Uşak Üniversitesi Fen ve Doğa Bilimleri Dergisi
Usak University Journal of Science and Natural Sciences

http://dergipark.gov.tr/usufedbid
https://doi.org/10.47137/usufedbid.1456529

Araştırma Makalesi (Research Article)

Bulanık Kümeler İçin Minkowski Fark

Mehmet ÖZŞİMŞEK[1], Mustafa SOYERTEM[2]*

[1]*Institute of Science, Department of Mathematics, Uşak University, Uşak, Türkiye*
[2]*Department of Mathematics, Faculty of Engineering and Natural Sciences, Uşak University, Uşak, Türkiye*

Geliş: 21 Mart 2024 *Revizyon: 10 Mayıs 2024* *Kabul: 17 Mayıs 2024*
Received: 21 March 2024 *Revised: 10 May 2024* *Accepted: 17 May 2024*

Özet

Bu çalışmada, katı(crisp) kümelerle ilgili tanımlar, bulanık (fuzzy) küme tanımı ve bulanık küme özelliklerini hatırlattık. Katı kümeler için Minkowski (Pontryagin) fark tanımını göz önüne alarak bulanık kümeler için yeni bir Minkowski fark tanımı verdik. Tanımlanan bu yeni bulanık Minkowski farkın bazı özelliklerinin sağladığını gösterdik. Son kısımda da tanımlamış olduğumuz bulanık Minkowski farkın hesaplamaları üzerine bazı açıklayıcı geometrik örnekler sunduk.

Anahtar Kelimeler: *Minkowski fark, Bulanık küme, Bulanık Minkowski fark.*

Minkowski Difference For Fuzzy Sets

Abstract

In this article, we remind the definitions about crisp sets, the definition of fuzzy sets and some properties of fuzzy sets. We give a new Minkowski difference definition for fuzzy sets by adapting the geometry of the Minkowski difference for crisp sets. We prove some algebraic properties of this new fuzzy Minkowski difference. At the end of the article, we present some illustrative geometric examples on the calculation of fuzzy Minkowski difference.

Keywords: *Minkowski difference, Fuzzy Set, Fuzzy Minkowski difference.*

©2024 Uşak University all rights reserved.

*Corresponding author: Mehmet ÖZŞİMŞEK
E-mail: mehmetozsimsek308@gmail.com (ORCID ID: 0000-0001-7522-6790)
E-mail: mustafa.soyertem@usak.edu.tr (ORCID ID: 0000-0003-4158-1713)
©2024 Usak University all rights reserved.

1.Giriş

Bulanık küme kavramı, L. Zadeh'in "gerçek fiziksel dünyada karşı karşıya kaldığımız nesnelerin sınıflandırılmasının kesin olarak tanımlanmış üyelik ölçütlerine sahip olmadığı" yönündeki gözlemine dayanmaktadır [1]. Zadeh'in bu alıntısına göre özellikle de dilsel ifadelerin matematiksel olarak temsili mümkün hale gelmiştir. Klasik kümelerdeki $0-1$ (ya hep ya hiç) mantığının aksine, bulanık kümelerde aşamalı bir kavram olarak gördüğü tüm kategorileri hesaba katar. Bu da demek oluyorki herhangi bir nesnenin o sınıfa ait olması [0,1] kapalı aralığındaki reel sayılarla ifadesidir [1, 2]. Örneğin; belirli yaş aralığına göre insanları bebek, çocuk, genç, yetişkin ve yaşlı olma düzeylerini veya başka bir örnek de havanın çok soğuk, soğuk, sıcak, çok sıcak vb. dilsel ifadelerin matematiksel karşılıkları ile işlemler yapılabilmektedir [2].

Bulanık kümlerin, yapay zekâ alanında oldukça fazla kullanıldığı bilinmektedir. Örneğin; tıp alanında bir hastalık hakkında yaklaşık sonuçlar vererek hekime tavsiye ve öneri sunar [3]. Bulanık küme kavramının başka kullanım alanları ise Otomotiv sistemleri, tüketici elektroniği ürünleri, beyaz eşyalar ve ev aletleri, iklimlendirme ürünleri, gibi birçok kullanım alanı söylenebilir [2, 4, 5].

Klasik kümeler için kullanılan Minkowski fark birçok kullanım alanına sahiptir. Kullanılan bu alanlar, veri sınıflandırılması [6], görüntü analizi ve işleme [7], robotlar için hareket planlaması [8], gerçek zamanlı çarpışma tespiti [9] ve bilgisayar grafikleri [10] gibi birçok alanda kümeler için Minkowski fark kullanılmaktadır.

Çalışmanın 2. Bölümde, katı kümelerin özellikleri ve bulanık küme ile ilgili özellikler hatırlatıldı. 3. Bölümde, bulanık kümeler için Minkowski farkı tanımlandı ve bulanık Minkowski fark özellikleri gösterildi. Makale tartışma bölümü ile sonlandırıldı.

2. Temel Tanım ve Teoremler

Bu çalışma boyunca, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $\mathbb{R}^n$' nin sınırlı, boştan farklı alt kümelerinin ailesi ve bir $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ için $int(A)$, A kümesinin topolojik içini göstersin [11, 12].
Aşağıda verilen tanımda herhangi iki kümenin cebirsel toplamı, cebirsel farkı, Minkowski farkı ve bir kümenin herhangi bir reel sayı ile çarpımı hatırlatıldı.

Tanım 2.1 [12, 13] $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ve $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

1. $A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$ kümesine A ve B kümesinin cebirsel toplamı,
2. $A - B := \{a - b : a \in A, b \in B\}$ kümesine A ve B kümesinin cebirsel farkı,
3. $cA := \{ca : c \in \mathbb{R}, a \in A\}$ kümesine A kümesinin skalerle çarpımı,
4. $A \dot{-} B := \{x : x + B \subset A\} = \bigcap_{b\in B}(A - b)$kümesine$AveB$ kümesinin Minkowski farkı denilmektedir.

Bulanık küme tanımından önce, katı bir kümenin karakteristik fonksiyonunun tanımını hatırlayalım.

Tanım 2.2 [14] $A \subset \mathbb{R}^n$ ve $x \in \mathbb{R}^n$ olsun,

$$\mu_A(x) \coloneqq \begin{cases} 1 & ; x \in A \\ 0 & ; x \notin A \end{cases}$$

$\mu_A\colon \mathbb{R}^n \to [0,1]$ fonksiyonuna A kümesinin $\mathbb{R}^n$ üzerindeki karakteristik fonksiyonu denir. Buradaki üyelik fonksiyonu tanımından esinlenerek L. Zadeh 1965 yılında [1] makalesinde bulanık kümelerin tanımını üyelik fonksiyonun değerinin yalnızca $\{0,1\}$ kümesinden oluştuğunu değil bir kümenin üyelik fonksiyonunun $[0,1]$ aralığındaki kümeye genişleterek her $x \in \mathbb{R}^n$ elemanının A gibi bir kümeye ait olma derecesini tanımlamıştır.

Genişletilmiş üyelik fonksiyonu tanımını $\mathbb{R}^n$ de hatırlayacak olursak bir $A \subset \mathbb{R}^n$ için $\mu_A\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,1]$ şeklinde olur. Herhangi bir $\tilde{A}$ bulanık kümesi $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için,

$$\tilde{A} \coloneqq \{(x, \mu_A(x)) : x \in \mathbb{R}^n\} \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlandığını hatırlayalım [1, 5, 15].

$\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, $\mathbb{R}^n$ deki tüm bulanık kümelerin ailesi olsun. Bir $x_0 \in \mathbb{R}^n$ için;

$$\{\widetilde{x_0}\}(x) \coloneqq \begin{cases} 1 & ; x = x_0 \\ 0 & ; x \neq x_0 \end{cases}$$

tanımlanan (2.1)' deki eşitlikten $\{\widetilde{x_0}\}$ bulanık kümedir.
$\widetilde{\emptyset}$, $\widetilde{\mathbb{R}}^n \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, her $x \in \mathbb{R}^n$ için $\widetilde{\emptyset}\,(x) = 0$ ve $\widetilde{\mathbb{R}}^n(x) = 1$ şeklinde tanımlanan bulanık kümelerdir.

Aşağıda bulanık kümeler hakkında bazı tanımlar verilmiştir.

Tanım 2.3 [5, 14] $\tilde{A} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ için $supp(\tilde{A}) = \{x \in \mathbb{R}^n : \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}$ kümesine $\tilde{A}$ bulanık kümesinin destek kümesi denir ve $supp(\tilde{A})$ ile gösterilir.

Tanım 2.4 [5, 14] $\widetilde{A}, \tilde{B} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, her $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$için $\mu_{\tilde{A}}(\mathrm{x}) \leq \mu_{\tilde{B}}(\mathrm{x})$ ise $\tilde{A}$ kümesi $\tilde{B}$ kümesinin alt kümesidir denir ve $\tilde{A} \subset \tilde{B}$ ile gösterilir.

Aşağıdaki Teorem 2.1 normal kümeler için tanımlanan sınırlılık tanımının bir genellemesidir.

Teorem 2.1 [16] $\tilde{A} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ bulanık kümesinin kesin sınırlı olabilmesi için gerek ve yeter şart bir $r > 0$ reel sayısı vardır öyle ki $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ve$\|x\| \geq r$ için $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0$' dır. $\mathbb{R}^n$ deki tüm kesin sınırlı bulanık kümelerin ailesini $\mathcal{F}B(\mathbb{R}^n)$ ile göstereceğiz.

Aşağıdaki tanım da bulanık kümelerdeki bazı küme ve cebirsel işlemleri hatırlayalım.

Tanım 2.5 [4] $\widetilde{A}, \tilde{B} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$ ve $\lambda \neq 0$ olsun.

i. $(\widetilde{\mathrm{A}} \cap \tilde{B})(x) \coloneqq min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}$ üyelik fonksiyonu ile verilen kümeye $\tilde{A}$ kümesi ile $\tilde{B}$ kümesinin kesişimi denir.
ii. $(\widetilde{\mathrm{A}} \cup \tilde{B})(x) \coloneqq max\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}$ üyelik fonksiyonu ile verilen kümeye $\tilde{A}$ kümesi ile $\tilde{B}$ kümesinin birleşimi denir.
iii. $(\tilde{A} + \tilde{B})(x) \coloneqq \sup\limits_{x=y+z} (\min\{\mu_{\tilde{A}}(y), \mu_{\tilde{B}}(z)\})$ üyelik fonksiyonu ile verilen kümeye $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ bulanık kümelerinin toplamı denir.
iv. $(\lambda\tilde{A})(x) \coloneqq \mu_{\tilde{A}}\left(\frac{1}{\lambda}x\right)$ üyelik fonksiyonu ile verilen kümeye $\tilde{A}$ bulanık kümesinin skaler ile çarpımı denir.

3. Bulgular

Katı kümelerdeki Minkowski fark hem geometrisiyle hem de işlemsel özellikleriyle oldukça kullanışlı ve ilgi çekicidir. Bu bölümde Minkowski farkın bulanık kümelere bir genişlemesinin tanımıyla başlayacağız. Bu tanımın sonrasında da bulanık Minkowski farkın bazı cebirsel özelliklerinin bulanık kümelerde de korunduğunu gösterdik. Hesaplamaların ve geometrisinin gözlemlenebilmesi için bölüm sonunda iki örnek verdik.

Aşağıdaki Tanım 3.1' de klasik kümeler için bilinen Minkowski fark tanımı bulanık kümeler için genelleştirilmiştir. Bu tanımın katı kümelerdeki kapsamla verilen Minkowski fark tanımının bulanık kümelerdeki karşılığının kullanılarak elde edildiği kolayca gözlemlenebilir.

Tanım 3.1 $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ ve $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için,

$$\left(\tilde{A} \dot{-} \tilde{B}\right)(x) := \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \begin{cases} 1 & ; \mu_{\tilde{B}}(y) \leq \mu_{\tilde{A}}(y+x) \\ \frac{\mu_{\tilde{A}}(y+x)}{\tilde{B}(y)} & ; 0 < \mu_{\tilde{A}}(y+x) < \mu_{\tilde{B}}(y) \\ 0 & ; \mu_{\tilde{A}}(y+x) = 0 \wedge \mu_{\tilde{B}}(y) > 0 \end{cases}$$

üyelik fonksiyonu ile elde ettiğimiz bulanık kümeye $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ bulanık kümelerinin bulanık Minkowski farkı denir. Bulanık Minkowski fark katı kümeler için verilen Minkowski farkın bir genişlemesidir.

Aşağıda bulanık Minkowski farkın bazı özellikleri verilmiştir.

Burada, $\{\tilde{0}_{\mathbb{R}^n}\}$ bulanık kümesinin etkisiz eleman olduğu gösterildi.

Önerme 3.1 $\tilde{A} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ ve $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için, $\left(\tilde{A} \dot{-} \{\tilde{0}_{\mathbb{R}^n}\}\right)(x) = \tilde{A}(x)$.

Kanıt: $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$ olsun. Minkowski fark tanımında, $y = 0_{\mathbb{R}^n}$ olduğunda

$$\mu_{\{\tilde{0}_{\mathbb{R}^n}\}}(0_{\mathbb{R}^n}) = 1 \leq \mu_{\tilde{A}}(x) = 1$$

olur.

$y \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ için,

$$\mu_{\{\tilde{0}_{\mathbb{R}^n}\}}(y) = 0 \leq \mu_{\tilde{A}}(x+y)$$

olacağından her $y \in \mathbb{R}^n$ için $\mu_{\{\tilde{0}_{\mathbb{R}^n}\}}(y) \leq \mu_{\tilde{A}}(y+x)$ eşitsizliğinden $\left(\tilde{A} \dot{-} \{\tilde{0}_{\mathbb{R}^n}\}\right)(x) = 1 = \tilde{A}(x)$' e eşittir.

$0 < \mu_{\tilde{A}}(x) < 1$ olsun. $y = 0_{\mathbb{R}^n}$ olduğunda

$$0 < \mu_{\tilde{A}}(x + 0_{\mathbb{R}^n}) < \mu_{\{\tilde{0}_{\mathbb{R}^n}\}}(0)$$

olur. Yani, $0 < \mu_{\tilde{A}}(x) < 1$' dir. O zaman, $\frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{1} = \mu_{\tilde{A}}(x)$, $\left(\tilde{A} \dot{-} \{\tilde{0}_{\mathbb{R}^n}\}\right)(x) = \tilde{A}(x)$ olur.

$y \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ olduğunda,

$$\mu_{\{\tilde{0}_{\mathbb{R}^n}\}}(y) = 0 \leq \mu_{\tilde{A}}(x+y)$$

olacağından ilk durum geçerlidir. Ancak tanımdaki infimumdan daha küçük olan $\tilde{A}(x)$ değerine eşit olacaktır.

$\mu_{\tilde{A}}(x) = 0$ olsun. $y = 0_{\mathbb{R}^n}$ olduğunda,

$$\mu_{\tilde{A}}(x + 0_{\mathbb{R}^n}) = 0$$

ve

$$\mu_{\{\tilde{0}_{\mathbb{R}^n}\}}(0_{\mathbb{R}^n}) = 1$$

olur. $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0$ ve $\mu_{\{\tilde{0}_{\mathbb{R}^n}\}}(0_{\mathbb{R}^n}) = 1 > 0$ olur. $\left(\tilde{A} \dot{-} \{\tilde{0}_{\mathbb{R}^n}\}\right)(x) = 0$' dır. Minkowski fark tanımında 3. durum sağlandığından $\left(\tilde{A} \dot{-} \{\tilde{0}_{\mathbb{R}^n}\}\right)(x) = 0$ olacaktır.
Sonuç olarak, $\left(\tilde{A} \dot{-} \{\tilde{0}_{\mathbb{R}^n}\}\right)(x) = \tilde{A}\,(x)$' dir.
Aşağıdaki, Önerme 3.2 sınırlı her $\tilde{A}$ bulanık kümesinin kendisiyle Minkowski farkının $\{\tilde{0}_{\mathbb{R}^n}\}$ bulanık kümesi olduğu gösterildi.

Önerme 3.2 $\tilde{A} \in \mathcal{F}B(\mathbb{R}^n)$ ise $(\tilde{A} \dot{-} \tilde{A})(x) = \{\tilde{0}_{\mathbb{R}^n}\}$.

Kanıt: $(\tilde{A} \dot{-} \tilde{A})(x) \neq \{\tilde{0}_{\mathbb{R}^n}\}(x)$ olsun. $x^* = 0$ ve $\forall y \in \mathbb{R}^n$ için,

$$\mu_{\tilde{A}}(y) \leq \mu_{\tilde{A}}(x^* + y)$$

eşitsizliği sağlanır. Yani, $(\tilde{A} \dot{-} \tilde{A})(0_{\mathbb{R}^n}) = 1 = \mu_{\{\tilde{0}_{\mathbb{R}^n}\}}(0_{\mathbb{R}^n})$ olur.
$x^* \neq 0$ olsun. $\tilde{A} \neq \emptyset$ olduğundan $\mu_{\tilde{A}}(y) > 0$ olacak şekilde $y \in \mathbb{R}^n$ vardır.
$n_0 = maks\{n \in \mathbb{N}: (y + n.x^*) > 0\}$, $\tilde{A}$ bulanık sınırlı küme olduğundan $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır.
$y_0 = y + n_0 x^*$ seçersek,

$$\mu_{\tilde{A}}(y + n_0.x^*) = \mu_{\tilde{A}}(y_0) > 0$$

olur.
$\mu_{\tilde{A}}(y_0) > 0$ iken $\mu_{\tilde{A}}(y_0 + x^*) = 0$ olacaktır. Bu da Minkowski farkın 3. satırının geçerli olduğunu gösterir.
$x^* \neq 0$ için,

$$(\tilde{A} \dot{-} \tilde{A})(x^*) = 0 = \mu_{\{\tilde{0}_{\mathbb{R}^n}\}}(x^*) = 0$$

eşitliği sağlandığından, $(\tilde{A} \dot{-} \tilde{A})(x) = \{\tilde{0}_{\mathbb{R}^n}\}$' dir.

$\tilde{A} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ ise $(\tilde{A} \dot{-} \tilde{A})(0_{\mathbb{R}^n}) = 1$ olacağı yukarıdaki kanıtın birinci bölümünde görülmektedir. Burada, $\tilde{A} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ kümesinin sınırlılığı kullanılmamıştır. Yani, bu durum tüm bulanık kümeler için geçerlidir. Bu durumda, $\forall \tilde{A} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ için $\{\tilde{0}_{\mathbb{R}^n}\} \subset \tilde{A}$ olacaktır.

Aşağıdaki, Önerme 3.3 skaler çarpma işleminin bulanık Minkowski farka dağılımını göstermektedir.

Önerme 3.3 $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ ve $\lambda \in (0, \infty)$ olsun.

$$\lambda(\tilde{A} \dot{-} \tilde{B})(x) = \left((\lambda\tilde{A}) \dot{-} (\lambda\tilde{B})\right)(x)$$

eşitliği sağlanır.

Kanıt: $$\lambda(\tilde{A} \dot{-} \tilde{B})(x) = (\tilde{A} \dot{-} \tilde{B})\left(\frac{1}{\lambda}x\right) = \inf_{y\in\mathbb{R}^n} \begin{cases} 1 & ; \mu_{\tilde{B}}(y) \leq \mu_{\tilde{A}}\left(y + \frac{1}{\lambda}x\right) \\ \frac{\mu_{\tilde{A}}\left(y+\frac{1}{\lambda}x\right)}{\mu_{\tilde{B}}(y)} & ; 0 < \mu_{\tilde{A}}\left(y + \frac{1}{\lambda}x\right) < \mu_{\tilde{B}}(y) \\ 0 & ; \mu_{\tilde{A}}\left(y + \frac{1}{\lambda}x\right) = 0 \wedge \mu_{\tilde{B}}(y) > 0 \end{cases}$$

$$= \inf_{y\in\mathbb{R}^n} \begin{cases} 1 & ; \mu_{(\lambda\tilde{B})}(\lambda y) \leq \mu_{(\lambda\tilde{A})}(\lambda y + x) \\ \frac{\mu_{(\lambda\tilde{A})}(\lambda y + x)}{\mu_{(\lambda\tilde{B})}(\lambda y)} & ; 0 < \mu_{(\lambda\tilde{A})}(\lambda y + x) < \mu_{(\lambda\tilde{B})}(\lambda y) \\ 0 & ; \mu_{(\lambda\tilde{A})}(\lambda y + x) = 0 \wedge \mu_{(\lambda\tilde{B})}(\lambda y) > 0 \end{cases}$$

$$= \left((\lambda\tilde{A}) \dot{-} (\lambda\tilde{B})\right)(x).$$

sağlanmış olur.

Aşağıda, Tanım 3.1 de tanımlanan bulanık Minkowski fark için örnekler verilmiştir.
Bu örneklerde reel sayılar üzerindeki kümeler üzerinden Minkowski fark örnekleri

verilmiştir.

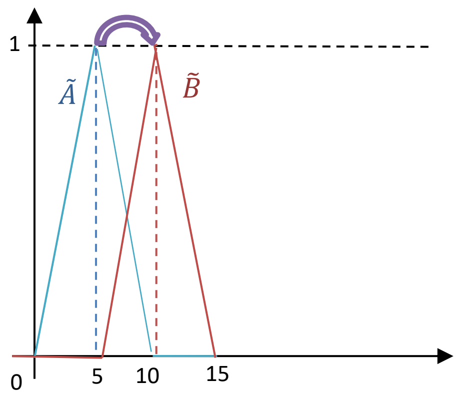
Örnek 3.1 $\tilde{A}, \tilde{B}$ bulanık kümeleri aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\tilde{A}(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}x & ; 0 \leq x < 5 \\ \frac{-1}{5}x + 2 & ; 5 \leq x < 10 \\ 0 & ; d.d. \end{cases} \qquad \tilde{B}(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}x - 1 & ; 5 \leq x < 10 \\ \frac{-1}{5}x + 2 & ; 10 \leq x \leq 15 \\ 0 & ; d.d. \end{cases}$$

Tanımlanan Minkowski farka göre;

$$(\tilde{B} \dot{-} \tilde{A})(x) = \begin{cases} 1 & ; x = 5 \\ 0 & ; d.d. \end{cases}$$

olur.



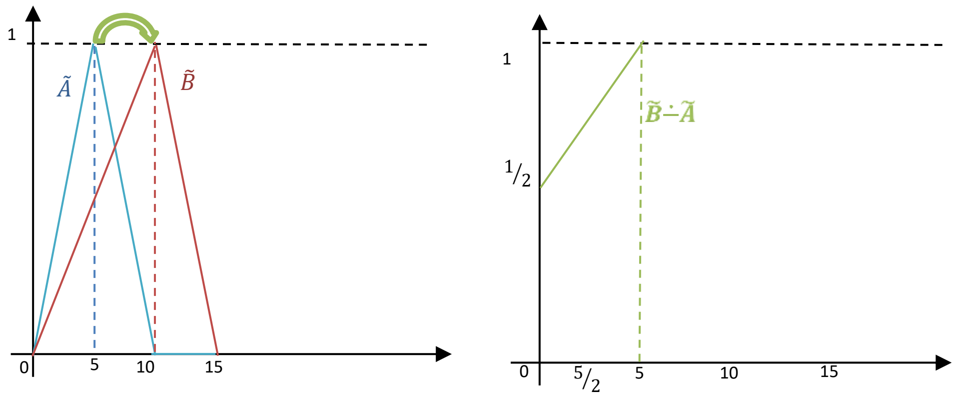
Şekil 1. Örnek 3.1' deki $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ kümeleri

Şekil 1 de görüldüğü üzere $\tilde{A}$ kümesinin bütün elemanları ancak $\{\tilde{5}\}$ bulanık kümesi kadar ötelenirse $\tilde{B}$ kümesinin alt kümesi olur.

Örnek 3.2 $\tilde{A}, \tilde{B}$ bulanık kümeleri aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\tilde{A}(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}x & ; 0 \leq x < 5 \\ \frac{-1}{5}x + 2 & ; 5 \leq x \leq 10 \\ 0 & d.d. \end{cases} \qquad \tilde{B}(x) = \begin{cases} \frac{x}{10} & ; 0 \leq x < 10 \\ \frac{-1}{5}x + 3 & ; 10 \leq x \leq 15 \\ 0 & d.d. \end{cases}$$

Tanım 3.1 de verilen bulanık Minkowski farka göre, $y \in \mathbb{R}$ infimum değerine ulaştığında $x \leq 5$ için $\left(\tilde{B} \dot{-} \tilde{A}\right)(x) = \frac{x}{10} + \frac{1}{2}$ iken $5 < x \leq 15$ aralığında $\left(\tilde{B} \dot{-} \tilde{A}\right)(x) = 0$ olacaktır.



Şekil 2. Örnek 3.2 de $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ (solda) kümeleri - $\tilde{B}\dot{-}\tilde{A}$ kümesi (sağda)

Şekil 2 de görüldüğü üzere,

$$\left(\tilde{B}\dot{-}\tilde{A}\right)(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{10}+\dfrac{1}{2} & ; \quad 0 \leq x \leq 5 \\ 0 & ; \quad d.d. \end{cases}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.1 de verilen bulanık Minkowski farka göre $y \in \mathbb{R}$ infimum değerine ulaştığında $\left(\tilde{A}\dot{-}\tilde{B}\right)(x) = 0$ olur.

4. Tartışma

Bu çalışmada, bulanık küme tanımı, bulanık küme özellikleri ve klasik kümeler için Minkowski fark tanımından hareketle kümeler için bulanık Minkowski fark tanımını verdik. Katı kümeler için Minkowski farkın bazı özelliklerinin bulanık kümelerde de kullanıldığını kanıtladık. Bulanık Minkowski fark tanımını kullanarak açıklayıcı geometrik örnekler verdik. [17] çalışmasında katı kümelerin Minkowski farkı robot ve görüntü işleme alanlarında kullanılmıştır. Minkowski fark işlemi bir robotun yol belirlemesinde kullanılmıştır. Bu çalışmada hem robot hem de bölgedeki engeller katı kümelerle ifade edilmiştir. Bu günümüzde otonom araçların yol tayini için kullanılabilecek bir problemdir. Yollardaki engellerin bulanık olduğu problemler için bulanık Minkowski fark kullanılabilir. Aynı çalışmada, katı kümeler üzerinden morfoloji(0-1 piksel) çalışmalarında Minkowski fark kullanılmıştır. Morfoloji çalışmalarında piksel değerlerinin bulanık olduğu durumda bulanık Minkowski fark kullanılabilir. Bu makalede katı Minkowski farkı bulanık kümelere genelleyerek bu tür problemler için bulanık kümelerle uygulanmasına yol açmış olduk.

Teşekkür

Bu çalışma, TÜBİTAK Bilim İnsanı Destek Programları Başkanlığı (BİDEB) 2210/A- Yurt İçi Genel Yüksek Lisans Burs Programı kapsamında desteklenmiştir.

Çıkar Çatışması

Yazarlar arasında çıkar çatışması bulunmamaktadır.

Katkı Oranı

Yazarlar eşit oranda katkı sağlamışlardır.

Etik Kurul Onayı

Bu çalışmada etik kurul onayına gerek duyulmamaktadır.

Kaynaklar

1. Zadeh LA. "Fuzzy sets." *Information and control*, 1965,8(3): 338-353.
2. Dubois D, Ostasiewicz W and Prade H. "Fuzzy sets: history and basic notions." *Fundamentals of fuzzy sets*. Boston, MA: Springer US, 2000;21-124.
3. Demirhan A, Kılıç YA & İnan G. Tıpta yapay zeka uygulamaları. (2010)
4. Dehghan OR. "Convex Fuzzy Cones of Hypervector Spaces.", 2021.
5. Kon M. "A scalarization method for fuzzy set optimization problems." *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 2020;(19):135-152.
6. Takeda A, Mitsugi H and Kanamori T. "A unified classification model based on robust optimization." *Neural Computation* 25(3); 2013: 759-804.
7. Barki H. et al. "Contributing vertices-based Minkowski difference (CVMD) of polyhedra and applications." *3D Research* 4(4);2013:1-16.
8. Cameron S. "Enhancing GJK: Computing minimum and penetration distances between convex polyhedra." *Proceedings of international conference on robotics and automation*. Vol. 4. IEEE, 1997.
9. Ericson C. *Real-time collision detection*. CRC Press, 2004.
10. Ghosh PK. "A unified computational framework for Minkowski operations." *Computers & Graphics* 1993,17(4):357-378.
11. KARAMAN E. "Gömme Fonksiyonu Kullanılarak Küme Optimizasyonuna Göre Verilen Küme Değerli Optimizasyon Problemlerinin Optimallik Koşulları." *Süleyman Demirel University Faculty of Arts and Science Journal of Science* 2019;14(1):105-111.
12. Karaman E. *Küme değerli dönüşümlerin optimizasyon yöntemleri*. Diss. Anadolu University, Turkey, 2018.
13. KLIR, George J and Bo Y. "Fuzzy sets and fuzzy logic: theory and applications." *Possibility Theory versus Probab. Theory*, 1996;32(2):207-208.
14. Kon M. "Operation and ordering of fuzzy sets, and fuzzy set-valued convex mappings." *Journal of fuzzy set valued Analysis*, 2014;(2014):1-17.
15. Chalco-Cano Y, Silva GN and Rufián-Lizana A. "On the Newton method for solving fuzzy optimization problems." *Fuzzy Sets and Systems,* 2015(272):60-69.
16. Brown JG. "A note on fuzzy sets." *Information and control,* 1971;18(1):32-39.
17. Şeker S. *Kümelerin cebirsel toplamı, Minkowski farkı ve uygulamaları üzerine* (2014). (Master's thesis, Anadolu University (Turkey).