

İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel tümevarımın versiyonlarına yönelik beceri ve güçlükleri

Prospective primary school mathematics teachers' skills and difficulties towards versions of mathematical induction

Fikret CİHAN^{1*} , Muhammet DORUK² 

¹ Kırklareli Üniversitesi, Teknik Bilimler Meslek Yüksekokulu, Kırklareli, Türkiye

² Uşak Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Uşak, Türkiye

Özet: Bu çalışmada ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel tümevarımın farklı versiyonlarına yönelik beceri ve güçlüklerinin ortaya çıkarılması amaçlanmıştır. Tümevarımın; zayıf, genişletilmiş zayıf, güçlü ve genişletilmiş güçlü tümevarım yöntemi olmak üzere dört versiyonuna odaklanılmıştır. Nitel araştırma yaklaşımı ile tasarlanan çalışma bir durum çalışması örneğidir. Araştırmanın çalışma grubunu 2023-2024 eğitim-öğretim yılı güz döneminde Türkiye'deki bir devlet üniversitesinin ilköğretim matematik öğretmenliği bölümünde öğrenimlerine devam eden ikinci sınıf öğrencileri oluşturmaktadır. Veriler araştırmacılar tarafından geliştirilen Matematiksel Tümevarım Versiyonları Beceri Formu yardımıyla toplanmıştır. Formdan elde edilen veriler betimsel analizle çözümlenmiştir. Çalışma sonucunda öğretmen adaylarının çoğunun zayıf tümevarım dışındaki tümevarım versiyonlarında başarısız oldukları, bu başarısızlığın zayıf tümevarımdan genişletilmiş güçlü tümevarıma doğru gittikçe arttığı tespit edilmiştir. Araştırmanın diğer ilgi çekici bir sonucu da öğretmen adayları zayıf ve genişletilmiş zayıf tümevarım yönteminde çoğunlukla tümevarım adımıyla oluşturmakta güçlük yaşarken güçlü ve genişletilmiş güçlü tümevarım yönteminde ise daha bu adıma geçmeden tümevarım hipotezlerini yazma aşamasında güçlük yaşadıkları ve bu yüzden ispatları tamamlayamadıkları saptanmıştır. Sonuçlar öğretmen yetiştirme bağlamında tartışılmış ve önerilerde bulunulmuştur.

Anahtar Sözcükler: *İspat, matematik eğitimi, öğretmen yetiştirme, tümevarım, tümevarım versiyonları*

Abstract: This study aimed to reveal the skills and difficulties of prospective primary school mathematics teachers towards different versions of mathematical induction. We focus on four induction versions: weak, extended weak, strong, and extended strong induction. The study designed with a qualitative research approach is a case study. The study group consisted of second-year students studying in the Department of Elementary School Mathematics Teacher Education at a state university in Türkiye in the fall semester of the 2023-2024 academic year. The data of the study were collected with the help of the Mathematical Induction Versions Skill Form developed by the researchers. The data obtained from the form were analyzed by descriptive analysis. As a result of the study, it was found that most of the pre-service teachers were unsuccessful in induction versions other than weak induction, and this failure increased from weak induction to extended strong induction. In weak and extended weak induction, the students mostly had difficulty in forming the induction step, whereas in strong and extended strong induction, the students had difficulty in writing induction hypotheses. The results were discussed in the context of teacher training and suggestions were made.

Keywords: *Proof, mathematics education, teacher training, induction, versions of induction*

1. Giriş

Aksiyomatik yöntemle dayanan formal matematik, tanımsız terimler ve aksiyomlarla başlar ve matematiksel ifadeleri matematiksel ve mantıksal kurallarla ispatlayarak gelişir (Garnier ve Taylor, 2009). Matematiğin önemli bir parçası ve bileşeni olan ispatlar ikna edici argümanlardır (Feil ve Krone, 2003). İspatlar matematiksel bir ifadenin doğruluğuna güven sağlamak için tasarlanırlar (Gossett, 2009). Yani ispatlar sadece matematiksel bir ifadenin doğru veya yanlış olduğunu belirlemeye yönelik girişimler değil, aynı zamanda ifadenin doğru veya yanlışlığını bu konuda şüphe duyan birine açıklamak için yazılan ve atılan her adımda belirli bir argüman zincirinin takip edildiği matematiksel gösterimlerdir

(Campbell, 2012). Matematiksel ifadeleri aksiyomatik yapıda ispatlamak için pek çok ispat yöntemi vardır ve bu yöntemlerden birisi de tümevarımdır (Rotman, 2007).

Tümevarımla ispat yöntemi sadece matematikle sınırlı kalmayan informal tümevarımla akıl yürütmeden farklı bir kavramdır (Bloch, 2011). Tümevarımla ispat yöntemi doğal sayıları içeren belirli türdeki matematiksel ifadeleri ispatlamanın çok kullanışlı ve güçlü bir yöntemidir (Bloch, 2011; Cunningham, 2012). Tümevarım; matematiksel yapıların tanımı için bir çerçeve olan yineleme kavramıyla da yakından ilişkilidir (Gerstein, 2012). Özyinelemeli bir dizinin veya toplamın modellerini ve özelliklerini keşfetmek ve ispatlamak için anahtar araç matematiksel tümevarım yöntemidir (Cunningham, 2012). Domino etkisi olarak da adlandırılan bu süreç, genel olarak matematiksel bir ifadenin bir başlangıç değerinden büyük veya ona eşit olan tüm tamsayı değerleri için onun doğru olduğunu ispatlamaya yönelik bir yöntemdir (Campbell, 2012; Epp, 2011). Bu yöntemin tanımları genellikle ya önermeler ya da kümeler üzerine inşa edilir (Movshovitz-Hadar, 1993a).

En yalın haliyle tümevarım yöntemi zayıf ve güçlü tümevarım yöntemi olmak üzere ikiye (Rossi, 2006) ayrılabilir da matematik literatüründe tümevarım yönteminin farklı versiyonları mevcut olup bu versiyonlar farklı kaynaklarda farklı isimlerde adlandırılmışlardır (Arnesen ve Skartsæterhagen, 2025; Beck ve Geoghegan, 2010; Bloch, 2011; Campbell, 2012; Chartrand vd., 2013; Cihan, 2019; Cunningham, 2012; Epp, 2011; Feil ve Krone, 2003; Garnier ve Taylor, 2009; Gossett, 2009; Movshovitz-Hadar, 1993a; Rotman, 2007). Bu çalışmada en geniş haliyle matematiksel tümevarımın zayıf, genişletilmiş zayıf, güçlü ve genişletilmiş güçlü tümevarım olmak üzere dört farklı versiyonu (Chartrand vd., 2013; Cihan, 2019; Lomonaco, t.y.) ele alınmış olup bu versiyonların adımları aşağıda verilmiştir. Genel olarak matematiksel tümevarımla ispat; temel adımı doğrulama yeteneği, tümevarım adımını ispatlama yeteneği ve ispatı doğru bir şekilde sunma yeteneği gibi üç davranışsal beceri gerektirmektedir (Ernest, 1984). Ron ve Dreyfus'a (2004) göre tümevarımla ispatın anlamlandırılması için yapılan ispatların yapısının, tümevarımın temelini ve tümevarım adımının anlaşılması gerekmektedir. Bu çalışmada tümevarım yönteminin; temel adımı doğrulayabilme, kendini ikna adımlarını atabilme, tümevarım hipotezini yazabilme ve bu adımdan hareketle tümevarım adımını ispatlayabilme olmak üzere dört adımı (Chartrand vd., 2013; Cihan, 2019; Cihan ve Akkoç, 2023; Lomonaco, t.y.) üzerinde durulmuştur.

1.1. Zayıf Tümevarım (Weak Induction / Finite Induction)

Zayıf tümevarım yönteminin adımları şu şekilde sıralanabilir (Beck ve Geoghegan, 2010; Chartrand vd., 2013; Cihan, 2019; Garnier ve Taylor, 2009; Gossett, 2009; Hammack, 2013; Rossi, 2006).

$S(n)$ pozitif bir n tamsayısına ilişkin bir önerme iken;

1. Adım: $n = 1$ için $S(1)$ 'in doğru olduğu gösterilir.
2. Adım: Herhangi bir $n = k$ pozitif tamsayısı için $S(k)$ önermesinin doğru olduğu varsayılır.
3. Adım: $n = k + 1$ için $S(k + 1)$ önermesinin doğru olduğu gösterilir.

Zayıf tümevarım yönteminde yukarıdaki 1. adıma temel adım, 2. adıma tümevarım hipotezi ve 2. adımdan hareketle 3. adıma ulaşmaya tümevarım adımı denir (Cihan, 2019; Gossett, 2009; Hammack, 2013; Rossi, 2006). Bunlara ek olarak tümevarımın gerekli bir adımı olmamakla birlikte $n = 1$ temel adımından sonra $n = 2, n = 3, \dots$ için de doğrulama yapılabilir (önermenin doğru olduğuna ikna olunana kadar) ki bunlar ispatlayıcının kendini ikna adımlarıdır (Cihan, 2019; Cihan ve Akkoç, 2023). Kendini ikna adımları bu araştırmada tümevarımın incelenen diğer bir adımdır.

1.2. Genişletilmiş Zayıf Tümevarım (Extended Weak Induction)

Tümevarımsal argüman birden başlayarak bazı pozitif tamsayı değerleri için atlandığında genişletilmiş tümevarım kullanılır (Campbell, 2012). Genişletilmiş zayıf tümevarım yönteminin adımları şu şekilde sıralanabilir (Campbell, 2012; Chartrand vd., 2013; Cihan, 2019; Sundstrom, 2014).

$S(n)$ pozitif bir n tamsayısına ilişkin bir önerme iken;

1. Adım: $n = m > 1$ için $S(m)$ 'in doğru olduğu gösterilir.
2. Adım: Herhangi bir $n = k \geq m$ pozitif tamsayısı için $S(k)$ önermesinin doğru olduğu varsayılır.
3. Adım: $n = k + 1$ için $S(k + 1)$ önermesinin doğru olduğu gösterilir.

Zayıf tümevarım yönteminde $n = 1$ için doğrulama yapılırken genişletilmiş tümevarım yönteminde farklı olarak 1'den büyük ve önermenin doğru olduğu en küçük m pozitif tamsayısı için doğrulama yapılır (Campbell, 2012; Chartrand vd., 2013; Cunningham, 2012).

1.3. Güçlü Tümevarım (Strong Induction / Complete Induction)

Bazen herhangi bir $n = k$ pozitif tamsayısı için $S(k)$ önermesinin doğru olduğunu varsaymak $S(k + 1)$ önermesinin doğru olduğunu ispatlamak için yeterli olmayabilir ya da bu durum çok kullanışlı olmayabilir (Gossett, 2009; Hammack, 2013). Yani tümevarım adımında; $S(k)$ 'den hareketle $S(k + 1)$ 'e ulaşmakta güçlük yaşandığında tümevarımın farklı bir versiyonu ortaya çıkar (Cunningham, 2012). Bu durumda tümevarım hipotezi olarak $1 \leq r \leq k$ olmak üzere tüm $n = r$ pozitif tamsayıları için $S(r)$ önermelerinin doğru olduğu varsayılır (Gossett, 2009; Rossi, 2006). Yani birden fazla ve gerekli olduğu kadar tümevarım hipotezi yazılabilir. Bu yöntemde daha güçlü hipotezler (birden fazla tümevarım hipotezi) varsayıldığından (Gossett, 2009; Rossi, 2006) bu yöntem güçlü tümevarım yöntemi olarak adlandırılır (Gossett, 2009). Güçlü tümevarım yönteminin adımları şu şekilde sıralanabilir (Chartrand vd., 2013; Cihan, 2019; Cunningham, 2012; Gossett, 2009; Rossi, 2006).

$S(n)$ pozitif bir n tamsayısına ilişkin bir önerme iken;

1. Adım: $n = 1$ için $S(1)$ 'in doğru olduğu gösterilir.
2. Adım: $1 \leq r \leq k$ olmak üzere $n = r$ pozitif tamsayıları için $S(r)$ önermelerinin doğru olduğu varsayılır.
3. Adım: $n = k + 1$ için $S(k + 1)$ 'in doğru olduğu gösterilir.

Zayıf tümevarım yönteminde herhangi bir $S(k)$ önermesinin doğru olduğu kabul edilip $S(k + 1)$ 'in doğru olduğu gösterilirken, güçlü tümevarım yönteminde $S(1), S(2), S(3), \dots, S(k)$ önermelerinin doğru olduğu kabul edilip $S(k + 1)$ 'in doğru olduğu gösterilir (Cunningham, 2012; Gossett, 2009; Hammack, 2013).

1.4. Genişletilmiş Güçlü Tümevarım (Extended Strong Induction)

Genişletilmiş güçlü tümevarım yönteminde de birden başlayarak bazı pozitif tamsayı değerleri için teorem sağlanmaz. Bu adımlar atlanır ve teoremin geçerli olduğu en küçük pozitif tamsayıdan başlayarak doğrulama yapılmaya başlanır. Genişletilmiş güçlü tümevarım yönteminin adımları şu şekilde sıralanabilir (Chartrand vd., 2013; Cihan, 2019; Cunningham, 2012; Sundstrom, 2014).

$S(n)$ pozitif bir n tamsayısına ilişkin bir önerme iken;

1. Adım: $n = m > 1$ için $S(m)$ 'in doğru olduğu gösterilir.

2. Adım: $m \leq r \leq k$ olmak üzere $n = r$ pozitif tamsayıları için $S(r)$ önermelerinin doğru olduğu varsayılır.
3. Adım: $n = k + 1$ için $S(k + 1)$ 'in doğru olduğu gösterilir.

Matematiğin önemli görevlerinden biri de düzenli kalıpları ve yinelenen süreçleri keşfedip karakterize etmektir (Epp, 2011). “Matematik eğitimi almış her kişi tümevarım argümanlarını ve özyinelemeli tanımları anlamalıdır” (Beck ve Geoghegan, 2010, s. VIII). Ancak matematiksel tümevarım da dâhil olmak üzere matematiksel ispatları anlamada çeşitli güçlükler yaşayan pek çok öğrenci vardır (Lestyanto vd., 2020). Harel’e (2001) göre standart bir öğretim yaklaşımı benimsendiğinde öğrencilerin matematiksel tümevarım anlayışları büyük ölçüde otoriter ve sembolik ispat şemaları gibi yetersiz ispat şemalarına karşılık gelmektedir. Ayrıca matematik eğitimi literatüründeki araştırmalar, matematik öğretmen adaylarının matematiksel tümevarım yöntemi ile ilgili güçlüklerini ve zayıf anlayışlarını ortaya koymuştur (Cihan, 2019; Güler vd., 2012; Güler ve Ekmekci, 2016; Stylianides vd., 2007). Örneğin Güler vd.’nin (2012) çalışmaları ilköğretim matematik öğretmen adaylarının tümevarımla ispat yapabilme becerilerinin yetersiz düzeyde olduğunu ortaya koymuştur (Güler vd., 2012). Güler ve Ekmekci’nin (2016) çalışmaları ise ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının tümevarımla yapılan ispatları değerlendirmede yetersizliklerini ortaya koymuştur. Stylianides vd.’nin (2007) çalışmalarının sonuçları ise bu yöntemin temel adımı, tümevarım adımı ve bu yöntemin kapsayıcılığı ile ilgili hem ilköğretim hem de ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının yaşadıkları güçlükleri ortaya çıkarmıştır. Sadece öğretmen adayları değil matematik öğretmenleri de (Knuth, 2002; Ron ve Dreyfus, 2004) tümevarım yöntemi ile ilgili güçlükler yaşamaktadırlar. Literatürdeki bazı çalışmalarda matematiksel tümevarımla ilgili çeşitli seviyelerdeki katılımcıların yaşadıkları güçlüklerin üstesinden gelmek ve anlamlı öğrenmeyi teşvik etmek için çeşitli alternatif yaklaşımlar önerilmektedirler (Cusi ve Malara, 2009; Harel, 2001; Norton vd., 2023; Reid, 1992; Ron ve Dreyfus, 2004; Stylianides vd., 2007; Telloni ve Malara, 2021).

Matematiksel tümevarım, matematik öğretmen adaylarının ispat kavramlarını geliştirebilir, mantıksal düşünme becerilerini arttırabilir ve onlara matematiğin ne anlama geldiğine dair bir içgörü sunar (Stylianides vd., 2007). Bu yüzden matematik öğretmen adaylarının matematiksel tümevarım becerilerinin incelendiği çalışmalar literatür için değer taşıyabilir. Ancak literatürdeki çalışmalarda öğretmen adaylarının matematiksel tümevarımın farklı versiyonlarındaki becerilerinin incelendiği ve matematiksel tümevarımın farklı versiyonlarında yaşadıkları güçlüklerin saptanmaya çalışıldığı bir araştırmaya rastlanmamıştır. Dolayısıyla literatürdeki bu eksiği doldurabilmek adına bu araştırmada literatür taramasındaki araştırmalardan farklı olarak araştırmanın kavramsal çerçevesi doğrultusunda ilköğretim matematik öğretmen adaylarının tümevarımın tüm farklı versiyonlarını kullanabilme becerilerinin ayrı ayrı incelenmesi amaçlanmıştır. Bu doğrultuda aşağıdaki araştırma sorularına ayrı ayrı cevap aranmıştır.

- İlköğretim matematik öğretmen adaylarının zayıf tümevarım yapabilme becerileri nasıldır?
- İlköğretim matematik öğretmen adaylarının genişletilmiş zayıf tümevarım yapabilme becerileri nasıldır?
- İlköğretim matematik öğretmen adaylarının güçlü tümevarım yapabilme becerileri nasıldır?
- İlköğretim matematik öğretmen adaylarının genişletilmiş güçlü tümevarım yapabilme becerileri nasıldır?

2. Yöntem

Bu araştırma Hakkâri Üniversitesi Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Kurulu'nun 20.02.2024 tarihli ve 75604 sayılı kurul kararı ile alınan izinle yürütülmüştür.

2.1. Araştırma Modeli

Bu nitel araştırma bir durum çalışması örneğidir. Durum çalışmaları belirli bir olgunun veya durumun doğal ortamında veya bağlamında yoğun bir şekilde araştırılmasına yönelik çalışmalardır (Daymon ve Holloway, 2011).

2.2. Çalışma Grubu

Bu araştırmanın çalışma grubunu; 2023-2024 eğitim-öğretim yılı güz döneminde Türkiye'deki bir devlet üniversitesinin ilköğretim matematik öğretmenliği programı ikinci sınıfında öğrenimlerine devam eden 40 gönüllü öğretmen adayı oluşturmaktadır. Çalışma grubunun seçiminde ölçüt örnekleme tekniği (Patton, 2014; Yıldırım ve Şimşek, 2016) kullanılmıştır. Araştırmaya dâhil etme kriteri olarak ispatlama mantığının öğretildiği Soyut Matematik dersini, analiz alanında tümevarım mantığının öğretiminin yapıldığı Analiz I dersini ve temel matematiksel kavramların tamamlandığı Analiz II dersini başarı ile geçen ve araştırmaya katılmaya gönüllü ikinci sınıf öğrencilerinin olması kararlaştırılmıştır.

2.3. Veri Toplama Aracı ve Süreci

Araştırmacılar tarafından oluşturulan Matematiksel Tümevarım Versiyonları Beceri Formu (MTVBF) veri toplama aracı olarak kullanılmıştır. Matematiksel tümevarımın her bir versiyonu için iki teorem olmak üzere toplamda öncelikle sekiz teorem literatürden seçilmiş sonrasında zorluk düzeyleri ve veri toplama süresi göz önüne alınarak veri toplama aracı için dörde indirilmiştir. Son haliyle MTVBF matematik literatüründen (Bloch, 2011; Chartrand vd., 2013; Cunningham, 2012; Epp, 2011; Garnier ve Taylor, 2009; Sundstrom, 2014) derlenen dört teoremten oluşmaktadır. Teoremler sırasıyla; zayıf, genişletilmiş zayıf, güçlü ve genişletilmiş güçlü tümevarım yöntemi ile ispatlanabilecek teoremlerdir. MTVBF'de yer alan teoremler ve ispatları hakkında bilgiler ekte (Ek-1) sunulmuştur. Araştırmanın verileri bir saatlik süre içerisinde ve tek seferde toplanmıştır. Araştırma hakkında gerekli bilgiler öğretmen adaylarına yazılı ve sözlü olarak aktarıldıktan sonra araştırmaya katılmaya gönüllü katılımcılar tarafından rıza onam formu imzalanmıştır.

2.4. Verilerin Analizi

Öğretmen adaylarından toplanan formlar ÖA1, ÖA2, ÖA3, ..., ÖA40 olarak kodlanmıştır. Veriler çözümlenirken nitel betimsel analiz tekniğinden yararlanılmıştır. Nitel betimsel analiz verilerin çözümlenmesinde hazır kod ya da kategorilerin kullanıldığı bir veri çözümleme yöntemidir (Creswell, 2014; Şahin, 2014) Öğrencilerin yaptıkları matematiksel tümevarımların dört versiyonu; temel adım, kendini ikna adımı, tümevarım hipotezi ve tümevarım adımı olmak üzere dört boyutta incelenmiştir (Ek-1). Her bir boyut tümevarım mantığına uygunluklarına göre; geçerli, kısmen geçerli, geçersiz ve yanıtsız kategorilerinde değerlendirilmiştir.

Temel adım boyutu analiz edilirken doğru temel değer için yapılan eksiksiz ve notasyonel hata bulunmayan doğrulamalar geçerli, doğru temel değer için yapılan ancak notasyonel hata veya eksik bulunan cevaplar kısmen geçerli, doğru temel değer belirlenemediği ya da doğru temel değer için yapılan yanlış işlemler geçersiz olarak kodlanmıştır. Kendini ikna adımı temel değer dışındaki farklı değerler için yapılan doğrulamalar da benzer şekilde kodlanmıştır. Tümevarım hipotezi adımı gerekli olan ve doğru, eksiksiz ya da hatasız yazılan tümevarım hipotezi ya da hipotezleri geçerli, yanlış yazılanlar ise geçersiz olarak kodlanmıştır. Doğru seçilen fakat notasyonel hata bulunduran hipotezler ile gerekli tüm hipotezlerin yazılmaması durumunda kısmen geçerli kodlaması yapılmıştır. Tümevarım adımı tümevarım

hipotezinden hareketle tümevarıma ulaşılan adımlar geçerli, herhangi bir sebeple tümevarıma ulaşılamayan adımlar geçersiz olarak değerlendirilmiştir. Tümevarım hipotezinden hareket edilmeden tümevarım adımının doğruluğunun gösterildiği yanıtlar Güler vd.'nin (2012) çalışmasındakine benzer şekilde kısmen geçerli olarak kodlanmıştır. Tüm soruların tüm boyutlarında atlanan, yapılmayan, yanıtsız bırakılan adımlar ise yanıtsız kategorisinde değerlendirilmiştir.

2.5. Geçerlik ve Güvenirlik Çalışmaları

MTVBF'nin geçerlik ve güvenirlik çalışmaları için uzman görüşü (Hair vd., 2014; Yıldırım ve Şimşek, 2016) alınmıştır. Matematik eğitiminde uzmanlaşmış üç öğretim üyesinden veri toplama aracının matematiksel tümevarımın farklı versiyonlarına yönelik becerileri saptamaya yönelik olup olmadığı ile ilgili görüş alınmıştır. Alınan görüşler neticesinde veri toplama aracındaki (Ek-1) üçüncü ve dördüncü soru için Fibonacci Dizisi ve Lucas Dizisine ait açıklamalara yer verilmesi gerektiğine karar verilmiştir. Ayrıca uzman görüşleri doğrultusunda veri toplama aracının uygulama süresi için 60 dakikanın yeterli olduğu kanısına varılmıştır.

Araştırma güvenirliliği için birinci yazar tarafından yapılan kodlamalar ikinci yazar tarafından tekrar kodlanmıştır. Kodlayıcılar arası uyum yüzdesi Miles ve Huberman'ın (1994, s. 64) güvenirlik formülü olan "Güvenirlik = görüş birliğinin sayısı / (görüş birliği + görüş ayrılığının toplam sayısı)" eşitliğinden hesaplanmıştır. Tablo 1'deki kategoriler için uyum yüzdesi %94, Tablo 2'deki kategoriler için %88, Tablo 3 ve Tablo 4'teki kategoriler için %100 olarak tespit edilmiştir. Tablo 1 ve Tablo 2'deki uyumsuzlukların tümevarım adımının değerlendirilmesi ile ilgili olduğu saptanmıştır. Bu adımdaki kısmen geçerli kategorisinin çerçevesi daha da netleştirilip yazarlar tarafından birlikte tekrar değerlendirilip kodlamaya son hali verilmiştir. Araştırmanın geçerliğini arttırmak için ham verilere yer verilmiştir (Guba ve Lincoln, 1981). Her kategoriye yönelik örnek öğretmen adaylarının ifadeleri üzerinde hiçbir değişiklik yapılmadan sunulmuştur.

3. Bulgular

Bu çalışmada ilköğretim matematik öğretmen adaylarının matematiksel tümevarımın farklı versiyonlarına yönelik beceri ve güçlükleri incelenmiş olup her versiyona ait bulgular aşağıda bölümler halinde sunulmuştur.

3.1. İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Zayıf Tümevarım Yapabilme Becerileri

Çalışmada ilk olarak "İlköğretim matematik öğretmen adaylarının zayıf tümevarım yapabilme becerileri nasıldır?" araştırma sorusuna ait bulgulara yer verilmiş ve bu becerilere dair bulgular Tablo 1'de sunulmuştur.

Tablo 1

Öğretmen adaylarının zayıf tümevarım yapabilme becerileri

Soru	Zayıf Tümevarım Adımları	f			
		Geçerli	Kısmen geçerli	Geçersiz	Yanıtsız
Birinci Soru	Temel Adım	37	0	0	3
	Kendini İkna Adımı	2	0	0	38
	Tümevarım Hipotezi	39	0	0	1
	Tümevarım Adımı	29	9	1	1

Tablo 1'den görüldüğü gibi zayıf tümevarım yöntemi ile ispatlanabilecek birinci soruda 40 öğretmen adayından 37'si (%92,5) temel adımı geçerli bir şekilde yapmışlardır. Bu adımı kısmen geçerli yapan ya da yanlış yapan öğretmen adayı bulunmazken, üç öğretmen adayı ispatında temel adıma yer vermemiştir. Şekil 1'de, yaptıkları ispatta temel adım basamağını geçerli bir şekilde yapabilen öğretmen adaylarına bir örnek sunulmuştur.

$$n=1 \text{ için } 1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$$

Şekil 1

ÖA34'ün temel adımı

İki öğretmen adayı temel adımdan sonraki adım olan kendini ikna adım(lar)ını geçerli bir şekilde yapabilmışlardır. Bu öğretmen adayları teoremi $n = 1$ için doğrulamakla yetinmeyip daha fazla değer için teoremi doğrulamışlardır. Şekil 2'de örnek olarak ÖA8'in temel adımı ve kendini ikna adımı sunulmuştur.

$$n=1 \quad \frac{1 \cdot 2}{2} = 1 > 1$$

$$n=2 \quad \frac{2 \cdot 2}{2} = 3 > 1+2=3$$

Şekil 2

ÖA8'in temel adımı ve kendini ikna adımı

Bir sonraki adım olan tümevarım hipotezini geçerli bir şekilde yazabilen öğretmen adayı sayısı 39'dur (%97,5). Bu öğretmen adayları zayıf tümevarım hipotezini doğru bir şekilde yazarak kabul etmek gerektiğini vurgulamışlardır. Şekil 3'te bu öğretmen adaylarından biri olan ÖA39'un tümevarım hipotezi adımı yer verilmiştir.

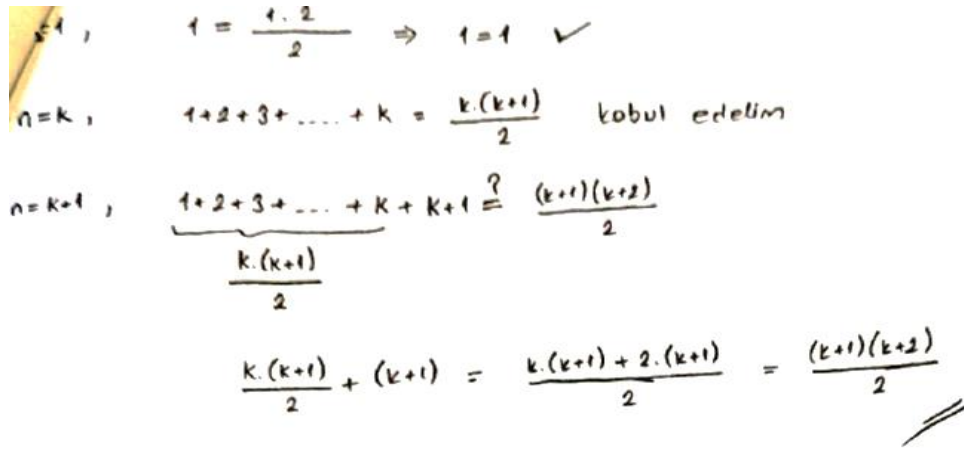
$$1+k \text{ için doğruluğunu kabul edelim}$$

$$1+2+3+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Şekil 3

ÖA39'un tümevarım hipotezi

Öğretmen adaylarının bu soruda en fazla güçlük yaşadıkları adım olan tümevarım adımını 29 öğretmen adayı doğru yapmış (%72,5), dokuz öğretmen adayı kısmen geçerli yapmış, bir öğretmen adayı yanlış yapmış, bir öğretmen adayı da yanıtsız bırakmıştır. Başarısız olan öğretmen adayları; tümevarım hipotezinden hareket etmeme, tümevarım adımından hareket etme ve tümevarım hipotezinden tümevarım adımına ulaşamama gibi güçlükler yaşamışlardır. Tümevarım hipotezinden tümevarım adımına; akıl yürütmedeki eksikliklerden ve matematiksel işlem hatalarından dolayı ulaşamadıkları görülmüştür. Zayıf tümevarım yöntemi ile ispatlanabilecek birinci soruda ÖA33'ün yapmış olduğu geçerli tümevarım adımı Şekil 4'te sunulmuştur.

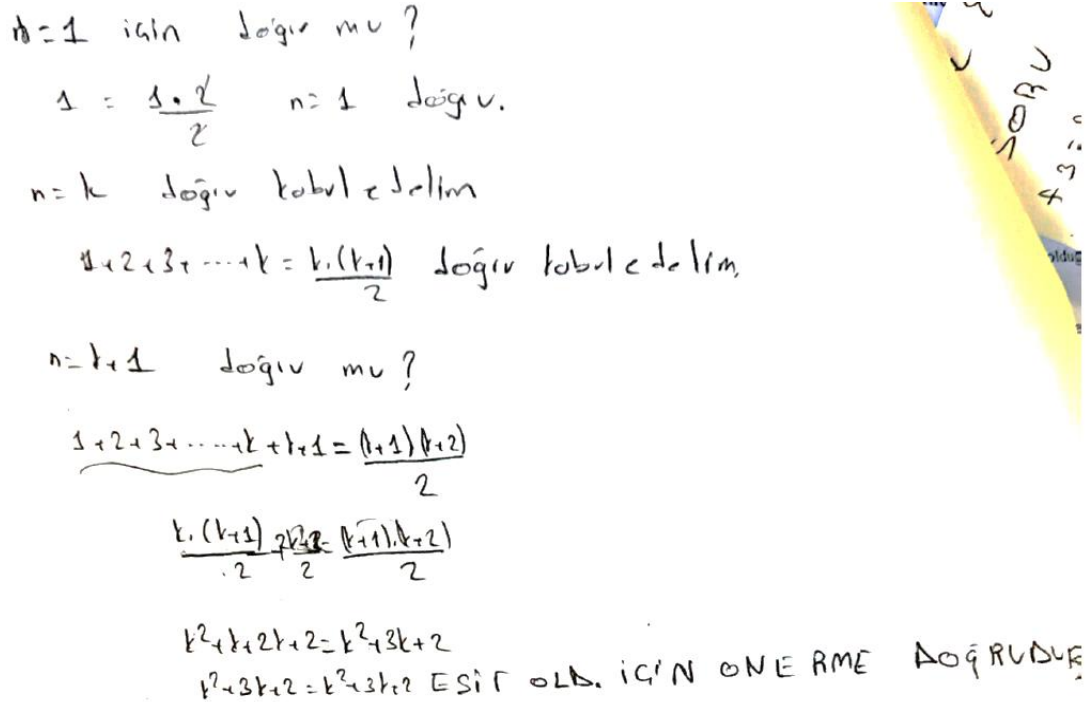


$$\begin{aligned}
 n=1, \quad 1 &= \frac{1 \cdot 2}{2} \Rightarrow 1=1 \quad \checkmark \\
 n=k, \quad 1+2+3+\dots+k &= \frac{k \cdot (k+1)}{2} \quad \text{kobul edelim} \\
 n=k+1, \quad 1+2+3+\dots+k+k+1 &\stackrel{?}{=} \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\
 &\quad \frac{k \cdot (k+1)}{2} \\
 \frac{k \cdot (k+1)}{2} + (k+1) &= \frac{k \cdot (k+1) + 2 \cdot (k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}
 \end{aligned}$$

Şekil 4

ÖA33'ün tümevarım adımı

Şekil 4'ten görüldüğü gibi ÖA33 bu ispattaki üç adımı kendini ikna adımına gerek duymadan geçerli bir şekilde tamamlayabilmiştir. Bu sorudaki tümevarım adımını kısmen geçerli yapabilmiş ÖA7'nin yanıtı aşağıda sunulmuştur.



$$\begin{aligned}
 n=1 \text{ için doğru mu?} \\
 1 &= \frac{1 \cdot 2}{2} \quad n=1 \text{ doğru.} \\
 n=k \text{ doğru kabul edelim} \\
 1+2+3+\dots+k &= \frac{k \cdot (k+1)}{2} \text{ doğru kabul edelim,} \\
 n=k+1 \text{ doğru mu?} \\
 1+2+3+\dots+k+k+1 &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\
 \frac{k \cdot (k+1)}{2} + \frac{k+1}{2} &= \frac{k \cdot (k+1) + (k+1)}{2} \\
 k^2 + k + 2k + 2 &= k^2 + 3k + 2 \\
 k^2 + 3k + 2 &= k^2 + 3k + 2 \text{ EŞİT OLAB. İÇİN ÖNERME DOĞRUDUR.}
 \end{aligned}$$

Şekil 5

ÖA7'nin tümevarım adımı

ÖA7 temel adım ve tümevarım hipotezi adımlarını geçerli bir şekilde yapabilmiştir. Tümevarım adımı ise kısmen geçerlidir. Çünkü tümevarım hipotezinden hareketle matematiksel akıl yürütme ile matematiksel işlemleri kullanarak tümevarım adımına ulaşamamıştır. Tümevarım adımın sonucunu açarak tümevarım hipotezinin sonucuyla eşitleyebilmiştir.

3.2. İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Genişletilmiş Zayıf Tümevarım Yapabilme Becerileri

Bu bölümde “İlköğretim matematik öğretmen adaylarının genişletilmiş zayıf tümevarım yapabilme becerileri nasıldır?” araştırma sorusuna ait bulgulara yer verilmiş ve bu becerilere dair bulgular Tablo 2’de sunulmuştur.

Tablo 2

Öğretmen adaylarının genişletilmiş zayıf tümevarım yapabilme becerileri

Soru	Genişletilmiş Zayıf Tümevarım Adımları	f			
		Geçerli	Kısmen geçerli	Geçersiz	Yanıtsız
İkinci Soru	Temel Adım	39	0	0	1
	Kendini İkna Adımı	5	0	0	35
	Tümevarım Hipotezi	37	0	0	3
	Tümevarım Adımı	10	19	3	8

Tablo 2’den görüldüğü gibi genişletilmiş zayıf tümevarım ile ispatlanabilecek ikinci soruda 40 öğretmen adayının 39’u (%97,5) ispatlarında geçerli temel adım kullanmışlardır. Bazı öğretmen adayları $n = 1$, $n = 2$ ve $n = 3$ için teoremin geçerli olmadığını gösterdikten sonra temel adıma geçmişlerdir. Bu adımı kısmen geçerli ya da geçersiz yapan öğretmen adayı bulunmazken sadece bir öğretmen adayı ispatında temel adıma yer vermemiştir. Örnek olarak ispatlarında iki farklı temel adım barındıran ÖA38 ve ÖA32’nin geçerli temel adımları Şekil 6’da örnek olarak sunulmuştur.

Şekil 6

ÖA38’in ve ÖA32’nin temel adımı

Geçerli bir şekilde kendini ikna adımını ifade eden beş öğretmen adayından ikisi olan ÖA8 ve ÖA37’nin adımı Şekil 7 ve Şekil 8’de sunulmuştur. Bazı öğretmen adayları bir, bazıları da iki veya daha fazla değer için önermeyi doğrulamayı tercih etmişlerdir. ÖA8 temel adımdan sonra bir, ÖA37 ise temel adımdan sonra iki değer için daha doğrulama yapmayı sürdürmüşlerdir

Şekil 7

ÖA8 temel adımı ve kendini ikna adımı

$$\begin{array}{ccc}
 n! > 2^n & n=5 \text{ için} & n=6 \text{ için} \\
 n=4 \text{ için} & & \\
 4! > 2^4 & 5! > 2^5 & 6! > 2^6 \\
 24 > 16 \checkmark & 120 > 32 \checkmark & 720 > 64 \checkmark
 \end{array}$$

Şekil 8

ÖA37 temel adımı ve kendini ikna adımı

Bir sonraki adım olan tümevarım hipotezini ispatlarında geçerli bir şekilde yazan öğretmen adayı sayısı 37'dir (%92,5). Bu öğretmen adayları genişletilmiş zayıf tümevarım hipotezini doğru bir şekilde yazarak bunu kabul etmek gerektiğini vurgulamıştır. Bu öğretmen adaylarından ÖA40'ın adımı Şekil 9'da sunulmuştur.

$$n=k \text{ için } k! > 2^k \rightarrow \text{kabul et}$$

Şekil 9

ÖA40'un tümevarım hipotezi

Yine öğretmen adaylarının bu soruda en fazla güçlük yaşadıkları adım olan tümevarım adımını 10 öğretmen adayı (%25) doğru yapmış, 19 öğretmen adayı kısmen geçerli yapmış, üç öğretmen adayı yanlış yapmış, sekiz öğretmen adayı da yapmamıştır. Tümevarım hipotezini ve tümevarım adımını yapmayan ÖA4'ün yanıtı aşağıda verilmiştir.

$$\begin{array}{ccc}
 n=1 & 1! > 2 & \times \\
 n=2 & 2! > 2^2 & \times \\
 n=3 & 3! > 3^2 & \times \\
 n=4 & 4! > 4^2 & \checkmark \\
 n=5 & 5! > 5^2 & \checkmark \\
 & \vdots & \\
 & & \underline{\underline{n \geq 4}}
 \end{array}$$

Şekil 10

ÖA4 kodlu öğretmen adayının ikinci soruya verdiği yanıt

Şekil 10'dan görüldüğü gibi ÖA4 kodlu öğretmen adayı deneysel doğrulama yapmış ancak ispatı oluşturamamıştır. Çünkü öğretmen adayı tümevarım hipotezini ve tümevarım adımını yapmamıştır. Bu sorudaki tümevarım adımını kısmen geçerli yapabilmış ÖA23'ün yanıtı aşağıda sunulmuştur.

Soru-2 $n=4$ için doğru mu? $N=0,1,2,3,4,5,\dots$ $n \geq 4$ kabulü old. için $n=4$ den başlarız.

$4! > 2^4$ ✓

$n=k$ doğru kabul edelim.

$k! > 2^k$

$n=k+1$ için doğru mu?

$(k+1)! > 2^{k+1}$

$(k+1) \cdot k! > 2^k \cdot 2$

$k+1 > 2$

$n=k+1$ için doğrudur.

Şekil 11

ÖA23'ün tümevarım adımı

Şekil 11'den görüldüğü gibi temel adım ve tümevarım hipotezi adımlarını geçerli bir şekilde tamamlamıştır. Tümevarım adımı ise kısmen geçerlidir. ÖA23 tümevarım hipotezinden hareket etmeme ve tümevarım adımından hareket etme gibi güçlüklerinden dolayı ispatı kısmen geçerli bir şekilde tamamlayabilmiştir. Öğretmen adayları bu adımda zayıf tümevarıma benzer fakat daha fazla güçlükler yaşamışlardır. Dolayısıyla öğretmen adaylarının genişletilmiş zayıf tümevarımla ispat becerileri zayıf tümevarımla ispat yöntemine nazaran daha yetersizdir. Bu soruda güçlük yaşamayan 10 öğretmen adayından biri olan ÖA10'un yapmış olduğu geçerli ispat Şekil 12'de sunulmuştur.

2-) $P(k) = k! > 2^k$ sözler

$P(k) = k! > 2^k$ kabul

$P(k+1) = (k+1)! > 2^{k+1}$ olmalı,

$k! > 2^k$

$\cdot \frac{k+1}{(k+1)!} > 2$

$(k+1)! > 2^{k+1}$,,

$k+1 > 2$

$5 > 2$ her zaman sözler

Şekil 12

ÖA10'un tümevarım adımı

Şekil 12'den görüldüğü gibi ÖA10 temel adımı doğrulamış, tümevarım hipotezini kabul etmiş ve bu adımdan hareketle mantıksal argümanlarla ispatı geçerli bir şekilde tamamlamıştır.

3.3. İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Güçlü Tümevarım Yapabilme Becerileri

Bu bölümde "İlköğretim matematik öğretmen adaylarının güçlü tümevarım yapabilme becerileri nasıldır?" araştırma sorusuna ait bulgulara yer verilmiş ve bu becerilere dair bulgular Tablo 3'de sunulmuştur.

Tablo 3

Öğretmen adaylarının güçlü tümevarım yapabilme becerileri

Soru	Güçlü Tümevarım Adımları	f			
		Geçerli	Kısmen geçerli	Geçersiz	Yanıtsız
Üçüncü Soru	Temel Adım	21	14	2	3
	Kendini İkna Adımı	3	4	1	32
	Tümevarım Hipotezleri	0	32	3	5
	Tümevarım Adımı	4	3	23	10

Tablo 3'ten görüldüğü gibi güçlü tümevarım yöntemi ile ispatlanabilecek üçüncü soruda 40 öğretmen adayından 21'i (%52,5) ispatlarında temel adıma geçerli bir şekilde yer vermişlerdir. Bu adımı kısmen geçerli olan 14 ve geçersiz olan iki öğretmen adayı bulunurken üç öğretmen adayı herhangi bir adım sergilememiştir. Kısmen geçerli adıma sahip öğretmen adaylarının bu adımdaki eksiklikleri matematiksel notasyonları kullanmada yaşadıkları güçlüklerdir. Geçerli temel adım barındıran tümevarımlara örnek olarak ÖA35'in adımı Şekil 13'te sunulmuştur.

Soru 3:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13$$

$$1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7$$

$$\frac{f_2}{1} < 2^1 \quad \checkmark$$

Şekil 13

ÖA35'in temel adımı

Üç öğretmen adayı ise bir ya da birkaç değer için daha doğrulamayı sürdürmüştür. Yani kendini ikna adımlarını devam ettirmiştir. Geçerli kendini ikna adımı yapan üç öğretmen adayından biri olan ÖA30'un temel ve kendini ikna adımları Şekil 14'te sunulmuştur.

$$n = 1 \text{ için doğru} \quad f_1 < 2 \rightarrow 1 < 2$$

$$n = 2 \text{ için doğru} \quad f_2 < 2^2 \rightarrow 2 < 4$$

$$n = 3 \text{ için doğru} \quad f_3 < 2^3 \rightarrow 4 < 8$$

Şekil 14

ÖA30'un temel adımı ve kendini ikna adımı

Bu soruda hiçbir öğretmen adayı tümevarım hipotezlerini geçerli bir şekilde yazamamıştır. 32 öğretmen adayı kısmen geçerli tümevarım hipotezi ifade edebilmiştir. Bu öğretmen adayları zayıf ve genişletilmiş zayıf tümevarım versiyonundaki gibi $n = k$ için teoremin doğruluğunu varsaymışlardır. Yani $n = k$ için $f_k < 2^k$ olduğunu varsaymışlardır. Ancak güçlü tümevarımın bir özelliği olarak $1 \leq r \leq k$ olmak üzere her r pozitif tamsayısı için $f_r < 2^r$ olduğunu varsaymamışlardır. Bu nedenle kısmen geçerli adımlar olarak değerlendirilmişlerdir. Örnek olarak ÖA12'nin adımı Şekil 15'te sunulmuştur.

$$n = k \text{ için doğru kabul edilir,}$$

$$F_k < 2^k \quad \checkmark$$

Şekil 15

ÖA12'nin tümevarım hipotezi

Tümevarımın bu versiyonunda bir sonraki adım olan güçlü tümevarım adımını geçerli bir şekilde ifade edebilen dört öğretmen adayı (%10) tespit edilmiştir. Bu versiyonda öğretmen adayları tümevarım hipotezlerini oluşturamadıkları için ispatlarını tamamlayamamışlardır. Bu adımı tamamlayamayan öğretmen adaylarından biri olan ÖA16'nın tümevarım adımı Şekil 16'da ve bu adımı doğru yapan öğretmen adaylarından biri olan ÖA18'in tümevarım adımı Şekil 17'de sunulmuştur.

$$f_{k+1} < 2^{k+1}$$

$$f_{k+1} < 2^k \cdot 2$$

$$\downarrow$$

$$2f_{k-1} + f_{k-2} < 2^k \cdot 2$$

Şekil 16

ÖA16'nın tümevarım adımı

$$f_{k+1} = f_k + f_{k-1}$$

$$f_k + f_{k-1} < 2^k + 2^k$$

$$f_k < 2^k \text{ ise } f_{k-1} < 2^k \text{ 'dir' bu yüzden}$$

$$f_{k+1} < 2^{k+1} \text{ ispat}$$

Şekil 17. ÖA18'in tümevarım adımı

3.4. İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Genişletilmiş Güçlü Tümevarım Yapabilme Becerileri

Son olarak "İlköğretim matematik öğretmen adaylarının genişletilmiş güçlü tümevarım yapabilme becerileri nasıldır?" araştırma sorusuna ait bulgular Tablo 4'de sunulmuştur.

Tablo 4

Öğretmen adaylarının genişletilmiş güçlü tümevarıma yönelik becerileri

Soru	Genişletilmiş Güçlü Tümevarım Adımları	f			
		Geçerli	Kısmen geçerli	Geçersiz	Yanıtsız
Dördüncü Soru	Temel Adım	22	1	1	16
	Kendini İkna Adımı	5	1	0	34
	Tümevarım Hipotezleri	0	23	0	17
	Tümevarım Adımı	0	1	8	31

Tablo 4'e bakıldığında, 40 öğretmen adayından 22'sinin (%55) ispatlarında geçerli bir temel adıma yer verdikleri görülmüştür. Bu öğretmen adayları " $n = 3$ için $L_3 = 4 = f_5 - f_1 = 5 - 1$ " şeklinde geçerli bir doğrulama yapabilmişlerdir. Diğer öğretmen adayları güçlük yaşamışlar ve 16 öğretmen adayı da bu sorunun tüm adımlarını yanıtsız bırakmışlardır. İspatlarında geçerli temel adım kullanan ÖA9'un örnek adımı Şekil 18'de sunulmuştur.

$$\begin{aligned}
 n=3 \quad L_3 &= L_2 + L_1 \\
 L_3 &= f_5 - f_1 = 4 \\
 5 - 1 &= 4 \\
 4 &= 4 \checkmark
 \end{aligned}$$

Şekil 18

ÖA9'un temel adımı

Beş öğretmen adayı ise ispatlarında geçerli kendini ikna adımına yer vermiştir. Örnek olarak ÖA4'ün adımı Şekil 19'da sunulmuştur.

$$\begin{aligned}
 n=3 \quad L_3 &= f_5 - f_1 \\
 \downarrow \\
 L_1 &= 5 - 1 \\
 \\
 n=4 \quad L_4 &= f_6 - f_2 \\
 7 &= 8 - 1 \\
 \vdots
 \end{aligned}$$

Şekil 19

ÖA4'ün temel adımı ve kendini ikna adımı

İspatlarında tümevarım hipotezlerini geçerli bir şekilde yazabilen öğretmen adayı tespit edilmemiştir. 23 öğretmen adayı ispatlarında kısmen geçerli olarak değerlendirilebilecek adımlara yer vermiştir. Bu öğretmen adayları zayıf ve genişletilmiş zayıf tümevarım versiyonundaki gibi $n = k$ için teoremin doğruluğunu varsaymışlardır. Yani sadece herhangi bir $n = k$ için $L_k = f_{k+2} - f_{k-2}$ olduğunu varsaymışlardır. Ancak güçlü tümevarımın bir özelliği olarak $3 \leq r \leq k$ olmak üzere her r pozitif tamsayısı için $L_r = f_{r+2} - f_{r-2}$ olduğunu varsaymamışlardır. Bu nedenle söz konusu adımlar kısmen geçerli olarak değerlendirilmiştir. ÖA27'nin örnek adımı Şekil 20'de yer verilmiştir.

$$n=k \quad \text{ için } \quad L_k = f_{k+2} - f_{k-2} \quad \text{ kabul}$$

Şekil 20

ÖA27'nin tümevarım hipotezi

Şekil 20’den görüldüğü üzere ÖA27 sadece $n = k$ için eşitliğin doğruluğunu varsaymıştır. Ancak $n = k - 1, n = k - 2, n = k - 3, \dots$ için kabul ifadesi yazmaması eksikliklerdir. Bu nedenle, ispatlarında geçerli tümevarım adımı olan öğretmen adayına rastlanmamıştır. Dolayısıyla öğretmen adaylarının en başarısız olduğu versiyonun genişletilmiş güçlü tümevarım olduğu söylenebilir. Genişletilmiş güçlü tümevarımda sadece bir öğretmen adayı (ÖA23) kısmen geçerli tümevarım adımını oluşturabilmiştir. ÖA23’ün tümevarım adımı Şekil 21’de sunulmuştur.

$$\begin{aligned}
 & n = k+1 \text{ için doğru mu?} \\
 & L_{k+1} = S_{k+1} - S_{k-1} \\
 & L_k + L_{k-1} = S_{k+2} + S_{k+1} - S_{k-2} - S_{k-3} \\
 & L_{k-1} = S_{k+1} - S_{k-3} \\
 & (n = k+1 \text{ için doğrudur.})
 \end{aligned}$$

Şekil 21

ÖA23’ün tümevarım adımı

4. Sonuç, Tartışma ve Öneriler

Çalışmanın sonucunda öğretmen adaylarının çoğunluğunun zayıf tümevarım dışındaki tümevarım versiyonlarında başarısız oldukları ortaya çıkmıştır. Bu başarısızlık zayıf tümevarımdan genişletilmiş güçlü tümevarıma doğru artarak devam etmektedir. Öyle ki, 29 öğretmen adayı zayıf tümevarım yapabilirken, 10 öğrenci genişletilmiş zayıf, dört öğrenci güçlü tümevarım yapabilmıştır. Hiçbir öğretmen adayı genişletilmiş güçlü tümevarım yapamamıştır. Buna ek olarak öğretmen adaylarının tümevarımın tüm versiyonlarında birçok güçlüğe sahip oldukları tespit edilmiştir. Literatürdeki bazı teorik ve uygulamalı çalışmalarda da tümevarım yöntemi ile ilgili yaşanan teknik, matematiksel, kavramsal, davranışsal, bilişsel, pedagojik ve epistemolojik güçlükler (Arnesen ve Skartsæterhagen, 2025; Avital ve Libeskind, 1978; Baker, 1996; Brown, 2003; Doğan-Dunlap vd., 2013; Dubinsky, 1986, 1990; Ernest, 1984; Fischbein ve Engel, 1989; Güler vd., 2012; Güler ve Ekmekci, 2016; Miyazaki, 2000; Reid, 1992; Stylianides vd., 2007) raporlanmıştır.

Öğretmen adayları tümevarımın tüm versiyonlarında çoğunlukla temel adımı yapmaya gereksinim duymuşlar ve yine çoğunlukla doğru bir şekilde bu adımı tamamlayabilmişlerdir. Literatürdeki pek çok çalışmanın sonuçlarının (Dubinsky, 1986, 1990; Ernest, 1984; Güler vd., 2012; Harel, 2001) aksine öğretmen adaylarının çoğu bu adımı gereksiz bir adım olarak düşünmemişlerdir. Dubinsky’e göre (1986, 1990) tümevarımla ilgili öğrenci güçlüklerinden birisi temel adımın anlamsız bir prosedür olarak görülmesidir. Ernest (1984) ve Harel’e (2001) göre tümevarım yöntemindeki adımlardan birini çoğunlukla da temel adımı gereksiz görme tümevarımla ilgili sık karşılaşılan kavramsal yanlışlardan biridir. Temel adım ispat çabasını haklı çıkarmak için yapılan gereksiz bir adım veya tümevarım adımından daha kolay olduğu için atlanması gereken bir eylem gibi düşünülse de bu adım algılanandan daha önemlidir ve tümevarım için olmazsa olmaz bir adımdır (García-Martínez ve Parraguez, 2017; Ron ve Dreyfus, 2004). Güçlü ve genişletilmiş güçlü tümevarım

yönteminde matematiksel notasyondan kaynaklı sorunlar ve ispatlanacak konunun matematiksel alan bilgisinin eksikliğinden kaynaklı sorunlar bazı öğretmen adaylarının temel adımda birtakım güçlükler yaşamalarına sebep olmuştur.

Öğretmen adaylarının çoğunluğu tümevarımın tüm versiyonlarında kendini ikna adım(lar)ını yazmaya gerek duymamışlardır. Bu adımı yapma gereksinimi duyan öğretmen adayları bir veya birkaç değerle kendileri ikna olana kadar doğrulama yapmaya devam etmişlerdir. Öğretmen adayları temel değeri takip eden, teoremin geçerli olduğu ardışık tam sayı değerleri için bu doğrulamaları sürdürmüşlerdir. Genişletilmiş tümevarım versiyonlarında ise aynı zamanda teoremin geçerli olmadığı temel değerden önceki bir ya da birkaç değer için teoremin bu değerler için geçerli olmadığını da göstermişlerdir.

Öğretmen adaylarının tümevarımın genişletilmiş versiyonlarında diğerlerine göre daha başarısız oldukları görülmektedir. Genişletilmiş tümevarım versiyonlarında teoremin geçerli olmadığı bazı değerler için tümevarım adımı ek işlemler yapılması gerekebildiğinden öğretmen adayları bu versiyonlarda zorlanmışlardır. Yine benzer şekilde öğretmen adaylarının güçlü tümevarım versiyonlarında zayıf tümevarım versiyonlarına göre daha başarısız oldukları açıktır. Öğretmen adaylarının çoğunluğu zayıf ve genişletilmiş zayıf tümevarım versiyonlarında tümevarım hipotezini doğru bir şekilde yazabilmişlerdir. Ancak güçlü ve genişletilmiş güçlü tümevarım versiyonlarında tümevarım hipotezlerini doğru bir şekilde yazamamışlardır. Öğretmen adayları güçlü ve genişletilmiş güçlü tümevarım versiyonlarında zayıf ve genişletilmiş zayıf tümevarım versiyonlarındaki gibi tek bir tümevarım hipotezi yazmışlar dolayısıyla bu adımı kısmen geçerli yapabilmişlerdir. Birden fazla tümevarım hipotezi yazmak öğretmen adayları için güçlük oluşturmuştur. Tümevarım hipotezi öğrencilerin kavram yanılgısı yaşadıkları bir husustur. Baxandall vd.'ne (1978, s. 85) göre tümevarım yönteminin öğrenciler arasında "ispatlamak zorunda olduğumuz şeyi varsaydığımız ve sonra onu ispatladığımız bir yöntem" olarak görülmesi buna bir örnektir (Ernest, 1984). Ayrıca öğrencilerin pek çoğu tümevarım hipotezinin doğruluğunu tümevarım adımı düşünme eğilimindedir (Fischbein ve Engel, 1989). Çalışmanın sonuçları güçlü tümevarım versiyonlarında birden fazla tümevarım hipotezi yazma noktasında yaşanan güçlükleri öğretmen eğitiminde müdahale edilmesi bir sorun olarak ortaya çıkarmıştır.

Öğretmen adaylarının güçlü tümevarım versiyonlarında hipotezleri oluşturmada güçlük yaşadıkları saptanırken zayıf tümevarım versiyonlarında ise tümevarım adımı güçlülük yaşadıkları belirlenmiştir. Literatürdeki bazı çalışmalar tümevarım hipotezinden tümevarım adımına geçişteki güçlükler dikkat çekmektedir (Cihan, 2019; Dubinsky, 1986, 1990; Fischbein ve Engel, 1989; Güler vd., 2012; Palla vd., 2012). Bu çalışmanın başka bir sonucu olarak, öğretmen adaylarının tümevarım hipotezlerini yazamama, tümevarım hipotez(ler)inden hareket etmeme, tümevarım adımı hareket etme ve tümevarım hipotez(ler)inden tümevarım adımına ulaşamama gibi güçlükler yaşadıkları tespit edilmiştir. Tümevarım hipotez(ler)inden tümevarım adımına akıl yürütmedeki eksikliklerden ve matematiksel işlem hatalarından dolayı ulaşamamışlardır. Bu sonuçlar tümevarım adımındaki başarısızlıkların sebebinin yetersiz matematiksel alan bilgisinden kaynaklı olduğunu (Baker, 1996), akıl yürütmedeki eksiklerden kaynaklı olduğunu (Cihan, 2019; Güler vd., 2012; Knapp, 2005), tümevarım adımındaki değişkenin farklı rollerinden kaynaklı olduğunu (Reid, 1992) ve tümevarım hipotezinden hareket etmeme kaynaklı olduğunu (Cihan, 2019; Dubinsky, 1986, 1990; Güler vd., 2012) vurgulayan çalışmaları destekler niteliktedir. Ayrıca temel adımda olduğu gibi tümevarım adımının gerekliliği ve faydası konusunda öğrencilerin sınırlı anlayışları yaygın bir sorundur (Stylianides vd., 2016).

Matematiksel tümevarımın adımlarındaki bu prosedürel yaklaşım her ne kadar gerekli olsa da bazı zorlukları da beraberinde getirmektedir. Tümevarım yönteminin adımlarında karşılaşılan bu sorunlar “Yoksa bu öğrenciler gerçekte ne yaptıklarını anlamadan sadece matematiksel tümevarımla ispat yazmak için önceden belirlenmiş bir senaryoyu mu takip ediyorlar?” (Michaelson, 2008, s. 61) sorusunu akla getirebilir. Knuth (2002) tarafından yapılan çalışmanın sonuçları matematik öğretmenlerinin dâhi matematiksel tümevarımla ispatı; bu yöntemi anladıkları için değil bu yöntemin benzer matematiksel durumlarda teknik olarak uygulanabileceğini bildikleri için kabul ettiklerini ortaya koymuştur. Matematiksel tümevarımla ispat yöntemi üniversite matematik derslerinin merkezinde olmasına karşın, birçok lisans öğrencisi bu yöntemi anlama konusunda güçlük yaşamaktadır ki “bu da bilginin kırılgan olduğunun bir göstergesidir” (Stylianides vd., 2007, s. 148). Ancak matematik öğretmenlerinin matematiksel tümevarım hakkındaki bilgi düzeylerinin gelişmiş olması gerekmektedir (Movshovitz-Hadar, 1993b). Bu yüzden en geç haliyle matematik öğretmen eğitiminde bu güçlüklerin üstesinden gelinmesi gerekmektedir.

Geleneksel öğretim yaklaşımları tümevarımla ispat öğretiminde öğrencilerin gelişimlerini kolaylaştırmamaktadır (Brown, 2003). Lestyanto vd.’nin (2020) çalışmalarının sonuçları; öğretim elemanlarının, öğrencilerin tümevarımla ispatları anlamalarına yardımcı olacak farklı stratejiler tasarlamalarının veya materyeller geliştirmelerinin gerekliliğini ortaya koymaktadır. Tümevarımla ispat yönteminin öğretimi tümdengelimle ispat yöntemlerinin öğretime nazaran görsel ve materyel kullanımına daha uygundur. Dolayısıyla sınıf içi uygulamalarda bu tür görsel ve materyellere öğretmen yetiştirme programlarında yer verilebilir. Örneğin modellerin matematiksel tümevarımla ispatı açıklamadaki potansiyel katkıları göz önünde bulundurulduğunda öğretmen eğitiminde Hanoi Kuleleri gibi modellerin kullanılması tümevarım adımlarıyla ilgili güçlüklerin üstesinden gelmede faydalı olabilir (Ron ve Dreyfus, 2004). Yine ispat öğretiminde modern dinamik geometri yazılımları öğrencilere sezgilerini ve varsayımlarını kolayca kontrol etme imkânı sağlar (Marrades ve Gutiérrez, 2000). Dinamik matematik yazılımlarının etkileşimli gücü de tümevarımla ispat yöntemi için faydalı öğeler taşıyabilir. Öğretmen eğitimi programlarında bu yazılımların tümevarımla ispat öğretiminde işe koşulması önerilebilir.

Zihinlerindeki bazı kavramsal yanılgılardan dolayı öğrenciler matematiksel tümevarımı öğrenirken bazı güçlüklerle karşılaşmaktadırlar (Ernest, 1984). Öğrencilerin matematiksel tümevarım ilkesini öğrenirken karşılaştıkları güçlükleri en aza indirmek için onun mantıksal yönlerini açıklığa kavuşturacak ve öğrencilerin bu yöntemi anlamalarını teşvik edecek yöntemler tasarlanmalıdır (Cusi ve Malara, 2009). Örneğin öğretmen adaylarının matematiksel tümevarımla ispat anlayışlarını ve ispat şemalarını geliştirmek için standart öğretim yaklaşımlarından ziyade matematiksel tümevarıma yönelik farklı öğretim deneylerinden oluşan ve farklı öğrenme-öğretme ilkeleri benimsenen alternatif öğretim yaklaşımlarının (DNR gibi) benimsenmesi faydalı olabilir (Harel, 2001). Matematiksel tümevarım öğretiminin, öğretmen uygulamaları veya öğrenci işbirliği gibi sosyal yönleri içeren bağlamlarda tartışıldığı daha çok çalışmaya ihtiyaç vardır (Arnesen ve Skartsæterhagen, 2025). Bu noktadan dolayı bu çalışmanın sonuçlarından hareketle, gelecekteki çalışmalarda tüm tümevarım versiyon ispatlarının sosyal boyutları ayrı ayrı ele alınabilir.

Ayrıca ileriki çalışmalarda özellikle öğretmen yetiştirme bağlamında tümevarımla ilgili öğretmen adaylarının yaşadıkları güçlüklerin psikolojik, didaktik ve epistemolojik nedenleri (Cornu, 1991) araştırılabilir. Bu nedenleri ortadan kaldırarak çözüm önerileri tasarlanıp geliştirilebilir, uygulamadan elde edilen sonuçlar doğrultusunda önerilerde bulunulabilir. Tümevarımla ispat tümdengelimle ispat yöntemlerinden yapısal olarak farklıdır. Dolayısıyla bu ispat yöntemleri birbirinden farklı beceriler gerektirir. Öğretmen eğitiminde tümevarımla ispat ve tümdengelimle ispat yöntemleri ayrı ayrı ele alınıp kendi bağlamlarında çalışılmalıdır. Son olarak tümevarımla ispatın tüm versiyonlarının bu bağlam içine dâhil edilmesi önerilebilir.

Kaynakça

- Arnesen, K. K., & Skartsæterhagen, Ø. I. (2025). Mathematical induction in education research: A systematic review. *Educational Studies in Mathematics*. <https://doi.org/10.1007/s10649-024-10373-x>
- Avital, S., & Libeskind, S. (1978). Mathematical induction in the classroom: Didactical and mathematical issues. *Educational Studies in Mathematics*, 9(4), 429-438. <https://doi.org/10.1007/BF00410588>
- Baker, J. D. (1996, April 8–12). *Students' difficulties with proof by mathematical induction* [paper presentation]. Annual Meeting of the American Educational Research Association, New York, NY, United States.
- Baxandall, P. R., Brown, W. S., Rose, G. St. C., & Watson, F. R. (1978). *Proof in mathematics*. Institute of Education, University of Keele.
- Beck, M., & Geoghegan, R. (2010). *The art of proof: Basic training for deeper mathematics*. Springer Science + Business Media.
- Bloch, E. D. (2011). *Proofs and fundamentals: A first course in abstract mathematics* (2nd ed.). Springer Science + Business Media.
- Brown, S. (2003). *The evolution of students' understanding of mathematical induction: A teaching experiment* (Order No. 3090458) [Doctoral Dissertation. University of California] ProQuest Dissertations & Theses Global. (305355390). <https://www.proquest.com/dissertations-theses/evolution-students-understanding-mathematical/docview/305355390/se-2>
- Campbell, C. M. (2012). *Introduction to advanced mathematics: A guide to understanding proofs*. Brooks/Cole, Cengage Learning.
- Chartrand, G., Polimeni, A. D., & Zhang, P. (2013). *Mathematical proofs: A transition to advanced mathematics* (3rd ed.). Pearson Education, Inc.
- Cihan, F. (2019). *Matematik öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan ve pedagojik alan bilgilerini geliştirmeye yönelik bir ders tasarımı* (Tez No. 570220) [Doktora tezi, Marmara Üniversitesi]. Yükseköğretim Kurulu Başkanlığı Tez Merkezi. <https://tez.yok.gov.tr/UlusalTezMerkezi/>
- Cihan, F., & Akkoç, H. (2023). An intervention study for improving pre-service mathematics teachers' proof schemes. *Mathematics Teaching-Research Journal*, 15(2), 56-80. <https://eric.ed.gov/?id=EJ1394137>
- Cornu, B. (1991). Limits. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 153-166). Kluwer.
- Creswell, J. W. (2014). *Araştırma deseni: Nitel, nicel ve karma yöntem yaklaşımları*. (S. B. Demir, Çev.). (4.baskıdan çeviri). Eğiten Kitap.
- Cunningham, D. W. (2012). *A logical introduction to proof*. Springer.
- Cusi, A., & Malara, N. A. (2009). Improving awareness about the meaning of the principle of mathematical induction. *PNA*, 4(1), 15-22. <https://doi.org/10.30827/pna.v4i1.6170>
- Daymon, C., & Holloway, I. (2011). *Qualitative research methods in public relations and marketing communications* (2nd ed.). Routledge. <https://doi.org/10.4324/9780203846544>

- Doğan-Dunlap, H., Özdemir-Erdoğan, E., & Kılıç, Ç. (2013). Matematiksel tümevarım: Karşılaşılan kavram yanlışları ve öğrenme güçlükleri. M. F. Özmentar, E. Bingölbalı ve H. Akkoç (Ed.), *Matematiksel kavram yanlışları ve çözüm önerileri* (3. Baskı) içinde (s. 291-328). PegemA.
- Dubinsky, E. (1986). Teaching mathematical induction I. *Journal of Mathematical Behavior*, 5, 305-317.
- Dubinsky, E. (1990). Teaching mathematical induction II. *Journal of Mathematical Behavior*, 8, 285-304.
- Epp, S. S. (2011). *Discrete mathematics: An introduction to mathematical reasoning* (Brief ed.). Brooks/Cole, Cengage Learning.
- Ernest, P. (1984). Mathematical induction: A pedagogical discussion. *Educational Studies in Mathematics*, 15(2), 173-189. <https://dx.doi.org/10.1007/BF00305895>
- Feil, T., & Krone, J. (2003). *Essential discrete mathematics for computer science*. Upper Saddle Pearson Education, Inc.
- Fischbein E., & Engel, I. (1989). Psychological difficulties in understanding the principle of mathematical induction. In G. Vergnaud, J. Rogalski, & M. Artigue (Eds.), *Proceedings of the 13th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. I, pp. 276-282). Paris, France: CNRS.
- García-Martínez, I., & Parraguez, M. (2017). The basis step in the construction of the principle of mathematical induction based on APOS theory. *The Journal of Mathematical Behavior*, 46, 128-143. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.04.001>
- Garnier, R., & Taylor, J. (2009). *Discrete mathematics: Proofs, structures, and applications* (3rd ed.). CRC Press, Taylor & Francis Group, LLC.
- Gerstein, L. J. (2012). *Introduction to mathematical structures and proofs* (2nd ed.). Springer.
- Gossett, E. (2009). *Discrete mathematics with proof* (2nd ed.). John Wiley & Sons.
- Guba, E. G., & Lincoln, Y. S. (1981). *Effective evaluation: Improving the usefulness of evaluation results through responsive and naturalistic approaches*. Jossey-Bass.
- Güler, G., & Ekmekci, S. (2016). Matematik öğretmeni adaylarının ispat değerlendirme becerilerinin incelenmesi: Ardışık tek sayıların toplamı örneği. *Bayburt Eğitim Fakültesi Dergisi*, 11(1), 59-83. <http://dergipark.gov.tr/befdergi/issue/23129/247062>
- Güler, G., Özdemir, E., & Dikici, R. (2012). Öğretmen adaylarının matematiksel tümevarım yoluyla ispat becerileri ve matematiksel ispat hakkındaki görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 20(1), 219-236. <https://dergipark.org.tr/tr/pub/kefdergi/issue/48696/619520>
- Hair, J. F., Black, W. C., Babin, B. J., & Anderson, R. E. (2014). *Multivariate Data Analysis* (7th ed.). Pearson Education, Inc.
- Hammack, R. (2013). *Book of proof* (3rd ed.). Publisher: Author. <https://www.people.vcu.edu/~rhammack/BookOfProof/>
- Harel, G. (2001). The development of mathematical induction as a proof scheme: A model for DNR-based instruction. In S. Campbell, & R. Zaskis (Eds.), *Learning and teaching number theory* (pp.185-212). Ablex Publishing Corporation.
- Knapp, J. (2005). *Learning to prove in order to prove to learn*. http://mathpost.asu.edu/~sjgm/issues/2005_spring/SJGM_knapp.pdf

- Knuth, E. J. (2002). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 379-405. <https://www.jstor.org/stable/4149959>
- Lestyanto, L. M., Sudirman, S., Susiswo, S., & Hidayanto, E. (2020, April). The level of students' reading comprehension on proof by mathematical induction. In *AIP Conference Proceedings* (Vol. 2215, No. 1, 060014). AIP Publishing. <https://doi.org/10.1063/5.0000564>
- Lomonaco, S. J. (t.y.). *Class notes on mathematical induction*. Publisher: Author.
- Marrades, R., & Gutiérrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1-2), 87-125. <https://dx.doi.org/10.1023/A:1012785106627>
- Michaelson, M. T. (2008). A literature review of pedagogical research on mathematical induction. *Australian Senior Mathematics Journal*, 22(2), 57-62. <https://eric.ed.gov/?id=EJ819415>
- Miles, M. B., & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis: An expanded sourcebook* (2nd ed.). Sage Publications, Inc.
- Miyazaki, M. (2000). Levels of proof in lower secondary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 41(1), 47-68. <https://dx.doi.org/10.1023/A:1003956532587>
- Movshovitz-Hadar, N. (1993a). Mathematical induction: A focus on the conceptual framework. *School Science and Mathematics*, 93(8), 408-417. <https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.1993.tb12271.x>
- Movshovitz-Hadar, N. (1993b). The false coin problem, mathematical induction and knowledge fragility. *Journal of Mathematical Behavior*, 12(3), 253-268. <https://eric.ed.gov/?id=EJ484115>
- Norton, A., Arnold, R., Kokushkin, V., & Tiraphatna, M. (2023). Addressing the cognitive gap in mathematical induction. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 9(4), 295-321. <https://doi.org/10.1007/s40753-022-00163-2>
- Palla, M., Potari, D., & Spyrou, P. (2012). Secondary school students' understanding of mathematical induction: structural characteristics and the process of proof construction. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 10(5), 1023-1045. <https://doi.org/10.1007/s10763-011-9311-2>
- Patton, M. Q. (2014). *Nitel araştırma ve değerlendirme yöntemleri* (3. baskıdan çeviri) (M. Bütün & S. B. Demir, Çev. Haz.). Pegem Akademi.
- Reid, D. (1992). *Mathematical induction: An epistemological study with consequences for teaching* (Order No. MM80943) [Master thesis, Concordia University]. ProQuest Dissertations & Theses Global. (304027786). <https://www.proquest.com/dissertations-theses/mathematical-induction-epistemological-study-with/docview/304027786/se-2>
- Ron, G., & Dreyfus, T. (2004). The use of models in teaching proof by mathematical induction. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 113-120). Bergen, Norway: Bergen University College.
- Rossi, R. J. (2006). *Theorems, corollaries, lemmas, and methods of proof*. John Wiley & Sons, Inc.

- Rotman, J. J. (2007). *Journey into mathematics: An introduction to proofs*. Dover Publications, Inc.
- Stylianides, G. J., Sandefur, J., & Watson, A. (2016). Conditions for proving by mathematical induction to be explanatory. *The Journal of Mathematical Behavior*, 43, 20-34. <https://doi.org/10.1016/j.imathb.2016.04.002>
- Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., & Philippou, G. N. (2007). Preservice teachers' knowledge of proof by mathematical induction. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10(3), 145-166. <http://dx.doi.org/10.1007/s10857-007-9034-z>
- Sundstrom, T. (2014). *Mathematical reasoning: Writing and proof*. Pearson Education, Inc.
- Şahin, Ç. (2014). Verilerin analizi. R. Y. Kincal (Ed.), *Bilimsel araştırma yöntemleri* (3. Baskı) içinde (183-219). Nobel Yayın Dağıtım.
- Telloni, A. I., & Malara, N. A. (2021). A constructive and metacognitive teaching path at university level on the principle of mathematical induction: Focus on the students' behaviours, productions and awareness. *Teaching Mathematics and Computer Science*, 19(1), 133-161. <https://doi.org/10.5485/TMCS.2021.0525>
- Yıldırım, A., & Şimşek, H. (2016). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri* (10. baskı). Seçkin Yayınevi.

Extended Abstract

Introduction, Purpose, and Significance

In mathematics, there are many methods for proving that propositions are true or false, and mathematical induction is one of these methods (Rotman, 2007). Pre-service mathematics teachers are expected to be able to understand and perform mathematical induction (Movshovitz-Hadar, 1993b). However, studies in the mathematics education literature have reported pre-service teachers' difficulties with mathematical induction (Cihan, 2019; Güler et al., 2012; Güler & Ekmekci, 2016; Stylianides et al., 2007). Moreover, there is no study in the literature that separately examines pre-service mathematics teachers' skills and difficulties in all different versions of mathematical induction. Because of these reasons, this study aimed to reveal the skills and difficulties of prospective primary school mathematics teachers towards different versions of mathematical induction. We focus on four versions of induction: weak, extended weak, strong, and extended strong induction (Chartrand et al., 2013; Cihan, 2019; Lomonaco, n.d.). In addition, this study focuses on the four steps of the inductive method: verifying the basic step of induction, taking the steps of self-convincing, writing the inductive hypothesis, and proving the inductive step based on this step (Chartrand et al., 2013; Cihan, 2019; Lomonaco, n.d.). In this direction, answers to the following research questions were sought separately.

1. How are prospective primary school mathematics teachers' weak induction skills?
2. How are prospective primary school mathematics teachers' extended weak induction skills?
3. How are prospective primary school mathematics teachers' strong induction skills?
4. How are prospective primary school mathematics teachers' extended strong induction skills?

Method

The study designed with a qualitative research approach is a case study (Daymon & Holloway, 2011). The study group consisted of second-year students studying in the Department of Elementary School Mathematics Teacher Education at

a state university in Türkiye in the fall semester of the 2023-2024 academic year. 40 volunteer pre-service teachers participated in the study. The data of the study were collected with the help of the Mathematical Induction Versions Skill Form (MIVSF) developed by the researchers. MIVSF consists of four theorems collected from the literature (Bloch, 2011; Chartrand et al., 2013; Cunningham, 2012; Epp, 2011; Garnier & Taylor, 2009; Sundstrom, 2014). The theorems can be proved by weak, extended weak, strong, and extended strong induction, respectively. Information about the theorems and their proofs in MIVSF is presented in the appendix (See Appendix 1). The data obtained from the form were analyzed by descriptive analysis (Creswell, 2014; Şahin, 2014). The four versions of mathematical inductions made by the students were analyzed in four dimensions: basic step, self-convincing step, inductive hypothesis, and inductive step (See Appendix 1). Expert opinions (Hair et al., 2014; Yıldırım & Şimşek, 2016) were consulted for the data collection tool. Each dimension was categorized as valid, partially valid, invalid, and unanswered according to their conformity to the logic of induction. The inter-coder agreement (Miles & Huberman, 1994) was sought for coding. We also include verbatim citations and raw data (Guba & Lincoln, 1981) for all versions of mathematical induction.

Results and Discussion

As a result of the study, it was found that most of the pre-service teachers were unsuccessful in induction versions other than weak induction, and this failure increased from weak induction to extended strong induction. In fact, 29 pre-service teachers were able to make weak induction, while 10 students were able to make extended weak induction, and four students were able to make strong induction. No pre-service teacher could do extended strong induction. It was seen that teacher candidates mostly needed to do the basic step in all versions of induction, and they were mostly (more than half) able to complete this step correctly. The majority of the pre-service teachers did not need to write the step(s) of self-convincing in all versions of induction. The pre-service teachers who needed to do this step continued to verify for one or a few more values until they were convinced themselves. It is seen that pre-service teachers are more unsuccessful in the extended versions of induction than in the others.

In weak and extended weak induction, the students mostly had difficulty in forming the induction step, whereas in strong and extended strong induction, the students had difficulty in writing induction hypotheses. The pre-service teachers wrote a single hypothesis in the strong and extended strong induction versions as in the weak and extended weak induction versions, so they were able to make this step partially valid. Writing more than one hypothesis posed a difficulty for the preservice teachers.

As another result of this study, it was determined that pre-service teachers had difficulties such as not being able to write inductive hypotheses, not acting from the inductive hypothesis(es), acting from the inductive step, and not reaching the inductive step from the inductive hypothesis(es). They could not reach the inductive step from the inductive hypothesis(es) due to deficiencies in reasoning and mathematical operation errors. It is seen that all these factors cause pre-service teachers to fail in mathematical induction. The results were discussed in the context of teacher education and suggestions were made for teaching mathematical induction.

Ek-1: MTVBF’de Yer Alan Teoremler ve İspatları

SORU 1

Teorem 1: $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ olduğunu ispatlayınız (Bloch, 2011, s. 203; Chartrand vd., 2013, s. 144; Epp, 2011, s.189; Garnier ve Taylor, 2009, s. 77).

İspat 1:

İspat Yöntemi: Zayıf tümevarımla ispat

Temel Adım: $n = 1$ için $1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} \Rightarrow 1 = 1$ doğrudur.

Kendini İkna Adımı: $n = 2$ için $1 + 2 = \frac{2 \cdot (2+1)}{2} \Rightarrow 3 = 3$ doğrudur.

$n = 3$ için $1 + 2 + 3 = \frac{3 \cdot (3+1)}{2} \Rightarrow 6 = 6$ doğrudur.

$n = 4$ için $1 + 2 + 3 + 4 = \frac{4 \cdot (4+1)}{2} \Rightarrow 10 = 10$ doğrudur.

...

Tümevarım Hipotezi: $n = k$ için $1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k \cdot (k+1)}{2}$ olduğunu varsayalım.

Tümevarım Adımı: $n = k + 1$ için $1 + 2 + 3 + \dots + k + (k + 1) = \frac{(k+1) \cdot (k+2)}{2}$ olduğunu ispatlayalım.

$n = k$ için $1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k \cdot (k+1)}{2}$ varsayıldığından

Her iki tarafa $k + 1$ eklenirse

$$1 + 2 + 3 + \dots + k + (k + 1) = \frac{k \cdot (k+1)}{2} + (k + 1)$$

paydalar eşitlenirse

$$1 + 2 + 3 + \dots + k + (k + 1) = \frac{k \cdot (k+1) + 2(k+1)}{2}$$

$k + 1$ parantezine alınırsa

$$1 + 2 + 3 + \dots + k + (k + 1) = \frac{(k+1) \cdot (k+2)}{2}$$

olur ki teorem ispatlanmış olur.

SORU 2

Teorem 2: $n \geq 4$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $n! > 2^n$ dir. İspatlayınız (Cunningham, 2012, s. 125; Sundstrom, 2014, s. 191).

İspat 2:

İspat Yöntemi: Genişletilmiş zayıf tümevarımla ispat

Temel Adım: $n = 4$ için $4! = 24 > 2^4 = 16$ doğrudur.

Kendini İkna Adımı:	$n = 5$ için $5! = 120 > 2^5 = 32$ doğrudur. $n = 6$ için $6! = 720 > 2^6 = 64$ doğrudur. $n = 7$ için $7! = 5040 > 2^7 = 128$ doğrudur.
Tümevarım Hipotezi:	$n = k$ için $k! > 2^k$ olduğunu varsayalım.
Tümevarım Adımı:	$n = k + 1$ için $(k + 1)! > 2^{k+1}$ olduğunu ispatlayalım. $k! > 2^k$ olduğundan hareketle Her iki tarafı $k + 1$ ile çarpalım $(k + 1) \cdot k! > (k + 1) \cdot 2^k$ Buradan $(k + 1) \cdot k! = (k + 1)!$ olduğundan $(k + 1)! > (k + 1) \cdot 2^k$ olur. Buradan da $k + 1 > 2$ olduğundan $(k + 1)! > 2 \cdot 2^k$ olur ki buradan da $(k + 1)! > 2^{k+1}$ yazılır ve teorem ispatlanmış olur.

SORU 3

Açıklama (Garnier ve Taylor, 2009): Fibonacci Dizisindeki ilk iki sayıdan sonraki her sayı kendinden önceki iki sayının toplamıdır. Dizinin ilk iki sayısı 1 ($f_1 = 1$ ve $f_2 = 1$) olduğunda Fibonacci Dizisinin ilk 10 sayısı şu şekildedir: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... Yani $\forall n \geq 3$ tamsayısı için $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ dir.

Teorem 3: f_n Fibonacci Dizisinin n . sayısı olmak üzere $f_n < 2^n$ olduğunu ispatlayınız (Garnier ve Taylor, 2009, s. 76-77).

İspat 3:

İspat Yöntemi: Güçlü tümevarımla ispat

Temel Adım:	$n = 1$ için $f_1 = 1 < 2^1 = 2$ doğrudur.
Kendini İkna Adımı:	$n = 2$ için $f_2 = 1 < 2^2 = 4$ doğrudur. $n = 3$ için $f_3 = 2 < 2^3 = 8$ doğrudur. $n = 4$ için $f_4 = 3 < 2^4 = 16$ doğrudur.
Tümevarım Hipotezi:	$\forall r \leq k$ pozitif tamsayısı için $f_r < 2^r$ olduğunu varsayalım.
Tümevarım Adımı:	$r = k + 1$ için $f_{k+1} < 2^{k+1}$ olduğunu ispatlayalım.
Tümevarım hipotezinden hareketle;	$r = k - 1$ için $f_{k-1} < 2^{k-1}$ ve $r = k$ için $f_k < 2^k$ dir.

Taraf tarafa toplama yapılırsa;

$$f_{k-1} + f_k < 2^{k-1} + 2^k$$

$f_{k-1} + f_k = f_{k+1}$ olduğundan

$$f_{k+1} < 2^{k-1} + 2^k$$

$2^{k-1} < 2^k$ olduğundan

$$f_{k+1} < 2^{k-1} + 2^k < 2^k + 2^k$$

$$2^k + 2^k = 2^{k+1} \text{ olduğundan}$$

$f_{k+1} < 2^{k+1}$ olur. Böylece teorem ispatlanmış olur.

SORU 4

Açıklama (Garnier ve Taylor, 2009; Sundstrom, 2014): Lucas dizisi de Fibonacci Dizisi gibi yinelemeli bir sayı dizidir. Lucas Dizisindeki ilk iki sayıdan sonraki her sayı Fibonacci Dizisindeki gibi kendinden önceki iki sayının toplamıdır. Dizinin ilk iki sayısı 1 ve 3 ($L_1 = 1$ ve $L_2 = 3$) olduğunda Lucas Dizisinin ilk 10 sayısı şu şekildedir: 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, ... Yani $\forall n \geq 3$ tamsayısı için $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ dir.

Teorem 4: L_n Lucas Dizisinin n . sayısı olmak üzere $\forall n \geq 3$ doğal sayısı için $L_n = f_{n+2} - f_{n-2}$ olduğunu ispatlayınız (Sundstrom, 2014, s. 210).

İspat 4:

İspat Yöntemi: Genişletilmiş güçlü tümevarımla ispat

Temel Adım: $n = 3$ için $L_3 = 4 = f_5 - f_1 = 5 - 1$ doğrudur.

Kendini İkna Adımı: $n = 4$ için $L_4 = 7 = f_6 - f_2 = 8 - 1$ doğrudur.

$n = 5$ için $L_5 = 11 = f_7 - f_3 = 13 - 2$ doğrudur.

Tümevarım Hipotezi: $3 \leq r \leq k$ olmak üzere her r pozitif tamsayısı için $L_r = f_{r+2} - f_{r-2}$ olduğunu varsayalım.

Tümevarım Adımı: $r = k + 1$ için $L_{k+1} = f_{k+3} - f_{k-1}$ olduğunu ispatlayalım.

Tümevarım hipotezinden hareketle;

$$r = k \text{ için } L_k = f_{k+2} - f_{k-2}$$

$$r = k - 1 \text{ için } L_{k-1} = f_{k+1} - f_{k-3}$$

Taraf tarafa toplama yapılırsa;

$$L_k + L_{k-1} = (f_{k+2} - f_{k-2}) + (f_{k+1} - f_{k-3})$$

$$L_k + L_{k-1} = (f_{k+2} - f_{k+1}) + (f_{k-2} - f_{k-3})$$

$$L_{k+1} = (f_{k+3}) + (f_{k-1})$$

Böylece teorem ispatlanmış olur.