

## Radyal Baz Fonksiyonu (RBF) kullanan Ağsız (Meshless) Çözüm Yöntemlerinde Şekil Parametresi ve Merkez Nokta Sayısının Çözümüne Etkisi

Hüseyin YILDIZ<sup>1</sup>, Hasan Ömür ÖZER<sup>2\*</sup>, Birkan DURAK<sup>3</sup>, Erol UZAL<sup>4</sup>

### Öz

Mühendislik ve Fizik problemlerinin incelenmesinde adi diferansiyel denklem (ADD) ve kısmi diferansiyel denklem (KDD)'ler önemli bir yere sahiptir. Fiziksel olaylar, belirli sınır şartları sağlayan diferansiyel denklem sistemleri ile matematiksel olarak modellenebilir. Genellikle denklem sisteminin analitik çözümünü bulmak mümkün olmaz. Bu nedenle çeşitli sayısal yöntemler geliştirilmiştir. Günümüzde en çok kullanılan sayısal çözüm yöntemlerinden ikisi Sonlu Elemanlar Yöntemi (SEY) ve Sonlu Farklar Yöntemi (SFY)'dir. Bu yöntemlerde çözüm alanı ağ adı verilen küçük parçalara (bölgelere) ayrılarak hesaplamalar yapılır. Ağ örme işlemi oldukça karmaşık ve uzun zaman alan bir işlemdir. Kırılma mekaniği ve hareketli sistemlerin modellenmesinde her hesaplama sonrası ağın yenilenmesi gereklidir. Araştırmacılar, özellikle 20. yüzyılın sonlarında bu zorlukların üstesinden gelmek için ağsız çözüm yöntemleri geliştirdiler. Çözüm alanına düzenli veya düzensiz örnekleme noktaları yerleştiren ağsız çözüm teknikleri için uygun bir temel fonksiyon ailesi de gereklidir. Önerilen baz fonksiyon ailesi, diferansiyel denklem sistemini ve sınır şartlarını sağlayacak şekil katsayıları ile temsil edilir. Bu çalışmada radyal baz fonksiyon (RBF) kullanan ağsız çözüm yöntemi bir boyutlu ve iki boyutlu ısı geçiş problemlerine uygulanmıştır. İncelenen problemlerde merkez noktaların ve şekil katsayısının benzetim sonuçlarına etkisi incelenmiştir. Bulgular, kontrol (kollokasyon) noktalarının sayısının doğrudan çözümün kararlılığıyla ilişkili olduğunu ve kontrol nokta sayısının merkez nokta sayısından fazla olduğunda kararlılığa katkıda bulunduğunu göstermektedir. Şekil yapısının uygun çözümü için merkez nokta değişikliklerinin büyüklüğünde bir artışın gerekli olduğu gözlemlenmiştir. Şekil katsayısı arttıkça doğru bir çözüme ulaşmak için merkez nokta sayısının ve yineleme sayısının da artırılması gerektiğini göstermektedir.

**Anahtar Kelimeler:** Kollokasyon yöntemi, Radyal baz fonksiyon, Sayısal çözüm, Şekil fonksiyonu.

## Effect of the Shape Parameter and the Number of Center Points on the Solution in Meshless Solution Methods Using Radial Basis Function (RBF)

### Abstract

Ordinary differential equations (ODE) and partial differential equations (PDE) have an important role in solving engineering and physics problems. Physical phenomena may be represented mathematically using differential equation systems under certain boundary conditions. However, it is usually not possible to find an analytical solution to the resulting system of equations. Therefore, various numerical methods have been developed. Currently, the Finite Element Method (FEM) and the Finite Difference Method (FED) are the most widely used numerical solution techniques. In these methodologies, computations are carried out by dividing the solution space into small pieces called mesh. This procedure is a highly complex and time-consuming process. Due to coupled calculation points within the mesh, it is necessary to update the mesh after each calculation when modelling fracture mechanics and dynamic systems. Researchers developed meshless solution methods to address these challenges, especially in the late 20th century. For meshless solution techniques that place regular or irregular sampling points in the solution domain, a suitable family of basis functions is also required. This family is expressed by the shape coefficients to satisfy the system of differential equations and boundary conditions. By considering one and two dimensional heat transfer problems, this study investigated the effect of center points and shape coefficients on the simulation results in the meshless solution method using Radial Basis Functions (RBF). The results show that the number of control (collocation) points is directly related to the stability of the solution and contributes to stability when the number of control points is greater than the number of center points. It has been observed that an increase in the magnitude of the center point changes is necessary for the optimal solution of the shape structure. The results of this study demonstrate that as the shape coefficient increases, the number of centre points and the number of iterations must also be increased to achieve an accurate solution.

**Keywords:** Collocation method, Radial basis function, Numerical solution, Shape function.

<sup>1</sup>İstanbul Üniversitesi-Cerrahpaşa, Mühendislik Fakültesi, Makine Mühendisliği, İstanbul, Türkiye, [huseyin.yildiz@iuc.edu.tr](mailto:huseyin.yildiz@iuc.edu.tr) [ezul@iuc.edu.tr](mailto:ezul@iuc.edu.tr)

<sup>2</sup>İstanbul Üniversitesi-Cerrahpaşa, Teknik Bilimler MYO, Elektrik ve Enerji Bölümü, İstanbul, Türkiye, [hasanomur.ozer@iuc.edu.tr](mailto:hasanomur.ozer@iuc.edu.tr)

<sup>3</sup>İstanbul Üniversitesi-Cerrahpaşa, Teknik Bilimler MYO, Motorlu Araçlar ve Ulaştırma Teknolojileri Bölümü, İstanbul, Türkiye, [birkand@iuc.edu.tr](mailto:birkand@iuc.edu.tr)

\*Sorumlu Yazar/Corresponding Author

## 1. Giriş

Mühendislik alanındaki tasarım ve optimizasyon uygulamalarında genellikle kısmi diferansiyel denklem (KDD) sistemlerinin çözümüne ihtiyaç duyulur. Problemlerin analitik çözümlerinin yapılması hızlı ve kesin sonuca ulaşmayı sağlar. Her ne kadar basit problemler için analitik çözümler mümkün olsa da mühendislikte karşılaşılan pek çok problemin karmaşık geometrisi veya sınır şartları nedeni ile analitik çözümünün yapılması mümkün olmaz (Gingold ve Monaghan, 1977). Bu durumda belirli sınır şartlarını ve problemi yöneten kısmi diferansiyel denklem sistemini sağlayan sayısal çözüm bulunmaya çalışılır.

Sayısal metotlarda ilk olarak problemin geometrik modeli oluşturulur, ardından bilgisayar ortamında hesaplamalar yapılır (Ghahfarokhi ve ark., 2022). Sonlu elemanlar yöntemi (SEY) (Mugglestone ve ark., 1999; Chong ve ark., 2019; Staton ve ark., 2001), Sonlu hacimler yöntemi (SHY) (Fallah ve ark., 2000) ve sonlu farklar yöntemi (SFY) mühendislikte en çok kullanılan sayısal analiz yöntemleridir (Pickering ve ark., 2001; Pandey ve ark., 2022; Papini ve Gerada, 2014). Bu yöntemlerin ısı ve kütle transferi, akışkanlar mekaniği, hidrodinamik ve yapı mekaniği gibi alanlardaki iki ve üç boyutlu hesaplamaların yapılmasında, sınır değer ve başlangıç değer problemlerinin tümünde pek çok uygulama ile karşılaşılır. Belirtilen yöntemlerin ortak yönlerinin başında, sistemin çözümünü yapmak üzere bir ağ yapısına (mesh) ihtiyaç duymaları gelmektedir. SEY ve SHY yöntemlerinde, her bir eleman çoğunlukla doğrusal bazen de yüksek dereceli fonksiyonlar ile temsil edilir. Problemi yöneten diferansiyel denklem sistemi ve probleme ait sınır şartları, ağ üzerinde yer alan noktalar (nod) üzerinde uygulanarak, problemin çözümü cebirsel bir denklem sistemine indirgenir. Elde edilen cebirsel denklem sistemi çoğunlukla matris formuna getirilerek çözülebilir. Denklemlerin çözümünde genellikle Rayleigh–Ritz veya Galerkin yöntemleri tercih edilir (Zienkiewicz ve ark., 2005; Jin, 1993). Ancak karmaşık yapıya sahip sistemlerde doğrusal olmayan (non-linear) denklemlerle karşılaşılabilir. Bu durumda her bir elemanı ifade eden katsayılar, iteratif yöntemler kullanılarak bulunur. SFY’nde de benzer şekilde bir ağ yapısı oluşturulur. SEY’nden farklı olarak çözümün elde edilmesi için doğrudan fonksiyonlar kullanmak yerine, her bir eleman için özel fonksiyonlar önerilir. Sonlu elemanlar teorisinden yararlanılarak sınır şartları ve diferansiyel denklem sistemi eleman fonksiyonları kullanılarak nodlar üzerinde uygulanır. Sonlu farklar teorisinde fonksiyonun türevleri, önceki veya sonraki noktaların değerlerinin kombinasyonu olarak ifade edilir. Her bir nokta için sayısal hata (kalan veya hatanın integrali) sıfır olacak şekilde diferansiyel denklemler çözülür (Çengel ve Ghajar, 2020). Bu yöntemlerin en büyük avantajı karmaşık geometriye sahip sistemlerde dahi çözüm ağı oluşturarak çözüm elde edilmesini sağlamalarıdır. Ancak, tasarım sürecine ihtiyaç duymaları, hesaplama yükü ve hesaplama süresi açısından oldukça maliyetli olmaları en büyük dezavantajlarıdır (Boglietti ve ark., 2009). Bunun

yanında ağ elemanlarının sürekli olması nedeni ile çatlak analizi ve kırılma analizi gibi süreksizlikler içeren problemlerde büyük zorluklar ile karşılaşılır (Chen ve ark., 2004).

Özgün yazılımların oluşturulması ileri düzey programlama bilgisi gerektirdiğinden, genellikle pahalı paket programlar olarak ticari kuruluşlar tarafından kullanıcılara sunulurlar. Bu nedenle yüksek maliyetlidirler. Araştırmacılar SEY ve SFY metotlarının zorluklarından kurtulmak için yeni metotlar üzerine çalışmaktadır. Son yıllarda ön plana çıkan ağsız (meshless) çözüm yöntemleri en dikkat çekici araştırma konusu haline gelmiştir. Ağsız yöntemler, problemin çözümü için karmaşık bir ağ oluşturmaya ihtiyaç duymaz. Çözüm bölgesinde periyodik veya keyfi seçilen çözüm noktaları üzerinden hesaplama yapılmasına imkan sağlar. Böylece çözüm belirli sınır veya başlangıç şartları altında kısmi diferansiyel denklem sisteminin ara noktalarda ve sınır bölgelerinde sağlatılmasına indirgenir. Sonlu elemanlar ve sonlu farklar gibi yöntemlerin aksine ağsız yöntemlerde, çözüm ağının getirdiği kısıtlar ortadan kaldırılabilir. Ağsız yöntemler, SEY ve SHY’inde olduğu gibi birbirine bağlı nodlardan oluşan bir ağa gereksinim duymaksızın, keyfi olarak dağılmış noktalar üzerinden hesaplamaların yapılmasına izin verirler (Wang ve Qin, 2020). Bu durum SEY’inde eleman şekillerinin bozulmasından kaynaklanan hataların ağsız yöntemlerde ortada kalkmasını sağlar.

Ağsız yöntemler, ilk olarak 1970’li yıllarda parçacık hidrodinamiği ve astrofizik (Gingold ve Monaghan, 1977) problemlerinin çözümlerinde kullanılmaya başlanılmıştır. Daha sonra akışkanlar dinamiği problemlerinde kullanılmıştır (Nayroles ve ark., 1992). (Libersky ve ark., 1993) yöntemi katı mekaniğine uygulamışlardır. Ancak katı mekaniği problemlerinde sınır bölgelerinde hassasiyet eksikliği, gerilme değerlerinin ise kararlı olmadığını tespit etmişlerdir. 1990’larda Galerkin yöntemine dayalı yeni bir ağsız yöntemler sınıfı ortaya çıkmıştır. Elemansız Galerkin yöntemleri (EFG), hareketli en küçük kareler yaklaşımıyla kısmi diferansiyel denklemleri çözmeye yönelik geliştirilen en gelişmiş yöntemlerdir. EFG yöntemlerinde düğüm verilerine gereksinim vardır, bu verilerin dışında hiçbir eleman bağlantısına ihtiyaç duyulmaz (Belytschko ve ark., 1994).

(Nayroles ve ark., 1992) dağınık eleman yöntemi (DEM) olarak adlandırdıkları yöntemi, kısmi diferansiyel denklemlerin Galerkin çözümünde kullandılar. Geliştirilmekte olan farklı yöntemler ile birlikte ağsız yöntemler çeşitli alanlarda kullanılmaya devam edildi.

(Cao ve ark., 2008) iki boyutlu bir matematiksel model üzerinde Stokes sürüklenme kuvvetini içeren elektrotermal akışta, birbirine geçmiş elektrotlara sahip mikro kanallarda parçacıklara uygulanan kuvvetleri analiz etmede ağsız yöntemlerden faydalanmıştır. (Stach, 2014) malzemelerin moleküler düzeydeki kırılma problemlerinin incelenmesinde ağsız yöntemleri konusunda araştırmalar yapmıştır. Bu konudaki uygulamasını ortopedik implantların kırılma süreçlerinin modellenmesinde yapmıştır. (Falzon ve Muthu, 2018) heterojen malzemelerdeki çatlakların yayılmasının modellenmesinin sonlu elemanlar metoduyla çözülmesinde karşılaşılan zorluklar nedeniyle bu konuda avantaj sağlayan ağsız yöntemlerden biri olan EFG’yi uygulamıştır. (Wang ve

Qin, 2019) tabanı elastik olan veya olmayan ince plaka bükme problemlerinin homojen ve özel çözümlerini bulmak için ağsız yöntemleri kullanmıştır. Söz konusu problemlerinde sayısal çözümlerinin analitik çözümlere yakınsaması yöntemin faydasını göstermektedir. (He ve ark., 2020) düzlem problemlerinin çözümünde kullanılmak üzere sinir ağlarından yardım alan ağsız bir yöntem geliştirmiştir. Bu yöntemin, nesnelerin interneti, giyilebilir teknolojileri içeren problemlerin çözümünde kullanılacağı öngörülmektedir. (Li ve ark., 2021) tasarım ve imalat süreçlerinde çok önemli olan plakada ısı transferi modellenmesi probleminde ağsız yöntemleri kullanmışlardır. Çalışmada iki boyutlu ısı iletimi problemi düzleştirilmiş ağsız parçacık hidrodinamiği yöntemi ile çözülmüştür. (Narimani ve Dehghan, 2022) kanser immünoterapisinde önemli bir role sahip olabilecek bir matematiksel modelin simülasyonunda ağsız yöntemleri kullanmışlardır. Geliştirmiş oldukları sayısal yöntemin, klasik sonlu elemanlar yöntemlerinden üstünlüğü alınan sonuçlar ile doğrulanmıştır. (Zarin, 2022) kısmi diferansiyel denklemler kullanarak hareketli bireylerde hastalıkların yayılmasını yakalamak için yeni bir matematiksel model sunmaktadır. Söz konusu modelde ağsız yöntemler kullanılarak, koronavirüsün (COVID-19) bulaşması konusunda matematiksel bir epidemiyolojik model elde edilmiştir. (Zhong ve ark., 2023) termal yükleri ve aerodinamik etkileri dikkate alınarak süpersonik hava akışındaki plakaların titreşim tepkisini analiz etmek için etkili bir yöntemi ağsız yöntemlerden faydalanarak ortaya koymuştur.

Ağsız yöntemler, SEY ve SHY gibi sayısal çözüm metodlarına nazaran günümüzde yeni geliştirilmekte olan bir yöntem sınıfıdır. Son yıllarda radyal baz fonksiyon (RBF) kullanımı ile birlikte mühendislik problemlerinin çözümünün yanı sıra yapay sinir ağı modellerin geliştirilmesinde de önemli bir role sahiptir. Literatürde farklı fizik problemleri için çeşitli ağsız yöntem çözümleri ile ilgili çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmalar ağsız yöntemlerde şekil fonksiyonunun önemini açıkça vurgulamıştır (Pekediş ve Yıldız, 2010).

Çalışmamızda, RBF kullanan kollokasyon temelli ağsız çözüm yönteminin, bir boyutlu ve iki boyutlu ısı transferi probleminin çözümü, şekil parametresi ve merkez nokta sayılarının çözüme etkisi ele alınmıştır. Makalenin birinci bölümünde mevcut çalışmalar ve sayısal yöntemlerin tarihçesine değinilmiştir. İkinci bölümünde, kollokasyon yöntemi, radyal baz fonksiyonlar ve ısı problemlerinin temel denklemleri açıklanmıştır. Üçüncü bölümde, bir ve iki boyutlu ısı geçiş problemleri için RBF kullanan kollokasyon yöntemi çözümleri yapılarak farklı şekil parametresi ve merkez nokta sayıları için sonuçlar elde edilmiştir. Dördüncü ve son bölümde ise elde edilen sonuçlar değerlendirilmiştir. Çalışmada Gauss RBF, Multi-kuadrik RBF ve Ters kuadrik RBF için şekil ve merkez nokta parametreleri farklı değerlerde hesaplanarak kabul edilebilir çözüm aralığını oluşturan parametre değerleri elde edilmiştir. Çalışmada, iki boyutlu ısı geçiş problemi için Gauss RBF'nin diğer metodlara göre daha iyi sonuç verdiği gösterilmiştir. Radyal baz fonksiyonu şekil parametresi, merkez nokta sayısı ve kollokasyon nokta sayılarının farklı değerlerde çözümleri yapılmış ve merkez

nokta sayısı ile kollokasyon nokta sayısı eşit alındığında çözümün kararsız olduğu, kollokasyon nokta sayısının merkez nokta sayısından fazla olması durumunda çözüm bölgesinin kararlı olduğu gösterilerek literatüre katkı sağlanmıştır.

## 2. Yöntem

### 2.1. Kollokasyon yöntemi

Kollokasyon metodu sayısal yöntem formülasyonlarından güçlü-form yöntemleri sınıfındadır. Yöntem ağırlıklı kalanlar yöntemlerinden biri olup çeşitli mühendislik problemlerinin çözümü için kullanılan bir metottur. Kısmi ve adi diferansiyel denklemler, integro diferansiyel denklemlerin çözümünde ve sayısal verilerin yorumlanmasında kullanılmaktadır (Durak, 2020; Karakoç, 2018; Aydın, 2022). Yöntem, çözümün bazı katsayılarla çarpılmış olan sonlu sayıdaki polinom veya fonksiyonun toplamı olarak ifade edilmesi esasına dayanır.

Denklem (1),  $\Omega$  çözüm bölgesinde tanımlı bir adi diferansiyel denklem (ADD) sistemi  $L$ ; diferansiyel operatör,  $f(x)$ ; kaynak terim ve  $u$ ; diferansiyel denklemin çözüm fonksiyonu olmak üzere

$$L(u) = f(x) \quad (1)$$

şeklinde gösterilebilir. Bu denklem sisteminin  $\hat{u}$ ; yaklaşık çözümü

$$u(x) \approx \hat{u}(x) = u_0(x) + \sum_{i=1}^n C_i \Phi_i(x) \quad (2)$$

olarak yazılabilir. Burada,  $u_0$ ; problemin sınır şartlarını sağlayan keyfi bir fonksiyon iken  $\phi_i$ ; diferansiyel denklemi sağlamak üzere önerilen baz fonksiyon ailesidir (Chakraverty ve ark., 2019). Baz fonksiyonun türü konusunda herhangi bir sınırlama bulunmaz. Genellikle yüksek kararlılığı nedeni ile Radyal baz fonksiyon (RBF) olarak seçilir.

Çoğunlukla sınır şartları ve çözüm ailesi birbirinden ayrılmaz ve  $u_0$  sıfır olarak kabul edilir. Bazı durumlarda  $u_0$  nin sıfırdan farklı alınması çözümü kolaylaştırır. Çalışmada  $u_0(x) = 0$  alınmıştır.  $\hat{u}$  ifadesi Denklem (1)' de yerine yazılarak

$$R(x) = f(x) - L[\hat{u}(x)] = 0 \quad (3)$$

elde edilir. Denklemdeki  $R(x)$  kalan (residual) olarak tanımlanır. Denklem (2)'deki polinom ailesi keyfi olarak seçilebilir. Örneğin üstel, trigonometrik, polinom veya bağımsız değişkeni içeren herhangi bir formda olabilir. Kalandan yararlanarak kurulan denklem sistemi çözülerek yaklaşık çözüme ulaşılır. Baz fonksiyon sayısı  $n$  olan bir boyutlu bir sistem için, en az iki adet sınır şartı ve çözüm bölgesi üzerinde  $n - 2$  adet kollokasyon noktası gerekir. Eşitlik 3, her bir kontrol noktası için uygulandığında Eşitlik 4 ile verilen denklem sistemi elde edilir.

$$[A]_{n \times n} [C]_{n \times 1} = [B]_{n \times 1} \quad (4)$$

Burada  $[A]$  katsayılar matrisini,  $[B]$  sonuç vektörü ve  $[C]$  bilinmeyen katsayıları ifade etmektedir. Homojen bir denklem sisteminde  $[B]$  matrisinde sınır değerler dışında kalan terimler 0'dır. Ancak homojen olmayan sistemlerde homojenliği bozan kaynak terimlerden kaynaklı ek terimler gelir.

## 2.2. Radyal baz fonksiyon (RBF)

Kollokasyon yöntemi teorik olarak problemin çözümü için herhangi bir sınır koymaz. Baz fonksiyonlar keyfi olarak seçilebilir. Ancak, uygulamada problemin geometrisine ve sınır şartlarına uygun baz fonksiyonlar seçilmez ise, hesaplama hataları nedeni ile çözüme ulaşamayabilir. Örnek olarak üstel bir baz fonksiyon seçilir ise yüksek dereceli fonksiyonların çözümde ağırlığı düşük dereceden polinomlara göre büyük olur ve en küçük değişimlerde sistem ıraksar. Yöntemde karşılaşılan başka bir zorluk, seçilen baz fonksiyonların çözüm bölgesinin bazı noktaları için süreksizliğe sahip olmaları durumudur. Bu duruma çözüm olarak araştırmacılar konum bazlı fonksiyonların önerilebileceğini ortaya koymuştur. Örneğin kullanılan Radyal baz fonksiyonları (RBF) belirli merkez noktasında tanımlı olan ve merkezden belli bir mesafede olan tüm noktalar için aynı değeri alan, merkezden uzaklaştıkça küçülen kararlı fonksiyonlardır. Çözüm bölgesi içerisinde süreklidir ve her dereceden türevi alınabilir fonksiyonlar olmaları nedeni ile son yıllarda öne çıkmıştır (Altınkaynak, 2020; Fasshauer ve McCourt, 2015). Literatürde RBF fonksiyonlarının diferansiyel denklem sistemlerinin çözümünde kullanımı Kansa'nın çalışmaları ile başlamıştır (Kansa, 1986; Kansa, 1990). İlk çalışmada hidrodinamik problemlerini çözmek için Multiküadratik baz fonksiyon kullanılmıştır (Kansa, 1986). Daha sonra ısı transferi, yapısal analiz, mekanik problemler ve optik olmak üzere mühendisliğin birçok alanına uygulanmıştır (Tanbay, 2019).

Günümüzde kullanılan bazı RBF fonksiyonları Tablo 1 ile verilmiştir (Fornberg ve Flyer, 2015).

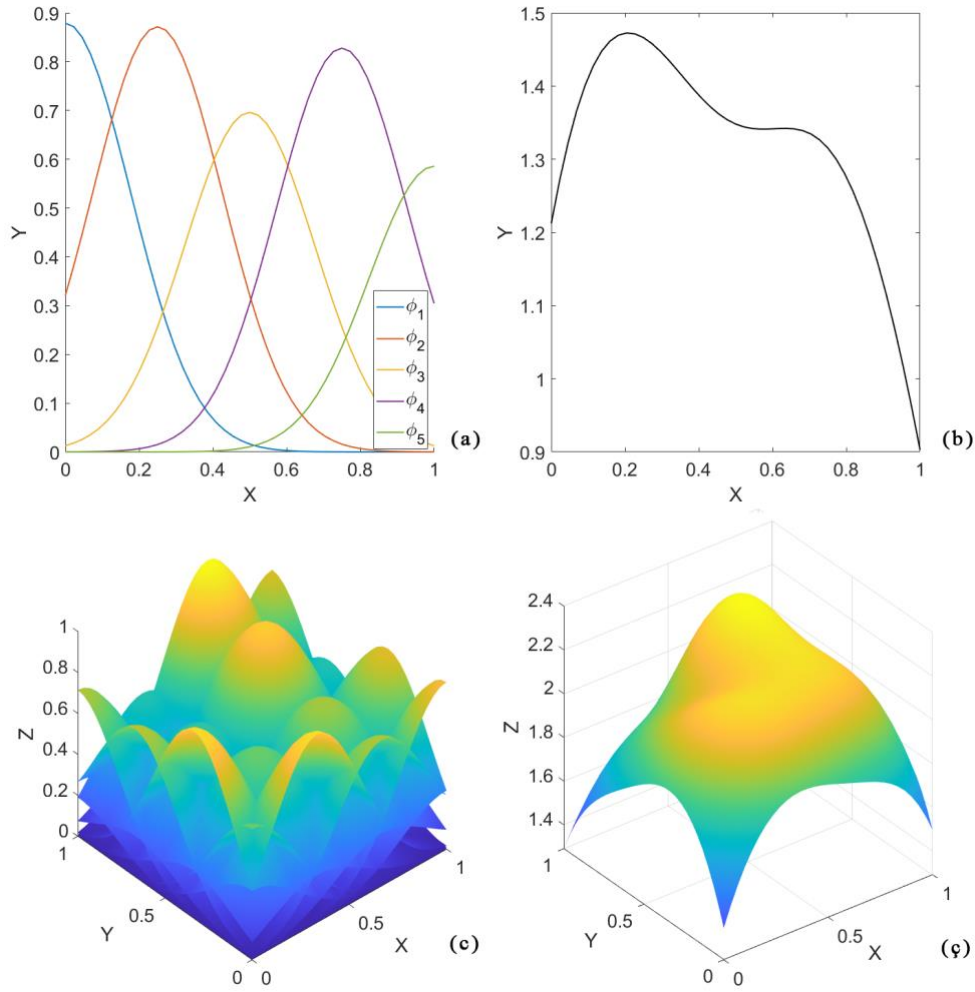
**Tablo 1.** Bazı RBF fonksiyonu örnekleri.

İsim	Formül	Kısıt
Gauss	$\phi_i(r_i) = e^{-(\varepsilon r_i)^2}$	$\varepsilon > 0$
Genel Multi-kuadrik	$\phi_i(r_i) = (1 + (\varepsilon r_i)^2)^\beta$	$\varepsilon > 0, \beta \in \mathbb{R}$
Multikuadrik (Multiquadric)	$\phi_i(r_i) = \sqrt{1 + (\varepsilon r_i)^2}$	$\varepsilon > 0$
Ters kuadrik (Inverse quadric)	$\phi_i(r_i) = \frac{1}{1 + (\varepsilon r_i)^2}$	$\varepsilon > 0$
Ters multikuadrik (Inverse multiquadric)	$\phi_i(r_i) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\varepsilon r_i)^2}}$	$\varepsilon > 0$
Sinüs-RBF	$\phi_i(r_i) = \begin{cases} \frac{\sin(\varepsilon r_i)}{\varepsilon r_i}, & r_i > 0 \\ 1, & r_i = 0 \end{cases}$	$\varepsilon > 0$

RBF fonksiyonları merkez noktasından uzaklaştıkça etkisi hızla azalacak fonksiyonlar olarak seçilir. Burada  $\varepsilon$  şekil katsayısı olarak bilinir ve fonksiyonun etki alanının bir göstergesidir.  $r_i$  fonksiyonun merkez noktasından uzaklığı ifade eder ve üç boyutlu daimi rejimde bulunan bir sistem için Eşitlik (5) ile gösterilir.

$$r_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2} \quad (5)$$

Burada  $x_i, y_i, z_i$  merkez nokta olarak seçilen  $P(x_i, y_i, z_i)$  noktasının koordinatlarını ifade etmektedir.  $\varepsilon$ , RBF fonksiyonları için ortak bir parametredir. Şekil 1 ile bir boyutlu ve iki boyutlu RBF fonksiyon yapıları örnek olarak verilmiştir. Yaklaşık çözüm, farklı noktalarda seçilen baz fonksiyonların toplamı olarak temsil edilir. Genellikle  $\varepsilon$  büyüdükçe fonksiyonun etki alanı küçülür.  $\varepsilon$ 'nin farklı değerleri için diferansiyel denklem sistemlerinde çözüm bulmak mümkündür. Ancak her  $\varepsilon$  değeri için çözüm elde etmek mümkün olmaz. Bu durum  $\varepsilon$  parametresinin seçiminin RBF baz fonksiyonu kullanan sistemlerde ne kadar önemli olduğunun bir göstergesidir. Dolayısı ile  $\varepsilon$ 'un optimize edilmesi önemli bir araştırma konusudur (Altınkaynak, 2020; Fornberg ve Flyer, 2005; Fasshauer, 2007).



**Şekil 1.** Bir boyutlu homojen dağılmış keyfi RBF formları  
 (a). Bir boyutlu RBF'lerin çözüm alanı (b). Bir boyutlu RBF toplamı  
 (c). İki boyutlu homojen dağılmış keyfi RBF formları (d). İki boyutlu RBF toplamı

### 2.3. Kartezyen koordinat sisteminde ısı transferinin temel denklemleri

Isı transferi konusu mühendislerin en sık karşılaştığı temel problemlerdendir. Homojen, izotropik (özellikleri her yönde eşit) ve zamana bağlı üç boyutlu bir sistemde ısı transferi olaylarını yöneten denklem sistemi Denklem (6) ile verilmiştir (Hahn ve Özışık, 2012).

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{k} q = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (6)$$

Denklemden,  $T$ ; sıcaklık,  $k$ ; ısı iletim katsayısı (W/(mK)),  $\alpha$ ; ısı yayılım katsayısı (m<sup>2</sup>/s),  $q$ ; ısı üretimi (W/m<sup>3</sup>) olarak tanımlanmaktadır. Kalıcı hal rejimi problemlerinde, zamana bağlılık olmamasından dolayı, denklemin sağ tarafı hesaplamalara dahil edilmez ve Denklem (7) ile ifade edilir.



$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{k} q = 0 \quad (7)$$

Sınır şartları genellikle sabit sıcaklık ve sınırdaki akışkan etkileşimi (taşıyım) olarak karşımıza çıkar. Işıyım miktarı genellikle ihmal edilebilecek kadar azdır. Ancak bazı özel durumlarda ışınım sınır şartı da kullanılır. Genellikle sistem içerisinde belirli noktadan veya bölgeden ısı üretimi olur.

Isı problemlerinde en sık karşılaşılan sınır şartları şöyledir;

Sabit sıcaklık sınır şartı;

$$T(x, y, z) = T_0, \quad (8a)$$

$\vec{n}$  birim normal olmak üzere, ısı taşıyım sınır şartı;

$$-k \frac{\partial T(x, y, z)}{\partial \vec{n}} = h(T(x, y, z) - T_\infty), \quad (8b)$$

burada,  $T_0$ ; sınırın sabit sıcaklığı,  $h$ ; yüzey ile akışkan arasında tanımlı ısı taşıyım katsayısı  $W/(m^2K)$ , ve  $T_\infty$ ; dış ortam sıcaklığıdır.

Bir boyutlu bir sistem için Denklem (7) sadeleşerek Denklem (10)'a indirgenir.

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{1}{k} q = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{1}{k} q = 0 \quad (10)$$

Eşitlik 9 ve Eşitlik 10, bir ve iki boyutlu, zamandan bağımsız sistemlerin ısı geçişini yöneten diferansiyel denklemlerdir. Sıcaklık dağılımını veren fonksiyonu elde etmek için Eşitlik 9 ve Eşitlik 10 uygun sınır şartları altında analitik olarak çözülür (Çengel ve Ghajar, 2020).

Her iki ucunda sabit sıcaklık ( $T(0) = T_0$  ve  $T(L) = T_L$ ) olan sistem için analitik çözüm;

$$T(x) = \frac{T_L - T_0}{L} x + T_0 \quad (11)$$

Bir ucu sabit sıcaklık ( $T(0) = T_0$ ) ve diğer ucu taşınım ( $-\frac{dT}{dx} = h(T_L - T_\infty)$ ) olan bir sistem için analitik çözüm

$$T(x) = -\frac{h(T_L - T_0)}{(k + Lh)}x + T_0 \quad (12)$$

şeklindedir.

İçerisinde  $q(x) = q_0 \sin(x\pi)$  formunda ısı dağılımı olan, bir ucu sabit sıcaklık ( $T(0) = T_0$ ) ve diğer ucu taşınım ( $-\frac{dT}{dx} = h(T_L - T_\infty)$ ) sınır şartı ile ısı denkleminin analitik çözümü;

$$T(x) = \frac{q_0 \sin(L\pi x)}{k\pi^2} - \frac{hq_0 \sin(L\pi) + k\pi q_0 \cos(L\pi) + hk\pi^2(T_0 - T_\infty)}{k\pi^2(k + Lh)}x + T_0 \quad (13)$$

eşitliği ile verilmektedir.

### 3. Bulgular ve Tartışma

#### 3.1. Bir Boyutlu Isı Geçişi

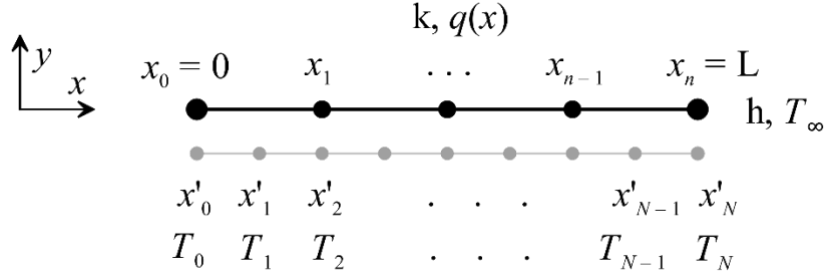
Mühendislik problemlerinde çeşitli simetriler gösteren (düzlemsel, silindirik, küresel vb.) geometriler bir boyutlu ısı geçişi problemi olarak ele alınabilir. Şekil 2’de bir boyutlu homojen ve izotropik bir sistemin  $n$  elemanlı nokta ayrıştırması görülmektedir. Malzeme ısı iletim katsayısı  $k = 273$  ( $W/mK$ ),  $x_0 = 0$ ’da sabit sıcaklık ( $T_0 = 20^\circ C$ ) sınır şartı,  $x_n = L = 1$ ’de akışkan etkileşimi sınır şartı bulunmaktadır.

( $h = 17$  ( $W/m^2K$ ),  $T_\infty = 100^\circ C$ ). Isı üretimi konumun bir fonksiyonu olarak alınmıştır (Eşitlik 14).

$$q = q_0 \sin(x\pi) \quad , \quad q_0 = 10000 \text{ W/m}^3 \quad (14)$$

Kollokasyon metodunun uygulandığı birçok araştırmada, kollokasyon nokta sayısı ile katsayıların optimize edilmesi için gerekli kontrol nokta sayıları (hesaplama nokta sayıları) eşit alınır. Böylece çözüm esnasında kare matris elde edilir ve işlem kolaylığı sağlanır. Ancak bu durum zorunlu değildir. Ağsız yöntemlerde genellikle düşük sayıda tepe noktası alınırken, daha iyi optimizasyon için merkez nokta etrafında birkaç hesaplama noktası olması tercih edilir. Şekil 2’de hesaplamalarda kullanılacak RBF ailesinin merkez noktaları  $x$  ile gösterilmekte olup  $n$  adet noktadan oluşmaktadır.

Katsayıların optimizasyonu için hesaplamalarda kullanılacak noktalar ise  $x'$  ile gösterilmektedir ve  $N$  adet noktadan oluşmaktadır ( $N \geq n$ ).



Şekil 2. Bir boyutlu sınır değer problemi için çözüm alanı.

Anlamalı bir kıyaslama için merkez nokta sayısı ile hesaplama (kollokasyon) nokta sayısı arasında Eşitlik (15) ile verilen bağıntı kullanılmıştır. Burada  $m$ ; bir merkez üzerinden hesaplamalara dahil edilen nokta sayısıdır. Şekil 3'te  $m = 1, 2, 3$  değerleri için merkez nokta sayısı ile ortalama karesel hata (RMSE) arasındaki bağıntı gösterilmiştir. Hata değeri;  $x = 0$  'da sıcaklık farkı,  $x = L$  'de ısı taşınım miktarı, ara bölgede ise diferansiyel denklemin kalanı olarak alınmıştır (Eşitlik 16).  $D$  veri sayısı olmak üzere RMSE değeri Eşitlik (17) ile hesaplanır (Yıldız ve ark., 2020).

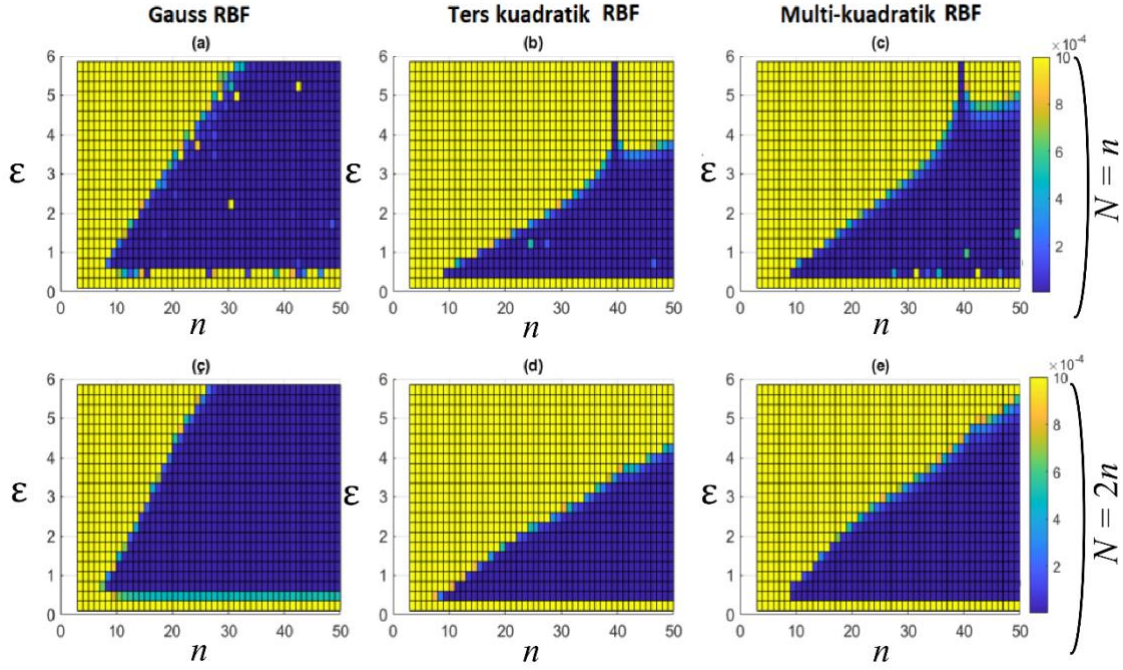
$$N = (n - 1)m + 1 \quad (15)$$

$$e = \begin{cases} T(x) - T_0, & x = 0 \\ \frac{d^2T(x)}{dx^2} + \frac{1}{k}q, & 0 < x < L \\ -k \frac{dT(x)}{dx} - h(T(x) - T_\infty), & x = L \end{cases} \quad (16)$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{D} \sum_{n=1}^D e_i^2} \quad (17)$$

Sonuçlar Gauss, Ters kuadrik ve Multi-kuadrik RBF'lar için elde edilmiştir. Sistemin bazı merkez nokta ve şekil fonksiyon değerlerinde kararsız olması nedeni ile sonuçlar filtrelenmiştir. Grafik üzerinde mavi bölgeler  $RMSE < 0.001$  değerlerini, sarı bölgeler ise  $RMSE > 0.001$  değerlerini göstermektedir.  $N \geq 2n$  olması durumunda sistemin daha kararlı olduğunu görülür.  $N = n$  durumu için her üç RBF için çözüm bölgesinde kararsızlıklar olduğunu gösterilmektedir (Şekil 3 a,b,c).  $N \geq 2n$  durumlarında ise çözüm bölgesi oldukça kararlıdır (Şekil 3 ç,d,e). Her üç RBF içinde  $\varepsilon$  değeri yükseldikçe yakınsama için gerekli en küçük merkez nokta sayısının arttığı

açıkça görülmektedir. En geniş kabul edilebilir yakınsama alanı Gauss fonksiyonunda sağlanmaktadır. Gauss RBF sonuçlarının büyük değerleri için düşük merkez noktası sayılarında çözüme ulaşabilirken diğer RBF'larda çok daha yüksek sayıda merkez noktaya ihtiyaç duyulduğu açıktır (Şekil 3). Bu durum Gauss RBF için daha düşük işlem gücü ile hesaplama yapılabileceğini gösterir. Ayrıca Gauss RBF diğer yöntemlere göre daha kararlı olduğu da görülmektedir.

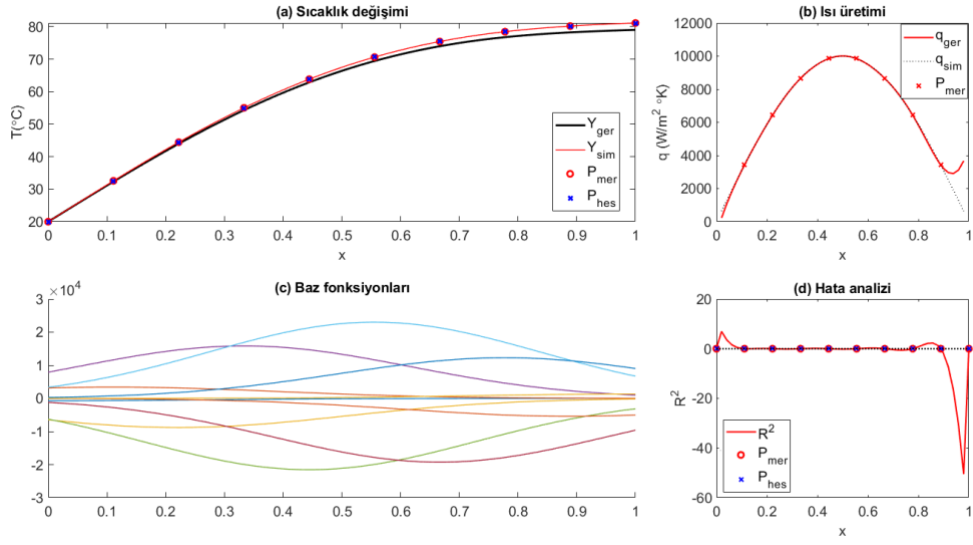


Şekil 3. Merkez nokta ile şekil katsayısının hesaplama çözünürlüğüne etkisi.

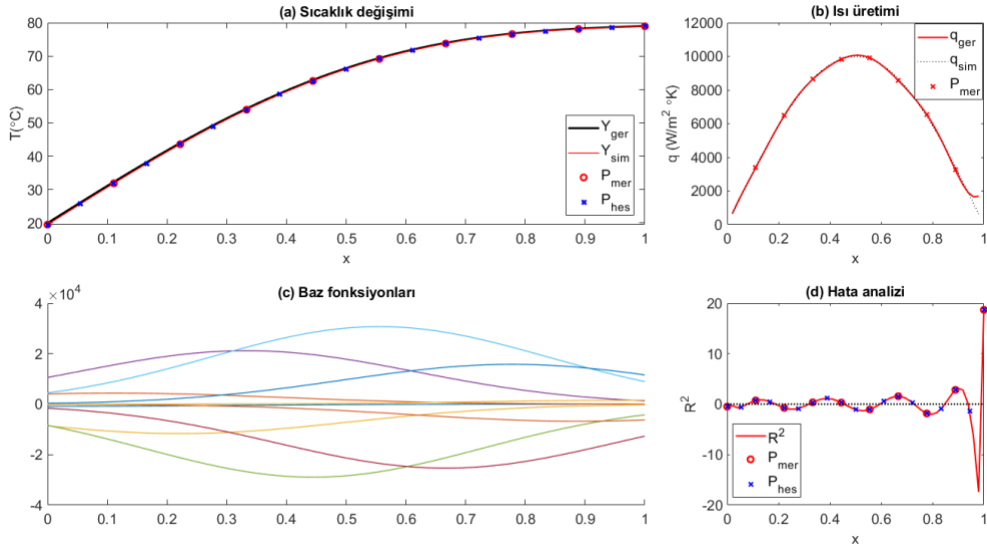
Hesaplama noktalarının önemini görmek üzere keyfi olarak  $\varepsilon = 2.5$  Gauss RBF sonuçları incelendiğinde merkez nokta ile aynı noktalarda optimize edilen sistemde sıcaklık hatasının analitik çözümden açıkça ayrıştığı gözlenebilir (Şekil 4a ve Şekil 5a). Burada Şekil 4'te merkez nokta sayısı ile hesaplama nokta sayısı eşit ( $n = 10, N = 10$ ), Şekil 5'te ise hesaplama nokta sayısı merkez nokta sayısının iki katıdır ( $n = 10, N = 20$ ). Şekil 4d ve Şekil 5d çözüm bölgesinde ve sınırlarda yapılan hataların karesel ölçeğini vermektedir.

Şekillerden de anlaşılacağı üzere çözüm bölgesinde nokta sayıları eşitken diferansiyel denklem çok iyi sağlanır ( $RMSE < 0.0001$ ), sınır bölgelerde ise hatalar yüksektir. Hesaplama noktalarının artışı sınırlarda hataları ve hatanın değişimini azaltırken çözüm bölgesinde diferansiyel denklemde bir miktar kalanın artmasına sebep olur. Tablo 2'de her iki durumda ara noktalarda ( $5n$ ), hesaplama noktaları ( $2n$ ), ve merkez noktaları ( $n$ ), üzerinden ayrı ayrı hesaplanan RMSE değerleri görülmektedir.  $N = n$  olması durumunda, merkez noktalar üzerinden hesaplanan RMSE değerleri çok düşük görünürken; yakınsama sonrasında ara noktalar dahil edilerek hesaplanan RMSE değeri 5.2 kat daha büyüktür. Hesaplama nokta sayısı arttığında, ara noktaların hataları ile merkez noktaların RMSE değerleri birbirine yakındır. Bu durum nokta sayıları eşit alınır ise parametrelerin

optimizasyonu esnasında noktalar üzerinden hesaplanan RMSE değerlerinin yanıltıcı olabileceğinin bir göstergesidir.



Şekil 4.  $\varepsilon = 2.5$ ,  $n = 10$  ve  $N = 10$  parametreleri ile Gauss RBF sonuçları.

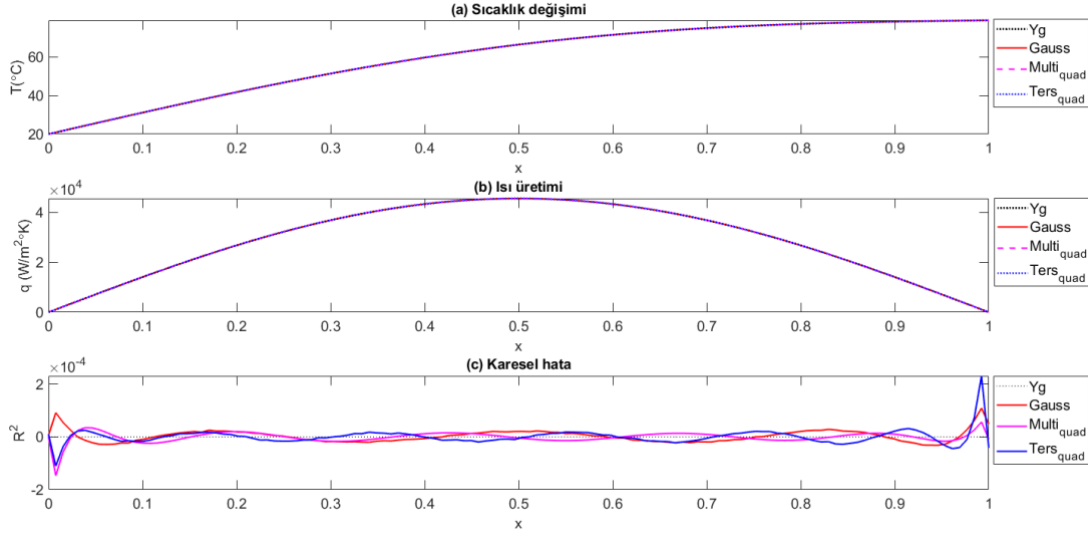


Şekil 5.  $\varepsilon = 2.5$ ,  $n = 10$  ve  $N = 20$  parametreleri ile Gauss RBF sonuçları.

Tablo 2. Gauss RBF için  $\varepsilon=2.5$  durumunda nokta sayılarının ortalama hataya etkisi.

Açıklama	$N = n$	$N = 2n$
RMSE ara noktalar	3902.6032	749.96346
RMSE hesaplama noktaları	2.2479E-20	365.38440
RMSE Merkez noktaları	2.2479E-20	371.93446

Şekil 6’da Gauss, Multi-kuadrik ve Ters kuadrik baz fonksiyonlarının en iyi sonuçlar verdiği parametreler ( $\varepsilon = 0.6$  ve  $n = 26$ ) ile kıyaslanarak verilmiştir. Tüm baz fonksiyonlarının sonuçları birbirine yakın olup sınır bölgelerindeki davranışlarında çok küçük farklılıklar görülmektedir. Gauss RBF için RMSE değeri  $6.5004648E-08$  iken Multi-kuadrik için  $4.8567896E-08$  ve Ters kuadrik için ise  $1.0202297E-07$  olarak bulunmuştur.

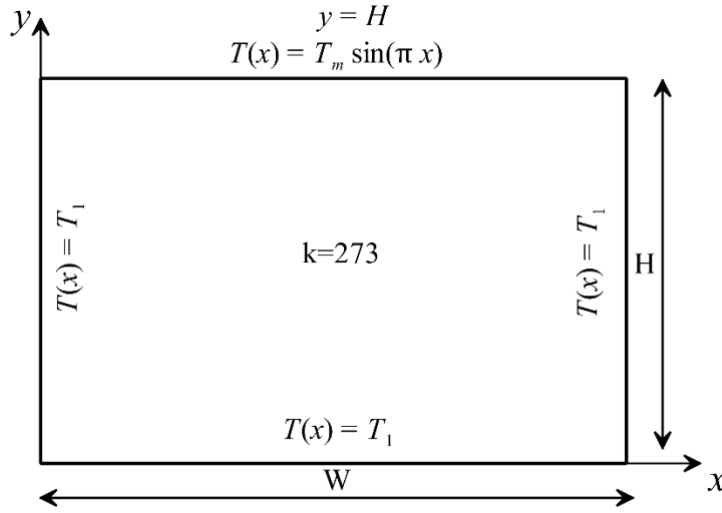


Şekil 6.  $\varepsilon = 0.6$ ,  $n = 26$  ve  $m = 2$  parametreleri ile Gauss, Multi-kuadrik ve Ters kuadrik RBF sonuçları.

### 3.2. İki Boyutlu Isı Geçişi

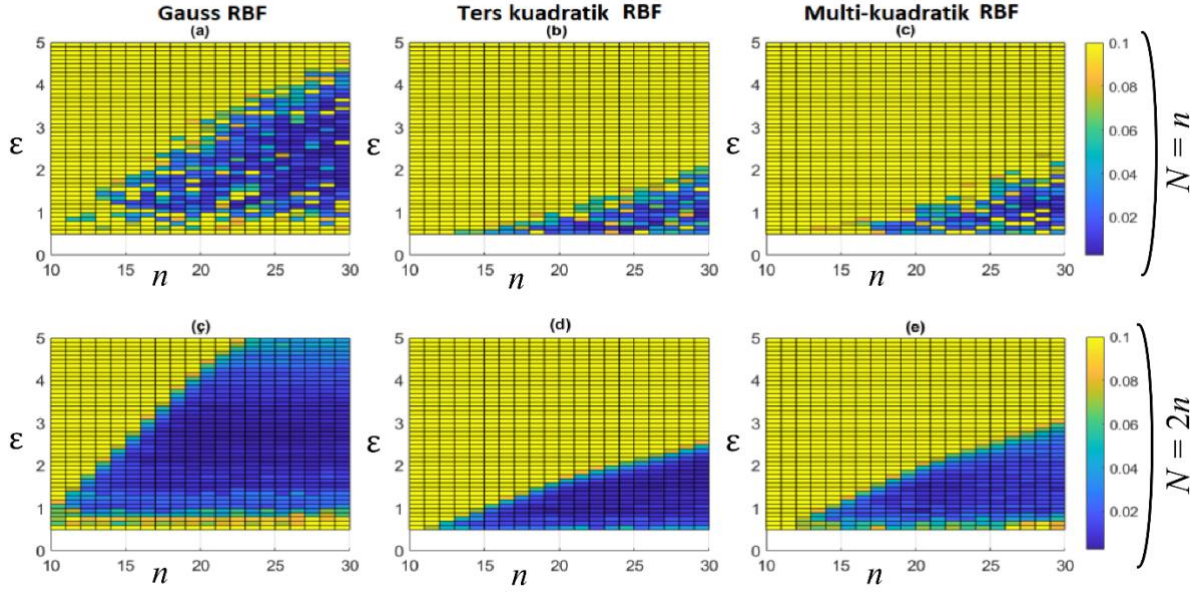
İki boyutlu ısı geçişi problemlerinde analitik çözüme ulaşmak genellikle mümkün olmamaktadır. Ancak bazı özel durumlar için değişkenlerine ayrıştırma yöntemi kullanılarak analitik çözüm bulunabilir. Literatürde bir kenarı ( $y = H$ )  $x$  doğrultusunda değişen sıcaklık ( $T(x) = T_m \sin(\pi x)$ ) plaka problemleri için çözüm mevcuttur. Şekil 7’de iki boyutlu homojen ve izotropik bir plaka ve sınır şartları görülmektedir. Plaka üzerinde ısı üretimi olmayıp dış ortamdan yalıtılmış haldedir.  $x = 0$ ,  $y = 0$  ve  $x = W$  kenarları  $T_1$  sıcaklığına sahip plaka için sıcaklık dağılımı Eşitlik (18) ile verilmiştir (Herman, 2015). Burada  $T_m$  kenar sıcaklığının genliğidir. Isı iletim katsayısı  $k = 273$  ( $W/mK$ ),  $T_1 = 20^\circ C$  ve  $H = W = 1$ ’dir.

$$T(x, y) = -T_m \frac{\sinh(\pi y/W)}{\sinh(\pi H/W)} \sin\left(\frac{\pi x}{W}\right) + T_1 \quad (18)$$



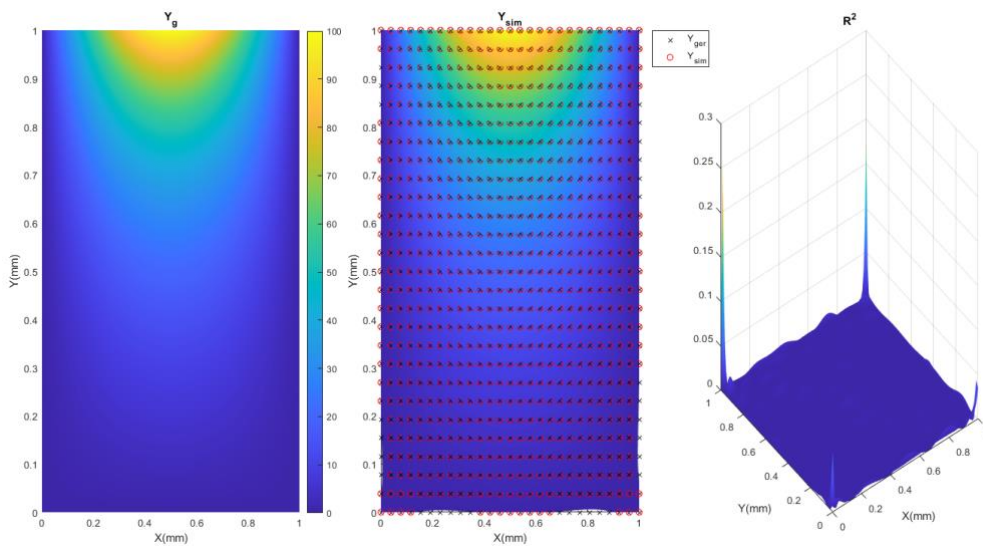
Şekil 7.. İki boyutlu ısı geçiş problemi için geometri ve parametreler.

Şekil 8’de farklı şekil katsayı değerleri  $\varepsilon = 0.5 - 5$  ile farklı merkez noktası sayılarında ( $n = 10 - 30$ ) sistemin kararlılığını göstermektedir. Şekil 8 a, b, c ile verilen grafikler merkez noktası ( $n$ ) ile kollokasyon noktası ( $N$ ) nin eşit olduğu durumda hataları gösterirken, Şekil 8ç-e kollokasyon noktasının merkez noktasından büyük olduğu ( $N=2n$ ) durum için benzetim sonuçlarını göstermektedir. Grafikte sonuçlar  $RMSE > 0.1$  değerleri filtrelenerek sarı renk ile gösterilmiştir. Çözüm aralığında kalan bölgelerin değişimi ise çok renkli olarak gösterilmiştir. Yapılan benzetimler şekil katsayısı ve hesaplama çözünürlüğünün iki boyutlu ısı geçişi problemlerinde önemli olduğunu göstermektedir (Şekil 8). Merkez noktası ile kollokasyon noktası eşit olduğunda çözüm alanının büyük bir kısmı kararsız olmaktadır. Şekil 8 a, b, c’de bu durum açıkça görülmektedir. Çözüm bölgesinde (mavi renk) yer alan noktalar arasında çok sayıda yerel tekil bölgeler (sarı noktalar) görülür. Bir boyutlu ısı geçişinde olduğu gibi, kollokasyon noktası arttırıldığında kararsızlık büyük ölçekte ortadan kalkmaktadır (Şekil 8 ç, d, e). Gauss, Ters kuadrik ve Multi-kuadrik baz fonksiyonlarının her üçü içinde merkez noktası ile kollokasyon noktası eşit alındığında, çözüm bölgesinde tekil noktaların ve kararsız çözümlerin oluştuğu gözlemlenmektedir. Kollokasyon noktalarındaki artış çözüm sisteminin kararlılığını arttırmaktadır. Benzetimler sonucunda Gauss RBF için en iyi sonuçlar  $\varepsilon = 2.0$  ve  $n = 27$  durumunda, Ters kuadrik RBF için  $\varepsilon = 1.8$  ve  $n = 30$  olduğunda ve Multi-kuadrik RBF için ise  $\varepsilon = 0.9$  ve  $n = 20$  alınması halinde bulunmuştur. Benzetimler sonucunda elde edilen RMSE değerleri ise sırası ile 0.0012, 0.0088, 0.0174 olarak hesaplanmıştır.



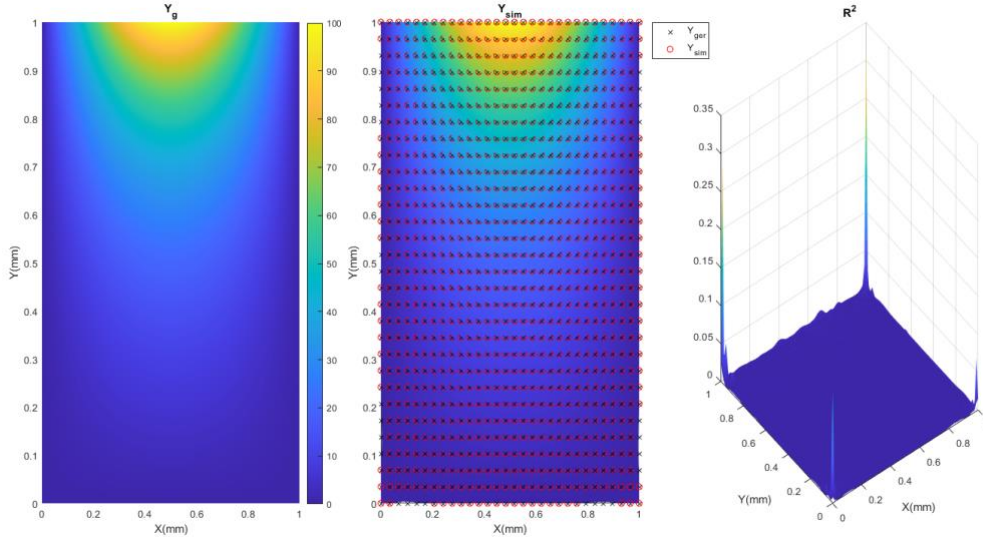
**Şekil 8.** İki boyutlu analiz için merkez nokta ile şekil katsayısının hesaplama çözünürlüğüne etkisi.

Şekil 9, Şekil 10 ve Şekil 11'de üç baz fonksiyon için analitik çözüm ve sayısal çözümün sonuçları gösterilmektedir. Analitik sonuçlar ve sayısal sonuçlar uyumlu olmakla birlikte, kullanılan yöntemlerin tümünde en büyük hata değerleri noktasal olarak köşelerde oluşmaktadır. Köşe noktalar iki sınırın birleşimi olduğundan algoritma içerisinde hangi sınır şartının verileceği karmaşık bir konu olduğundan bu durum doğaldır. Literatürde bu durum Runge olayı (Runge phenomenon) olarak bilinir. Çözüm bölgesinin iç bölgelerinde hata oldukça düşüktür. Bir boyutlu ısı probleminde olduğu gibi Gauss RBF'nin diğer iki metoda göre üstün olduğu açıktır. En yüksek mutlak hata değerleri, Gauss RBF için 0.3, Multi-kuadratik RBF için 2 ve Ters kuadratik RBF için ise 0.35'tir.

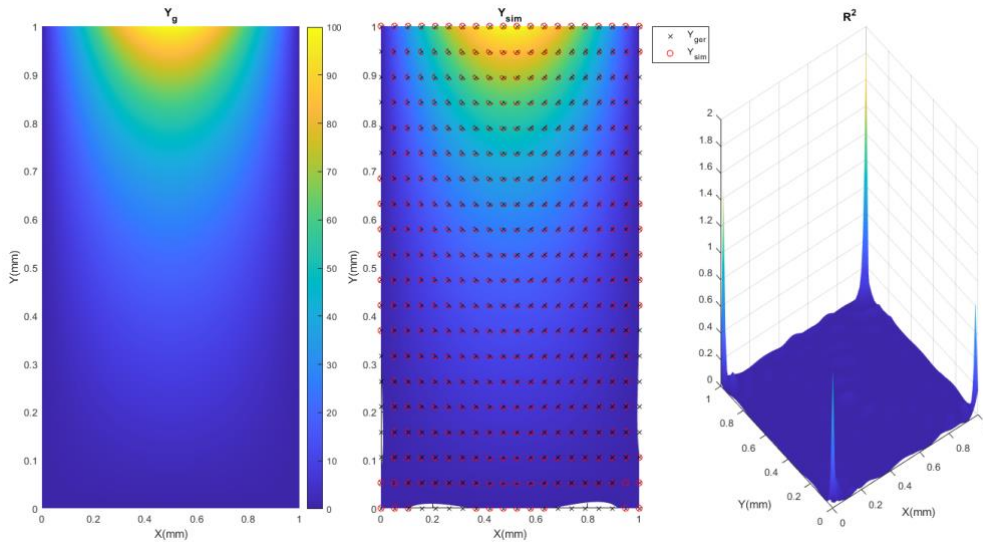


**Şekil 9.** Gauss RBF analitik ve sayısal çözüm ( $\varepsilon = 2.0$ ,  $n = 27$ ). Analitik çözüm sonuçları (a). Sayısal çözüm sonuçları (b). RMSE hata grafiği (c).





**Şekil 10.** Ters-kuadrik RBF analitik ve sayısal çözüm ( $\varepsilon = 1.8$ ,  $n = 30$ ). Analitik çözüm sonuçları (a). Sayısal çözüm sonuçları (b). RMSE hata grafiği (c).



**Şekil 11.** Multi-kuadrik RBF analitik ve sayısal çözüm ( $\varepsilon = 0.9$ ,  $n = 20$ ). Analitik çözüm sonuçları (a). Sayısal çözüm sonuçları (b). RMSE hata grafiği (c).

#### 4. Sonuçlar ve Öneriler

Çalışmada, bir ve iki boyutlu ısı transferi problemleri ağsız (meshless) sayısal analiz yöntemi ile çözülerek şekil parametresi ve merkez nokta sayısının çözüme olan etkisi incelenmiştir. Benzetim çalışmalarında elde edilen sayısal sonuçlar, analitik çözüm sonuçları ile karşılaştırılarak geçerliliği test edilmiştir. Bir boyutlu benzetim çalışmalarında Gauss RBF fonksiyonu çözüm bölgesinin, diğer iki baz fonksiyon ailesine göre daha geniş ve kararlı olduğu görülmüştür (Şekil 3). Merkez nokta sayısı  $10 < n < 30$  olarak alındığında, Gauss RBF için çözüm bölgesi  $0.5 < \varepsilon < 5$ , Multi-kuadrik

RBF için  $0.5 < \varepsilon < 2.9$  ve Ters kuadrik RBF için ise  $0.5 < \varepsilon < 2.5$  olduğu görülmüştür. Şekil parametresi, eğrinin civar noktalar ile etkileşimini vermektedir. Her üç RBF içinde şekil daraldıkça çözüm bölgesinde daha çok merkez noktaya ihtiyaç duyulduğu ( $\varepsilon$  arttıkça merkez nokta sayısının arttığı) gösterilmiştir. Bir boyutlu hesaplamalarda; Gauss RBF için RMSE değeri  $6.5004648E-08$ , Multi-kuadrik için  $4.8567896E-08$  ve Ters kuadrik için ise  $1.0202297E-07$  olarak bulunmuştur.

İki boyutlu ısı geçişi problemi olarak, bir kenarında konuma bağlı sıcaklık değişimi olan ve diğer üç kenarı sabit sıcaklıkta tutulan bir plakadaki sıcaklık değişimi incelenmiştir. Benzetim çalışmaları, iki boyutlu problemlerde sonuçların bir boyuta göre daha kararsız olduğunu, şekil parametresi ve merkez nokta sayısının uygun seçilmesinin önemli olduğunu göstermektedir. Şekil 8 ile Gauss, Multi-kuadrik ve Ters kuadrik radyal baz fonksiyonlarının  $\varepsilon < 5$  için farklı sayıda merkez ve kollokasyon nokta sayılarında elde edilen hataları göstermektedir. Grafikte, merkez ile kollokasyon nokta sayısı eşit olduğunda, çözüm bölgesi içerisinde ırsak bölgeler kaldığı açıkça görülmektedir. Bu durum, aynı kollokasyon ve merkez nokta sayılarında şekil parametresinde küçük değişimlerin sonuçları çok etkilediğinin bir göstergesidir. Kollokasyon nokta sayısı, merkez nokta sayısının iki katı olacak şekilde alınır ise sonuçlar kararlı ve çözüm bölgesi sürekli hale gelmektedir. Aynı merkez ve kollokasyon sayılarında şekil parametresindeki küçük değişimler sonuçlarda da küçük değişimlere yol açar. Bu nedenle problemin çözümünün şekil parametresine olan hassasiyetini azalarak daha kararlı bir model oluşur.

Sonuç olarak, ağsız çözüm yöntemlerinde sonucun doğruluğu şekil parametresi, merkez ve kollokasyon nokta sayısı ile doğrudan ilişkilidir. Sistemin kararlı olması için, kollokasyon noktalarının sayısı, baz fonksiyonlar için seçilen merkez noktaların sayısından fazla olmalıdır. Bu nedenle şekil parametresi ve merkez nokta sayısının problemin yapısına ve geometrik özelliklerine göre uygun değerlerinin belirlenmesi önemlidir. Kararlı bir çözüm için, bölgesel şekil fonksiyonları belirlenebileceği gibi, analiz algoritmaları kullanılarak şekil katsayısı ve nokta sayılarını optimize eden sistemler algoritmalara dahil edilmelidir.

### **Yazarların Katkısı**

Tüm yazarlar çalışmaya eşit katkıda bulunmuştur.

### **Çıkar Çatışması Beyanı**

Yazarlar arasında herhangi bir çıkar çatışması bulunmamaktadır.

## Araştırma ve Yayın Etiği Beyanı

Yapılan çalışmada araştırma ve yayın etiğine uyulmuştur.

## Kaynaklar

- Altınkaynak, A., (2020). Ağsız Yöntem Uygulamaları için Trigonometri Tabanlı Radyal Özelliğe Sahip Yeni Bir Temel Fonksiyon. *International Journal of Advances in Engineering and Pure Sciences*, 32(1), 96-110.  
<https://doi.org/10.7240/jeps.581959>
- Aydın, E.S., (2022). Kayısı meyvesinin dondurarak kurutulmasının sayısal olarak incelenmesi için matematiksel bir model. *Gazi Üniversitesi Mühendislik Mimarlık Fakültesi Dergisi*, 37 (1), 347-360.  
<https://doi.org/10.17341/gazimmfd.791792>
- Belytschko, T., Lu, Y.Y., ve Gu, L., (1994). Element-free Galerkin methods. *The International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37(2), 229-256.  
<https://doi.org/10.1002/nme.1620370205>
- Boglietti, A., Cavagnino, A., Staton, D., Shanel, M., Mueller, M., ve Mejuto, C., (2009). Evolution and modern approaches for thermal analysis of electrical machines. *IEEE Transactions on industrial electronics*, 56(3), 871-882.  
<https://doi.org/10.1109/TIE.2008.2011622>
- Cao, J., Cheng, P., ve Hong, F., (2008). A numerical analysis of forces imposed on particles in conventional dielectrophoresis in microchannels with interdigitated electrodes. *Journal of Electrostatics*, 66(11-12), 620-626.  
<https://doi.org/10.1016/j.elstat.2008.09.003>
- Chakraverty, S., Mahato, N.R., Karunakar, P., ve Rao, T.D., (2019). *Advanced numerical and semi-analytical methods for differential equations*. John Wiley & Sons.
- Chen, Y., Eskandarian, A., Oskard, M., ve Lee, J.D., (2004). Meshless analysis of plasticity with application to crack growth problems. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 41(1-3), 83-94.  
<https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2003.11.024>
- Chong, Y.C., Goss, J., Popescu, M., Staton, D., Hawkin, D., ve Boglietti, A., (2019). Electromagnetic performance with and without considering the impact of rotation on convective cooling. *The Journal of Engineering*, 17, 3537-3541.  
<https://doi.org/10.1049/joe.2018.8024>
- Çengel, Y.A., ve Ghajar, A.J., (2020). *Isı ve Kütle Transferi*. Palme Yayınevi. ISBN: 9786053552871
- Durak, B., (2020). Adi ve Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Çözümlerinin Kollokasyon Yöntemiyle Bulunması. *Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, 10(4), 1136-1143.  
<https://doi.org/10.17714/gumusfenbil.681276>
- Fallah, N.A., Bailey, C., Cross, M., Taylor, G.A., (2000). Comparison of finite element and finite volume methods application in geometrically nonlinear stress analysis. *Applied Mathematical Modelling*, 24(7), 439-455.  
[https://doi.org/10.1016/S0307-904X\(99\)00047-5](https://doi.org/10.1016/S0307-904X(99)00047-5)
- Falzon, B.G., ve Muthu, N., (2018). 1.13-Micromechanical Modelling of Composite Materials Using the Element-Free Galerkin Approach. Editor(s): Beaumont PWR, *Comprehensive Composite Materials II* (s. 327-352). Zweben CH., Elsevier, ISBN 9780081005347.  
<https://doi.org/10.1016/B978-0-12-803581-8.09888-X>
- Fasshauer, G.E., (2007). *Meshfree approximation methods with MATLAB* (Interdisciplinary Mathematical Sciences: Volume 6). World Scientific.
- Fasshauer, G.E., ve McCourt, M.J., (2015). *Kernel-based approximation methods using Matlab* (Interdisciplinary Mathematical Sciences Vol 19). World Scientific Publishing Company.
- Fornberg, B., ve Flyer, N., (2015). Solving PDEs with radial basis functions. *Acta Numerica*, 24, 215-258.  
<https://doi.org/10.1017/S0962492914000130>
- Fornberg, B., ve Flyer, N., (2005). Accuracy of radial basis function interpolation and derivative approximations on 1-D infinite grids. *Advances in Computational Mathematics*, 23, 5-20.

<https://doi.org/10.1007/s10444-004-1812-x>

- Ghahfarokhi, P.S., Podgornovs, A., Kallaste, A., Marques Cardoso, A.J., Belahcen, A., Vaimann, T., Kudrjavev, O., Asad, B., ve Iqbal, M.N., (2022). Steady-State Thermal Modeling of Salient Pole Synchronous Generator. *Energies*, 15(24), 9460.  
<https://doi.org/10.3390/en15249460>
- Gingold, R.A., ve Monaghan, J.J., (1977). Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 181(3), 375–389.  
<https://doi.org/10.1093/mnras/181.3.375>
- Hahn, D.W., ve Özişik, M.N., (2012). *Heat conduction*. John Wiley & Sons.
- He, Y., Meng, Z., Xu, H., ve Zou, Y., (2020). A dynamic model of evaluating differential automatic method for solving plane problems based on BP neural network algorithm. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 556(124845).  
<https://doi.org/10.1016/j.physa.2020.124845>.
- Herman, R. L., (2015). 6 Problems in Higher Dimensions. *Introduction to partial differential equations*. R. L. Herman.  
[https://people.uncw.edu/hermanr/pde1/PDEbook/PDE\\_Main.pdf](https://people.uncw.edu/hermanr/pde1/PDEbook/PDE_Main.pdf)
- Jin, J-M., (1993). *The Finite Element Method in Electromagnetics*. Wiley. ISBN: 9780471586272
- Kansa, E.J., (1986). Application of Hardy’s multiquadric interpolation to hydrodynamics. *Continuous System Simulation Languages*, 1986, 111-117.
- Kansa, E.J., (1990). Multiquadrics—A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics—I surface approximations and partial derivative estimates. *Computers & Mathematics with applications*, 19(8-9), 127-145.  
[https://doi.org/10.1016/0898-1221\(90\)90270-T](https://doi.org/10.1016/0898-1221(90)90270-T)
- Karakoc, S.B.G., (2018). Kollokasyon Sonlu Eleman Yöntemi ile MKdV Denkleminin Sayısal Çözümleri. *Eskişehir Teknik Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi B - Teorik Bilimler*, 6(2), 206-218.  
<https://doi:10.20290/aubtdb.420247>
- Li, J., Wang, G., Zhan, J., Liu, S., Guan, Y., Naceur, H., Coutellier, D., ve Lin, J., (2021). Meshless SPH analysis for transient heat conduction in the functionally graded structures. *Composites Communications*, 24(100664).  
<https://doi.org/10.1016/j.coco.2021.100664>.
- Libersky, L.D., Petschek, A.G., Carney, T.C., Hipp, J.R., ve Allahdadi, F.A., (1993). High Strain Lagrangian Hydrodynamics: A Three-Dimensional SPH Code for Dynamic Material Response. *Journal of Computational Physics*, 109(1), 67-75.  
<https://doi.org/10.1006/jcph.1993.1199>.
- Muggleston, J., Pickering, S.J., ve Lampard, D., (1999). Effect of geometric changes on the flow and heat transfer in the end region of a TEFC induction motor. *Ninth International Conference on Electrical Machines and Drives* (s. 40-44). Canterbury, UK.  
<https://doi.org/10.1049/cp:19990987>
- Narimani, N., ve Dehghan, M., (2022). A direct RBF-PU method for simulating the infiltration of cytotoxic T-lymphocytes into the tumor microenvironment. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 114(106616).  
<https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2022.106616>.
- Nayroles, B., Touzot, G., ve Villon, P., (1992). Generalizing the finite element method: Diffuse approximation and diffuse elements. *Computational Mechanics*, 10, 307-318.
- Pandey, A., Madduri, B., Perng, C.Y., Srinivasan, C., ve Dhar, S., (2022). Multiphase Flow and Heat Transfer in an Electric Motor. *ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition* (s. 1-17). Columbus, Ohio, USA.  
<https://doi.org/10.1115/IMECE2022-96801>
- Papini, L., ve Gerada, C., (2014). Thermal-electromagnetic analysis of solid rotor induction machine. *7th IET International Conference on Power Electronics, Machines and Drives (PEMD 2014)* (s. 1-6). Manchester, UK.  
<https://doi.org/10.1049/cp.2014.0462>
- Pekedis, M., ve Yıldız, H., (2010). Ağsız Yöntemler ve Sınıflandırılması. *Pamukkale Üniversitesi Mühendislik Bilimleri Dergisi*, 16(1), 1-9.  
<https://dergipark.org.tr/pub/pajes/issue/20507/218301>

- Pickering, S.J., Lampard, D., ve Shanel, M., (2001). Modelling ventilation and cooling of the rotors of salient pole machines. (*IEMDC*) *IEEE International Electric Machines and Drives Conference* (s. 806-808). Cambridge, MA, USA.
- Stach, S., (2014). 11- Modelling fracture processes in orthopaedic implants,. Editor(s): Zhongmin, J., *Computational Modelling of Biomechanics and Biotribology in the Musculoskeletal System Biomaterials and Tissues* (s. 331-368). Woodhead Publishing, ISBN 978-0-85709-661-6.
- Staton, D., Pickering, S.J., ve Lampard, D., (2001). Recent advancement in the thermal design of electric motors. *SMMA 2001 Fall Technology Conference* (s. 1-11). Durham, North Carolina, USA.
- Tanbay, T. (2019). Meshless solution of the neutron diffusion equation by the RBF collocation method using optimum shape parameters. *Journal of Innovative Science and Engineering*, 3(1), 23-31.  
<https://doi.org/10.38088/jise.570328>
- Wang, H., ve Qin, Q.H., (2019). Chapter 1 - Overview of meshless methods. Editor(s): Wang, H., Qin, Q.H., *Methods of Fundamental Solutions in Solid Mechanics* (s. 3-51). Elsevier. ISBN 9780128182833, <https://doi.org/10.1016/C2018-0-03684-1>
- Wang, H., ve Qin, Q.H., (2019). Chapter 5 - Meshless analysis for thin plate bending problems. Editor(s): Wang, H., Qin, Q.H., *Methods of Fundamental Solutions in Solid Mechanics* (s. 127-142). Elsevier, ISBN 9780128182833, <https://doi.org/10.1016/C2018-0-03684-1>
- Yıldız, H., Korkmaz Can, N., Ozguney, O.C., ve Yagiz, N., (2020). Sliding mode control of a line following robot, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 42(561), 1-13.  
<https://doi.org/10.1007/s40430-020-02645-3>
- Zarin, R., (2022). Numerical study of a nonlinear COVID-19 pandemic model by finite difference and meshless methods. *Partial Differential Equations in Applied Mathematics*, 6(100460).  
<https://doi.org/10.1016/j.padiff.2022.100460>.
- Zhong, R., Wang, Q., Hu, S., Qin, B., ve Shuai, C., (2023). Meshless analysis for modal properties and stochastic responses of heated laminated rectangular/sectorial plates in supersonic airflow. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 98(104872).  
<https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2022.104872>.
- Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L., ve Zhu, J.Z., (2005). *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. 6th Edition. Butterworth-Heinemann.