrt{d_G(u)^2+d_G(v)^2}$ alınırsa ve G'nin komşu olmayan kenarlarının toplamı üzerinden uygulanırsa

$$\sum_{uv\notin E(G)}(d_G(u)+d_G(v))^2\sum_{uv\notin E(G)}(d_G(u)+d_G(v))-\left(\sum_{uv\notin E(G)}\big(d_G(u)+d_G(v)\big)\sqrt{d_G(u)^2+d_G(v)^2}\right)^{\mathbf{2}}$$
$$\leq\frac{s^2}{4}(M_1M_2-m_1m_2)^2$$

olur. Burada $= \overline{m}, M_1 = 2\Delta, M_2 = \sqrt{2}\Delta, m_1 = 2\delta, m_2 = \sqrt{2}\,\delta$ olup yukarıdaki eşitsizlikte yerine yazılırsa istenilen sonuç elde edilir.

Teorem 2.1.8. G, n noktalı m kenarlı bir graf olsun. O zaman

$$-\left|\frac{1}{\overline{m}}\overline{ESO}(G) - \frac{\sqrt{2}\Delta}{\overline{m}}\overline{M_1}(G)\right| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{(1+(-1)^{\overline{m}+1})}{2\overline{m}^2}\right)(\Delta-\delta)^2$$

dır.

İspat. Yardımcı Teorem 2.1.4'te $a_k = d_G(u) + d_G(v)$, $b_k = \sqrt{d_G(u)^2 + d_G(v)^2}$ alınır ve $a = 2\delta$, $b = \sqrt{2}\,\delta$, $A = 2\Delta$, $B = \sqrt{2}\Delta$ seçilirse $0 < a \leq a_k \leq A < \infty$ ve $0 < b \leq b_k \leq B < \infty$ sağlanır. Ayrıca burada

$$\left\lfloor\frac{s}{2}\right\rfloor\left(1 - \frac{1}{s}\left\lfloor\frac{s}{2}\right\rfloor\right) = \frac{s}{4}\left(1 - \frac{(1+(-1)^{s+1})}{2s^2}\right)$$

dır.

Yardımcı Teorem 2.1.4, G'nin komşu olmayan kenarlarının toplamı üzerinden uygulanırsa

$$\left|\frac{1}{\overline{m}}\sum_{uv\notin E(G)}\big(d_G(u)+d_G(v)\big)\sqrt{d_G(u)^2+d_G(v)^2} - \frac{1}{\overline{m}^2}\left(\sum_{uv\notin E(G)} d_G(u)+d_G(v)\right)\left(\sum_{uv\notin E(G)}\sqrt{d_G(u)^2+d_G(v)^2}\right)\right|$$
$$\leq \frac{1}{4}\left(1 - \frac{(1+(-1)^{\overline{m}+1})}{2\overline{m}^2}\right)2\sqrt{2}(\Delta-\delta)^2$$

olup $\sum_{uv\notin E(G)}\sqrt{d_G(u)^2+d_G(v)^2} \leq \sqrt{2}\overline{m}\Delta$ ve mutlak değer özelliği kullanılarak

$$-\left|\frac{1}{\overline{m}}\overline{ESO}(G) - \frac{\sqrt{2}\Delta}{\overline{m}}\overline{M_1}(G)\right| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{(1+(-1)^{\overline{m}+1})}{2\overline{m}^2}\right)(\Delta-\delta)^2$$

elde edilir.

3. BULGULAR

3.1. Bazı Graf İşlemlerinin Eliptik Sombor Tamamlayıcı İndeksi İçin Sınırlar

3.1.1. Birleşim

G_1 ve G_2 gibi iki grafın birleşimi, noktalar kümesi $V(G_1) \cup V(G_2)$ ve kenarlar kümesi $E(G_1) \cup E(G_2)$ olan $G_1 \cup G_2$ ile gösterilen graftır. Bu durumda $V(G_1)$ ve $V(G_2)$'nin ayrık olduğunu varsayıyoruz.

Teorem 3.1.1. G_1 ve G_2 sırasıyla n_1 ve n_2 elemanlı iki graf olsun. O zaman,

$$\overline{ESO}(G_1 \cup G_2) \leq \overline{ESO}(G_1) + \overline{ESO}(G_2) + n_1 n_2 (\Delta_1 + \Delta_2)\sqrt{{\Delta_1}^2 + {\Delta_2}^2}$$

dir. Burada Δ_i, G_i grafının $(i = 1,2)$ maksimum derecesidir.

İspat. Eliptik Sombor Tamamlayıcı indeksin tanımından

$$\overline{ESO}(G_1 \cup G_2) = \sum_{uv \notin E(G_1)} \left(d_{G_1}(u) + d_{G_1}(v)\right)\sqrt{d_{G_1}(u)^2 + d_{G_1}(v)^2}$$

$$+ \sum_{uv \notin E(G_2)} \left(d_{G_2}(u) + d_{G_2}(v)\right)\sqrt{d_{G_2}(u)^2 + d_{G_2}(v)^2}$$

$$+ \sum_{u \in V(G_1)} \left[\sum_{v \in V(G_2)} \left(d_{G_1}(u) + d_{G_2}(v)\right)\sqrt{d_{G_1}(u)^2 + d_{G_2}(v)^2}\right]$$

$$\leq \overline{ESO}(G_1) + \overline{ESO}(G_2) + n_1 n_2 (\Delta_1 + \Delta_2)\sqrt{{\Delta_1}^2 + {\Delta_2}^2}$$

elde edilir.

3.1.2. Toplam

Ayrık noktalar kümeleri $V(G_1)$ ve $V(G_2)$ olan G_1 ve G_2 gibi iki grafın $G_1 + G_2$ toplamı, noktalar kümesi $V(G_1) \cup V(G_2)$ ve kenarlar kümesi $E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv : \mathrm{u} \in V(G_1), \mathrm{v} \in V(G_2)\}$ olan graftır. Bu nedenle, her iki grafın tüm kenarları alınarak bir grafın her noktası diğer grafın her noktasına birleştirilir.

Teorem 3.1.2. G_1 ve G_2 sırasıyla n_1 ve n_2 elemanlı, m_1 ve m_2 kenarlı iki graf olsun. O zaman,

$$\overline{ESO}(G_1 + G_2) \leq 2\sqrt{2}\left(\overline{m_1}(\Delta_1 + n_2)^2 + \overline{m_2}(\Delta_2 + n_1)^2\right)$$

dir. Burada Δ_i, G_i grafının $(i = 1,2)$ maksimum derecesidir.

İspat. $G = G_1 + G_2$ olmak üzere u $\in V(G_1)$ için $d_G(u) = d_{G_1}(u) + n_2$ ve v $\in V(G_2)$ için $d_G(v) = d_{G_2}(v) + n_1$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\overline{ESO}(G_1 + G_2) = \sum_{uv \notin E(G_1)} \left(d_{G_1}(u) + d_{G_1}(v)\right) \sqrt{d_{G_1}(u)^2 + d_{G_1}(v)^2}$$

$$+ \sum_{uv \notin E(G_2)} \left(d_{G_2}(u) + d_{G_2}(v)\right) \sqrt{d_{G_2}(u)^2 + d_{G_2}(v)^2}$$

$$= \sum_{uv \notin E(G_1)} \left(d_{G_1}(u) + n_2\right) + \left(d_{G_1}(v) + n_2\right) \sqrt{\left(d_{G_1}(u) + n_2\right)^2 + \left(d_{G_1}(v) + n_2\right)^2}$$

$$+ \sum_{uv \notin E(G_2)} \left(d_{G_2}(u) + n_1\right) + \left(d_{G_2}(v) + n_1\right) \sqrt{\left(d_{G_2}(u) + n_1\right)^2 + \left(d_{G_2}(v) + n_1\right)^2}$$

$$\leq 2\sqrt{2}(\overline{m_1}(\Delta_1 + n_2)^2 + \overline{m_2}(\Delta_2 + n_1)^2)$$

elde edilir.

3.1.3. Kartezyen çarpım

G_1 ve G_2 graflarının kartezyen çarpımı $G_1 \square G_2$, noktalar kümesi $V(G_1) \times V(G_2)$ olan bir graftır. Burada $u_1 = v_1$ ve $u_2 v_2 \epsilon E(G_2)$ veya $u_2 = v_2$ ve $u_1 v_1 \epsilon E(G_1)$ olması durumunda $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$ ye komşudur. Ayrıca $n_i = |V(G_i)|$ ve $m_i = |E(G_i)|$ $(i = 1,2)$ olmak üzere $G_1 \square G_2$'nin eleman sayısı $n_1 m_2 + m_1 n_2$ ve $G_1 \square G_2$'nin (u_1, u_2) elemanının derecesi $d_{G_1}(u_1) + d_{G_2}(u_2)$'dir.

Teorem 3.1.3. G_1 ve G_2 sırasıyla n_1 ve n_2 elemanlı, m_1 ve m_2 kenarlı iki graf olsun. O zaman

$$2\overline{m}(\delta_1 + \delta_2)^2 \leq \overline{ESO}(G_1 \square G_2) \leq 2\overline{m}(\Delta_1 + \Delta_2)^2$$

Dir.

İspat. $G = G_1 \square G_2$ olsun. Bu durumda $|V(G)| = n = n_1 n_2$ ve $|E(G)| = m = n_1 m_2 + m_1 n_2$ olup $\overline{m} = \binom{n_1 n_2}{2} - n_1 m_2 - m_1 n_2$ dir. Böylece,

$$\overline{ESO}(G) = \sum_{uv \notin E(G)} \left[\left(d_{G_1}(u_1) + d_{G_2}(u_2)\right) \sqrt{d_{G_1}(u_1)^2 + d_{G_2}(u_2)^2}\right]$$

$$+ \left[\left(d_{G_1}(v_1) + d_{G_2}(v_2)\right) \sqrt{d_{G_1}(v_1)^2 + d_{G_2}(v_2)^2}\right]$$

$$\leq \sum_{uv \notin E(G)} 2(\Delta_1 + \Delta_2)^2$$

$$= 2\overline{m}(\Delta_1 + \Delta_2)^2$$

bulunur. Alt sınır benzer şekilde elde edilir.

3.1.4. Bileşim

Ayrık noktalar ve kenarlar kümeleri olan G_1 ve G_2 gibi iki grafın $G_1[G_2]$ bileşimi, noktalar kümesi $V(G_1) \times V(G_2)$ olan bir graf olup $u_1v_1 \epsilon E(G_1)$ veya $u_1 = v_1$ ve $u_2v_2 \epsilon E(G_2)$ olması durumunda $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$ ye komşudur. Ayrıca $n_i = |V(G_i)|$ ve $m_i = |E(G_i)|$ $(i = 1,2)$ olmak üzere $G_1[G_2]$ 'nin eleman sayısı $n_1m_2 + m_1{n_2}^2$ ve $G_1[G_2]$'nin (u_1, u_2) elemanının derecesi $n_2d_{G_1}(u_1) + d_{G_2}(u_2)$ dir.

Teorem 3.1.4. G_1 ve G_2 sırasıyla n_1 ve n_2 elemanlı, m_1 ve m_2 kenarlı iki graf olsun. O zaman,

$$2\overline{m}(n_2\delta_1 + \delta_2)^2 \leq \overline{ESO}(G_1[G_2]) \leq 2\overline{m}(n_2\Delta_1 + \Delta_2)^2$$

dir.

İspat. $G = G_1[G_2]$ olsun. Böylece $|V(G)| = n = n_1n_2$ ve $|E(G)| = m = n_1m_2 + m_1{n_2}^2$ olduğundan $\overline{m} = \binom{n_1n_2}{2} - n_1m_2 - m_1{n_2}^2$ dir. Buradan,

$$\overline{ESO}(G) = \sum_{uv\notin E(G)} \left[\left(n_2d_{G_1}(u_1) + d_{G_2}(u_2)\right)\sqrt{{n_2}^2d_{G_1}(u_1)^2 + d_{G_2}(u_2)^2}\right]$$

$$+\left[\left(n_2d_{G_1}(v_1) + d_{G_2}(v_2)\right)\sqrt{{n_2}^2d_{G_1}(v_1)^2 + d_{G_2}(v_2)^2}\right]$$

$$\leq \sum_{uv\notin E(G)} 2(n_2\Delta_1 + \Delta_2)^2$$

$$= 2\overline{m}(n_2\Delta_1 + \Delta_2)^2$$

elde edilir. Benzer şekilde alt sınır da bulunabilir.

ÇIKAR ÇATIŞMASI/ÇAKIŞMASI BİLDİRİMİ

Yazarlar arasında çıkar çatışması bulunmamaktadır.

YAZAR KATKI ORANLARI

Gül Özkan Kızılırmak: Metodoloji, Araştırma, Kavramlaştırma, İçerik analizi, Makalenin yazımı-İnceleme ve Düzenleme.

KAYNAKLAR

[1] Buyukkose, S., Kaya Gok, G., Ozkan Kizilirmak, G. and Eren, S. (2021). *Graf Teori*. Nobel Akademik Yayıncılık, 1-10.
[2] Gutman I., Trinajstić, N. (1972). Graph theory and molecular orbitals total π-electron energy of alternant hydrocarbons. *Chemical Physics Letters*,17, 535–538.
[3] Furtula, B., Gutman, I. (2015). A forgotten topological index. *Journal of Mathematical Chemistry,* 53(4), 1184–1190.
[4] Gutman, I., Furtula, B. and Oz, M.S. (2024). Geometric approach to vertex degree based topological indices Elliptic Sombor index theory and application. *International Journal of Quantum Chemistry*, 124(2), e27346I.
[5] Doslic T. (2008). Vertex-weighted Wiener polynomials for composite graphs. *Ars Mathematica Contemporanea,* 1, 66–80.

[6] De, N., Abu Nayeem, Sk. Md. and Pal, A. (2016). The F-coindex of some graph operations. *SpringerPlus*, 5, 221.
[7] Ashrafi, A.R., Doslic, T., Hamzeh, A. (2010). The Zagreb coindices of graph operations. *Discrete Applied Mathematics*, 158, 1571–1578.
[8] Azari, M., Iranmanesh, A. (2013). Computing the eccentric-distance sum for graph operations. *Discrete Applied Mathematics,* 161(18), 2827–2840.
[9] Eskender, B., Vumar, E. (2013). Eccentric connectivity index and eccentric distance sum of some graph operations. *Transactions on Combinatorics,* 2(1), 103–111.
[10] Khalifeh, M.H., Yousefi-Azari, H., Ashrafi, A.R. (2008). The hyper-Wiener index of graph operations. *Computers & Mathematics with Applications*, 56, 1402–1407.
[11] Khalifeh, M.H., Yousefi-Azari, H., Ashrafi, A.R. (2009). The first and second Zagreb indices of some graph operations. *Discrete Applied Mathematics*,157(4), 804–811.
[12] Eryaşar, E., Buyukkose, Ş. (2023). Lower Bounds for Zagreb Indices of RNA Graphs Using Graph Algorithms. *Journal of Mathematics and Statistical Science*, 9(1), 1-9.
[13] Huang, Y., Liu, H. (2021). Bounds of modifed Sombor index, spectral radius and energy. *AIMS Mathematics*, 6, 11263–11274.
[14] Kulli, V.R. (2023). Irregularity domination Nirmala and domination Sombor indices of certain drugs, *International Journal of Mathematical Archive*, 14(8), 1-7.
[15] Kulli, V.R. (2023). Delta Banhatti-Sombor indices of certain networks, *International Journal of Mathematics and Computer Research*, 11(11), 3875-3881.
[16] Kulli, V.R. (2023). Modified domination Sombor index and its exponential of a graph, *International Journal of Mathematics and Computer Research*, 11(8), 3639-3644.