

# MARKOWITZ KUADRATİK PROGRAMLAMA PORTFÖY SEÇİM MODELİ İÇİN PLANLAMA UFKUNUN AMPİRİK OLARAK BELİRLENMESİ: İSTANBUL MENKUL KIYMETLER BORSASI UYGULAMASI

Yrd. Doç. Dr. Armağan Tarım - Yrd. Doç. Dr. Aydın Ulucan

Hacettepe Üniversitesi  
Finansal Uygulamalar Merkezi

•••

## Özet

Bu çalışmada Markowitz Ortalama-Varyans modelinin bir portföy yönetim aracı olarak performansının ölçümü ve planlama ufkunun ex-post olarak belirlenmesi İstanbul Menkul Kıymetler Borsası verileri ile gerçekleştirilmiştir. Kuadratik programlama formundaki ortalama-varyans yaklaşımı, son altı yıldır İMKB'de işlem gören ve sağlıklı verisine ulaşılan şirketlerin setini oluşturan, 139 şirket esas alınarak uygulanmıştır. Çalışmada, ayrıca, 36 ay için değişik beklenen getiri düzeylerinde oluşturulan modeller çözülmüş ve İMKB'nin bu dönem için risk-getiri uzayı elde edilmiştir. Her biri 139 değişken ve 9730 kovaryans terimi içeren 144 kuadratik programlama modeli çözülmüş ve sonuçlar İMKB 100 endeksi getirileri ile karşılaştırılmıştır. Çalışmada Markowitz ortalama-varyans modelinin İMKB'de uzun dönemli bir yatırım planlama aracı olarak kullanılabilceği gösterilmiş ve en uygun planlama ufku belirlenmiştir.

*An Empirical Investigation of the Planning Horizon in Markowitz's Quadratic Programming Portfolio Selection Model: An Application at the Istanbul Stock Exchange*

## Abstract

In this study, a performance measurement of Markowitz Mean-Variance model as a portfolio management tool is assessed and ex-post determination of the planning horizon is performed using Istanbul Stock Exchange data. Mean-Variance approach, which is in the form of quadratic programming, is applied to a set of 139 companies, which have been traded in the ISE over the last six years and have adequate data. In addition to this, the mathematical models built for the 36 months on different expected return levels are solved optimality and the risk-return space of the ISE is observed for the relevant period. In total 144 quadratic programming models, with 139 variables and 9730 covariance terms, are solved and the results are compared to the ISE 100 index returns. As a result, it is shown that Markowitz Mean-Variance model can be used as a long term investment planning tool in Istanbul Stock Exchange; also, an empirical investigation of the planning horizon is performed.



# Markowitz Kuadratik Programlama Portföy Seçim Modeli İçin Planlama Ufkunun Ampirik Olarak Belirlenmesi: İstanbul Menkul Kıymetler Borsası Uygulaması

## 1. Giriş

Günümüzde finansal piyasalar ülke sınırlarını aşarak global bir yapıya bürünmüş ve elindeki kaynağı yatırımlarıyla en etkin şekilde değerlendirmek isteyen milyonlarca yatırımcının beslediği bir organizma haline gelmiştir. Sayıları her geçen gün artan birçok yatırım alternatifi ve sürekli değişen piyasa koşulları içinde yeniden oluşan fiyatlar, bu piyasalardaki portföy seçim problemini giderek daha karmaşık hale getirmiştir. Bu şartlar altında yatırımcıların karar probleminde çözüm üretmek ve piyasaların işleyiş mekanizmalarını açıklamak için geliştirilen yaklaşımlar Modern Portföy Teorisi (MPT) altında toplanmıştır. Bu çalışmanın amacı MPT'nin İstanbul Menkul Kıymetler Borsası'nda uygulanmasına yönelik bir değerlendirme yapmaktır. Bu amaca yönelik olarak, Markowitz tarafından beklenen getiri ve alınan risk çerçevesinde optimum portföyün oluşturulması problemini modelleyen ve MPT'nin temel yapı taşı olan, Ortalama-Varyans kuadratik programlama portföy seçim modeli İstanbul Menkul Kıymetler Borsası verileriyle denenmiş, ve böylece, bu teorinin yatırım planlama aracı olarak İMKB koşullarında performansı ölçülmüştür. Ayrıca, kuadratik programlama modeli çerçevesinde statik olarak oluşturulan, fakat planlama ufkuna ilişkin herhangi bir değerlendirme yapılmayan portföyler için planlama ufku ex-post olarak belirlenmiştir.

## 2. İlgili Literatür

Markowitz'in 1952 makalesinde ilk defa yayınlayıp, daha sonra kitap haline getirdiği (MARKOWITZ, 1959) ortalama-varyans modeli MPT'nin



başlangıcı olarak kabul edilir. Bu ilk model, ortalama getiri vektörü  $\mu$  ve kovaryans matrisi  $C$ 'ye sahip  $n$  tane menkul kıymet içermektedir. Modelde tanımlanan  $x$  vektörü ise oluşturulan portföydeki menkul kıymetlerin ağırlık vektörüdür ve vektörün bileşenleri toplamı bire eşittir. Oluşturulan portföyün beklenen getiri ve varyansı,  $\mu^T x$  ve  $x^T C x$  ve olarak ifade edilir. Doğrusal kayıtlamalar kümesi altında, etkin sınırlar maximum beklenen getirisi ve minimum varyansı olan portföyler kümesidir.

Hesaplanması gereken  $n$  adet beklenen getiri ve  $n(n+1)/2$  adet varyans-kovaryans analizin yapılmasını güçleştiren faktörlerin başında yer almaktadır. Bu sıkıntıyı ortadan kaldırmaya yönelik olarak, faktör ve indeks modelleri geliştirilmiştir (SHARPE, 1970; COHEN/POGUE, 1967; ROSENBERG, 1974). Ayrıca senaryo modelleri (MARKOWITZ/PEROLD, 1981a) ve çoklu grup modelleri (ELTON/GRUBER, 1973) bu alanda yapılan katkılar arasındadır.

Markowitz'in portföy seçim modelinin uygulanabilirliğini sağlamak için gerçek piyasa koşullarını da içerecek şekilde geliştirilmesi gerekmiştir. Bu noktada, Pogue'nin (POGUE, 1970) işlem maliyetleri, kısa satışlar, borçlanma politikaları ve vergileri de kapsayan çalışması, modelin pratik değerini artırma bakımından önemlidir. Yine, Francis'in (FRANCIS, 1978) bankaların aktif-pasif yönetiminde portföy analizini incelediği makalesi de, Markowitz portföy analizinin banka sistemi için de uygulanabilirliğini göstermiştir.

Modelin çözümü için gereken algoritmalar ise, parametrik olarak etkin sınırı bulan Markowitz (1956) ve Wolfe (1959)'un "bütünleştirici pivot" algoritmalarıyla başlamıştır. Modeli basitleştirip çözen algoritmalarından birisi, iteratif bir yaklaşım olan Von Hohenbalken (1975) algoritmasıdır. Ancak bu algoritma ve bundan türetilmiş olan diğer algoritmalar (RUDD/ROSENBERG, 1979) oldukça iyi sonuç vermesine karşın optimum çözüme ulaşmada çok yavaştır. Markowitz ve Perold'un (1981) ve Perold'un (1984) algoritmaları ise kovaryans matrisinde faktör ve senaryo modelleri kullanır, işlem maliyetlerini ve sınırlarını içerir, ayrıca parametrik çözüme imkan tanıyan yapıdadır. Ancak bu çözüm tekniklerinin tümü Simplex kökenli algoritmalarlardır.

Yayınlandığı günden itibaren üzerinden 40 yıl geçmiş olmasına rağmen Markowitz'in ortalama-varyans modeli, portföy seçimi probleminin çözümünde kullanılan tekniklerin başında gelmektedir. Günümüzde bu metodolojiye yapılan katkılar yeni kayıtlamalar, çok dönemli optimizasyon, simetrik olmayan risk gibi unsurların eklenmesi şeklinde sürmektedir (KING, 1993; KONNO/YAMAZAKI, 1991; MARKOWITZ/YU/YAMANE, 1993).



### 3. Kuadratik Programlama Modeli

Markowitz'in geliştirdiği ve bu çalışmada kullanıldığı haliyle kuadratik programlama yapısındaki ortalama-varyans modeli şu şekildedir:

Model notasyonu:

min

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i x_j \sigma_{ij}$$

st

$$\sum_{i=1}^N x_i = 1$$

$$\sum_{i=1}^N x_i R_i \geq r$$

$N$  : Yatırım alternatiflerinin sayısı

$x_i$  :  $i$  yatırım alternatifinin portföydeki ağırlığı

$\sigma_{ij}$  :  $i$  ve  $j$  yatırım alternatifleri arasındaki kovaryans

$R_i$  :  $i$  yatırım alternatifinin dönemlik ortalama getirisi

$r$  : Hedeflenen dönemlik ortalama getiri düzeyi

Kuadratik programlama en genel ifadeyle, kuadratik bir amaç fonksiyonunun, doğrusal kısıtlamalar altında optimizasyonudur. Kuadratik programlama ile ilgili bir takım özellikler ve çözüm süreci aşağıda verilmiştir.

Tipik bir kuadratik programlama modeli vektör gösterimiyle aşağıdaki gibidir:

$$\min z = \frac{1}{2} x^T D x + C^T x$$

st

$$A x \geq b$$

$$x \geq 0$$

Çözümüne yönelik olarak verilen kuadratik programlama modelinin konveksliği gösterilmelidir. Doğrusal bir ifade hem konkav hem de konveks olduğundan, modelin konveksliği amaç fonksiyonundaki kuadratik kısmın konveksliğine bağlıdır. Eğer  $D$  matrisi tüm  $x$  ler için pozitif ve yarı-tanımlı ise, yani  $Q = x^T D x \geq 0$  ise,  $Q$  konveks bir fonksiyondur. Portföy seçimi problemi bu şartları sağladığı için konvekstir.

Portföy seçimi probleminin kuadratik programlama ile elde edilen modeli konveks olduğu için,  $\bar{x}$  optimal çözümü için gerek ve yeter şart Karush-Kuhn-Tucker (KKT) koşullarının sağlanmasıdır. Aşağıda genel anlamda tanımlanan bir matematiksel programlama modeli için KKT koşulları verilmiştir.

$$\min z(x, y)$$

st

$$g_i(x, y) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m$$

$$h_k(x, y) = 0 \quad k = 1, \dots, p$$

$$x_r \geq 0 \quad r = 1, \dots, q$$

Yukarıdaki gösterimde,  $z$ ,  $g_i$  ve  $h_k$  ifadeleri, pozitif  $x_r$  değişkenlerinin ve sınırlanmamış  $y_j$  değişkenlerinin sürekli ve türevi alınabilir fonksiyonlarıdır.  $S_i^2$  ve  $t_r^2$  aylak değişkenleri, eşitsizlikleri eşitlik haline getirmek için kullanılmıştır. Standart hale sokulmuş modelin Lagrange fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$L(x, y, \lambda, \mu, v, s, t) = z(x, y) + \sum_i \lambda_i (g_i(x, y) - S_i^2) + \left( \sum_k \mu_k h_k(x, y) + \sum_r v_r (t_r^2 - x_r) \right)$$

Yukarıdaki ifadede  $\lambda_i$ ,  $\mu_k$  ve  $v_r$  Lagrange çarpan vektörleridir ve  $L$  için gerekli şartlar aşağıdaki kısmi türevler alınarak elde edilir.

$$\nabla_x L = \nabla_x z(x, y) + \nabla_x g(\bar{x}, \bar{y}) \bar{\lambda} + \nabla_x h(\bar{x}, \bar{y}) \bar{\mu} - \bar{v} = 0$$

$$\nabla_y L = \nabla_y z(\bar{x}, \bar{y}) + \nabla_y g(\bar{x}, \bar{y}) \bar{\lambda} + \nabla_y h(\bar{x}, \bar{y}) \bar{\mu} = 0$$

$$\nabla_\lambda L = [g(\bar{x}, \bar{y}) + S_i^2] = 0$$

$$\nabla_\mu L = [h_k(\bar{x}, \bar{y})] = 0$$

$$\nabla_v L = [t_r^2 - \bar{x}_r] = 0$$

$$\nabla_s L = [2\bar{S}_i \bar{\lambda}_i] = 0$$



$$\nabla_t L = [2\bar{\lambda}_r \quad \bar{v}_r] = 0$$

Minimizasyon problemi için, orijinal eşitsizlik kayıtlarından doğan Lagrange çarpanları negatif olmamalıdır.

$$\nabla_x z(\bar{x}, \bar{y}) + \nabla_x g(\bar{x}, \bar{y})\bar{\lambda} + \nabla_x h(\bar{x}, \bar{y})\bar{\mu} - \bar{v} = 0$$

$$\nabla_y z(\bar{x}, \bar{y}) + \nabla_y g(\bar{x}, \bar{y})\bar{\lambda} + \nabla_y h(\bar{x}, \bar{y})\bar{\mu} = 0$$

$$h(\bar{x}, \bar{y}) = 0$$

$$g(\bar{x}, \bar{y}) \leq 0, \quad \bar{\lambda}^T g(\bar{x}, \bar{y}) = 0, \quad \bar{\lambda} \geq 0$$

$$\bar{x} \geq 0, \quad \bar{v}^T \bar{x} = 0, \quad \bar{v} \geq 0$$

Yukarıda yazılan koşullar gerekli KKT koşullarıdır. En genel anlamda verilmiş yukarıdaki KKT koşulları, hiç eşitlik kayıtlaması,  $h$  fonksiyonu, ve sınırlanmamış değişkeni,  $y$  değişkeni, olmayan kuadratik programlama modeli için özelleştirilebilir. İlk olarak, ana kayıtlamalar,  $g(x) \leq 0$  şeklinde standart forma dönüştürülmeli ve  $u \geq 0$  olacak şekilde  $u$  aylak değişkeni eklenmelidir.

$$g(x) + u = b - Ax + u = 0, \quad u \geq 0$$

Gerekli türev işlemlerinin yapılması sonucu:

$$\nabla_x z(x) = Dx + c,$$

$$\nabla_x g(x) = -A^T$$

ifadeleri elde edilir. Burada  $D$  matrisinin simetrik olduğu göz önünde bulundurulurak, KKT koşulları aşağıdaki şekliyle açık olarak yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} D & -A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c \\ b \end{bmatrix},$$

$$\bar{v}^T \bar{x} + \bar{\lambda}^T \bar{u} = 0,$$

$$\bar{x} \geq 0,$$

$$\bar{\lambda} \geq 0,$$

$$\bar{v} \geq 0,$$

$$\bar{u} \geq 0.$$

#### 4. Uygulama ve Bulgular

Çalışmada, ilk olarak, 1993 Haziran ayından itibaren İMKB'de işlem gören ve sağlıklı verisi bulunan 139 şirket belirlenmiştir. Bu 139 şirketin 1999 Haziran ayına kadar İMKB'de sağladıkları aylık getiriler hesaplanmıştır. Böylece 139 hisse senedinin toplam 72'şer aylık getiri değerleri elde edilmiştir. Çalışmanın amaçlarından birisi İMKB'de ortalama-varyans modelinin yatırım aracı olarak performansının test edilmesi olduğu için, veri 1993 Temmuz-1996 Haziran ayları arasındaki ilk 36 ay (üç yıl) ve 1996 Temmuz-1999 Haziran arasındaki ikinci 36 ay (üç yıl) olmak üzere iki gruba ayrılmıştır.

Çalışmada ilk 36 aydan sonraki her ay için ortalama-varyans kuadratik programlama modeli kurulmuş ve ikinci 36 ay boyunca bu modeller yardımıyla portföy seçimi yapılmıştır. Modeller kurulurken, her ay için ondan önceki 36 ayın aylık getirileri kullanılarak, beklenen getiri vektörü ve varyans-kovaryans matrisi elde edilmiştir. Ayrıca, etkin sınırı oluşturmak için her ay 4 ayrı beklenen getiri düzeyinde (%8, %10, %12, %15) modeller kurulmuş ve çözülmüştür. Böylece toplam 144 model çözülmüştür.

Modellerin çözülmesi sonucunda 36 ay boyunca her ay için 4 ayrı beklenen getiri düzeyinde 4 ayrı portföy ve getirileri elde edilmiştir. Tablo 1'de bu portföylerin ve İMKB-100 endeksinin aylık getirileri ile portföylerin endekse göre getiri farkları, verilmiştir.

Tarih	Endeks	r=0.08	△	r=0.10	△	r=0.12	△	r=0.15	△
31.07.1996	-0.101	-0.084	0.017	-0.100	0.001	-0.089	0.012	-0.051	0.050
29.08.1996	0.018	0.005	-0.014	-0.044	-0.062	-0.097	-0.115	-0.107	-0.125
30.09.1996	0.123	0.100	-0.023	0.127	0.004	0.131	0.009	0.165	0.043
31.10.1996	0.132	0.099	-0.033	0.139	0.007	0.101	-0.031	0.169	0.037
29.11.1996	0.119	0.140	0.021	0.195	0.076	0.204	0.085	0.138	0.019
27.12.1996	0.064	0.073	0.010	0.085	0.021	0.062	-0.001	-0.010	-0.073
31.01.1997	0.645	0.547	-0.098	0.413	-0.232	0.308	-0.337	0.434	-0.211
28.02.1997	0.004	0.035	0.031	0.038	0.033	0.021	0.016	0.044	0.039
31.03.1997	0.001	-0.001	-0.002	-0.032	-0.032	-0.001	-0.001	0.053	0.052
30.04.1997	-0.115	0.021	0.136	0.081	0.196	0.000	0.115	-0.016	0.099
30.05.1997	0.118	0.011	-0.107	0.011	-0.106	0.017	-0.100	0.008	-0.110
30.06.1997	0.164	0.116	-0.048	0.106	-0.058	0.150	-0.015	0.000	-0.164
31.07.1997	0.052	0.087	0.035	0.067	0.015	0.076	0.024	0.090	0.038



29.08.1997	0.014	0.017	0.003	0.017	0.003	0.014	0.000	0.024	0.010
30.09.1997	0.310	0.256	-0.054	0.202	-0.107	0.153	-0.157	0.098	-0.212
31.10.1997	0.098	-0.056	-0.154	-0.052	-0.150	0.005	-0.093	0.031	-0.067
28.11.1997	0.012	0.010	-0.002	0.001	-0.011	-0.012	-0.024	0.010	-0.002
31.12.1997	0.199	0.046	-0.153	0.047	-0.151	0.041	-0.158	0.063	-0.135
28.01.1998	0.028	0.066	0.038	0.069	0.041	0.075	0.047	0.056	0.029
27.02.1998	-0.078	-0.036	0.041	-0.044	0.033	-0.085	-0.007	-0.134	-0.057
31.03.1998	-0.004	0.181	0.185	0.186	0.189	0.183	0.187	0.142	0.146
30.04.1998	0.287	0.171	-0.116	0.189	-0.098	0.212	-0.075	0.224	-0.063
29.05.1998	-0.111	-0.002	0.109	-0.015	0.096	-0.014	0.097	-0.020	0.091
30.06.1998	0.100	0.044	-0.056	0.038	-0.062	0.044	-0.056	0.053	-0.048
31.07.1998	0.054	0.110	0.056	0.056	0.002	0.025	-0.029	0.023	-0.032
31.08.1998	-0.386	-0.346	0.040	-0.319	0.067	-0.308	0.078	-0.315	0.072
30.09.1998	-0.146	-0.098	0.048	-0.154	-0.008	-0.228	-0.082	-0.284	-0.138
28.10.1998	-0.030	0.004	0.034	0.059	0.090	0.087	0.118	0.028	0.059
30.11.1998	0.173	-0.046	-0.220	-0.050	-0.224	-0.050	-0.224	-0.038	-0.212
31.12.1998	0.008	0.001	-0.006	0.007	0.000	0.004	-0.004	-0.119	-0.127
29.01.1999	-0.011	0.012	0.023	0.040	0.051	-0.033	-0.022	-0.067	-0.056
26.02.1999	0.515	0.336	-0.179	0.331	-0.183	0.264	-0.251	0.171	-0.343
26.03.1999	0.171	0.044	-0.127	0.077	-0.094	0.153	-0.017	0.359	0.188
30.04.1999	0.176	0.002	-0.173	0.021	-0.155	0.043	-0.133	0.102	-0.074
31.05.1999	-0.053	0.003	0.056	-0.019	0.034	-0.032	0.021	-0.029	0.024
30.06.1999	-0.023	-0.008	0.015	-0.030	-0.007	-0.059	-0.035	0.000	0.023
ORTALAMA			-0.018		-0.022		-0.032		-0.034

**Tablo 1.** Dört ayın beklenen getiri düzeyindeki portföyün 36 aylık gerçekleşen getirileri ve endeksle farkları.

Bu tabloda Markowitz Ortalama-Varyans modeli ile farklı beklenen getiri düzeyleri için elde edilen portföylerin 1 ay elde tutulduktan sonra sağladıkları getiri İMKB-100 endeksinin o aydaki getirisi ile karşılaştırılmıştır. Elde edilen sonuçlardan iki önemli varlığa ulaşılmıştır.



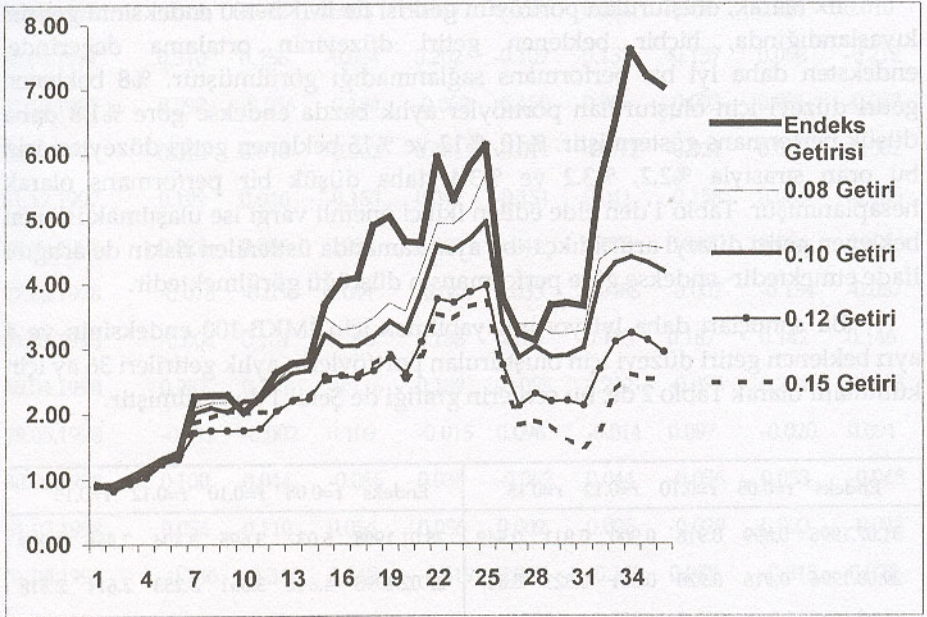
İlk olarak, oluşturulan portföyün getirisi ile İMKB-100 endeksinin getirisi kıyaslandığında, hiçbir beklenen getiri düzeyinin ortalama değerinde, endeksten daha iyi bir performans sağlanmadığı görülmüştür. %8 beklenen getiri düzeyi için oluşturulan portföyler aylık bazda endekse göre %1.8 daha düşük performans göstermiştir. %10, %12 ve %15 beklenen getiri düzeyleri için bu oran sırasıyla %2.2, %3.2 ve %3.4 daha düşük bir performans olarak hesaplanmıştır. Tablo 1'den elde edilen ikinci önemli vargı ise ulaşılmak istenen beklenen getiri düzeyi artırdıkça -bu aynı zamanda üstlenilen riskin de arttığını ifade etmektedir- endekse göre performansın düştüğü görülmektedir.

Bu sonuçları daha iyi yorumlayabilmek için İMKB-100 endeksinin ve 4 ayrı beklenen getiri düzeyi için oluşturulan portföylerin aylık getirileri 36 ay için kümülatif olarak Tablo 2'de, bu serilerin grafiği de Şekil 1'de verilmiştir.

Endeks	r=0.08	r=0.10	r=0.12	r=0.15	Endeks	r=0.08	r=0.10	r=0.12	r=0.15		
31.07.1996	0.899	0.916	0.900	0.911	0.949	28.01.1998	5.032	3.695	3.404	2.856	2.909
29.08.1996	0.916	0.920	0.861	0.823	0.847	27.02.1998	4.642	3.561	3.253	2.614	2.518
30.09.1996	1.028	1.011	0.970	0.931	0.987	31.03.1998	4.623	4.204	3.856	3.093	2.877
31.10.1996	1.163	1.112	1.105	1.024	1.154	30.04.1998	5.950	4.923	4.585	3.749	3.522
29.11.1996	1.302	1.267	1.320	1.233	1.313	29.05.1998	5.287	4.914	4.516	3.697	3.450
27.12.1996	1.384	1.359	1.432	1.310	1.301	30.06.1998	5.817	5.131	4.686	3.860	3.631
31.01.1997	2.277	2.103	2.023	1.713	1.865	31.07.1998	6.131	5.696	4.949	3.958	3.713
28.02.1997	2.287	2.177	2.099	1.748	1.946	31.08.1998	3.762	3.725	3.368	2.738	2.544
31.03.1997	2.288	2.175	2.033	1.747	2.049	30.09.1998	3.213	3.360	2.851	2.113	1.821
30.04.1997	2.024	2.221	2.197	1.747	2.015	28.10.1998	3.115	3.372	3.020	2.298	1.872
30.05.1997	2.263	2.245	2.223	1.777	2.032	30.11.1998	3.656	3.217	2.868	2.183	1.801
30.06.1997	2.634	2.505	2.458	2.043	2.032	31.12.1998	3.684	3.222	2.889	2.192	1.586
31.07.1997	2.771	2.723	2.622	2.199	2.215	29.01.1999	3.643	3.259	3.005	2.121	1.480
29.08.1997	2.809	2.769	2.666	2.230	2.267	26.02.1999	5.519	4.354	4.001	2.680	1.734
30.09.1997	3.679	3.479	3.206	2.571	2.488	26.03.1999	6.461	4.545	4.307	3.091	2.355
31.10.1997	4.038	3.284	3.039	2.584	2.565	30.04.1999	7.596	4.556	4.396	3.223	2.595
28.11.1997	4.084	3.315	3.041	2.552	2.590	31.05.1999	7.191	4.570	4.313	3.118	2.520
31.12.1997	4.896	3.466	3.185	2.656	2.754	30.06.1999	7.022	4.533	4.183	2.935	2.520

Tablo 2. Dört ayrı beklenen getiri düzeyindeki portföyün 36 aylık gerçekleşen kümülatif getirileri





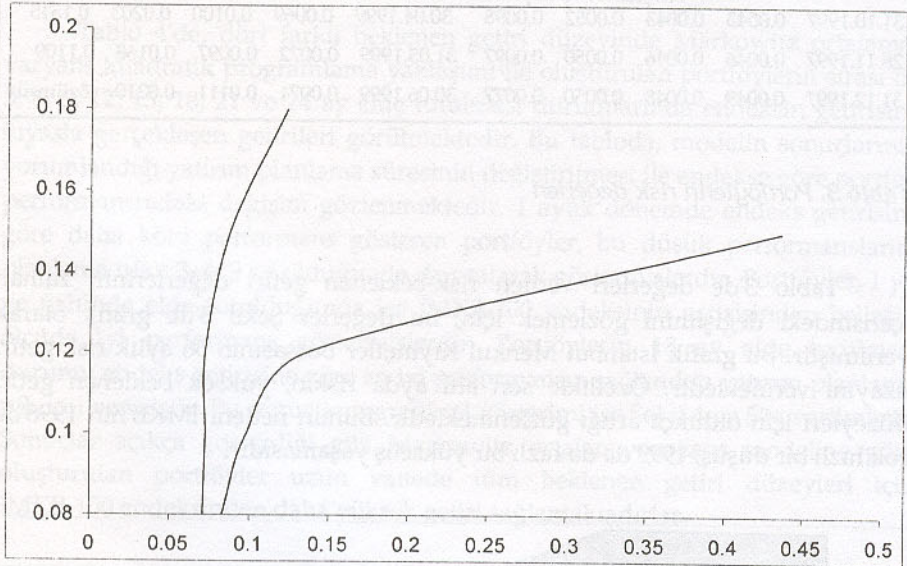
Şekil 1. Dört ayrı beklenen getiri düzeyindeki portföyün 36 aylık gerçekleşen kümülatif getirilerinin grafiği

Tablo 2 ve Şekil 1 incelendiğinde, Tablo 1'de ulaşılan iki vargi daha açık olarak gözlenmiştir. Öncelikle tüm beklenen getiri düzeylerinde oluşturulan portföyler İMKB-100 endeksinin getirisinden daha düşük performans göstermekte, ikinci olarak da beklenen getiri düzeyi arttıkça performans daha da düşmektedir. 31.07.1996-30.06.1999 tarihleri arasındaki 36 aylık dönemde 1 değeri ile başlatılan İMKB-100 endeksi 7.022 değerine ulaşırken, %8, %10, %12 ve %15 beklenen getiri düzeyleri için bu değerler sırasıyla 4.533, 4.183, 2.935 ve 2.520'ye ulaşabilmektedir. Şekil 1 incelendiğinde, ayrıca, gerek İMKB-100 endeksinin, gerekse diğer 4 beklenen getiri düzeyindeki portföylerin kümülatif getiri grafiklerinin birbirlerine paralel hareket ettikleri görülmektedir. Bunun sebebi olarak İMKB'de işlem gören hisse senetlerinin birbirleriyle korelasyonlarının çok yüksek olması yatmaktadır. İMKB'de işlem gören hisse senetleri arası ortalama korelasyon değeri 0.81'ken, bu değer Tokyo Borsası için 0.46, New York Borsası için 0.49 ve Londra Borsası için 0.56'dır.

Farklı beklenen getiri düzeyleri için oluşturulan portföylerin ortalama İMKB-100 endeksinde göre daha düşük aylık performans göstermesinin sebepleri araştırılmadan önce portföylere göre elde edilen etkin sınırlar, portföylerin riskleri ve zaman içinde risk-getiri yapısının incelenmesi aşağıda yapılmıştır.



Şekil 2'de 36 ay için oluşturulan 36 portföyün, risk-beklenen getiri düzlemindeki etkin sınırlarından alt ve üst sınırları oluşturan iki tanesi çizilmiştir. Beklenen getiri düzeyleri sırasıyla %8, %10, %12 ve %15 alınmıştır. Ancak etkin sınırdaki dönüşün tam gözlenemediği bazı aylar için %18 beklenen getiri seviyesinde de modeller çözülmüştür.



Şekil 2. Etkin sınırlar.

Tablo 3'de ise 36 ay için dört ayrı beklenen getiri düzeyinde oluşturulan optimum portföylerin riskleri gösterilmiştir.

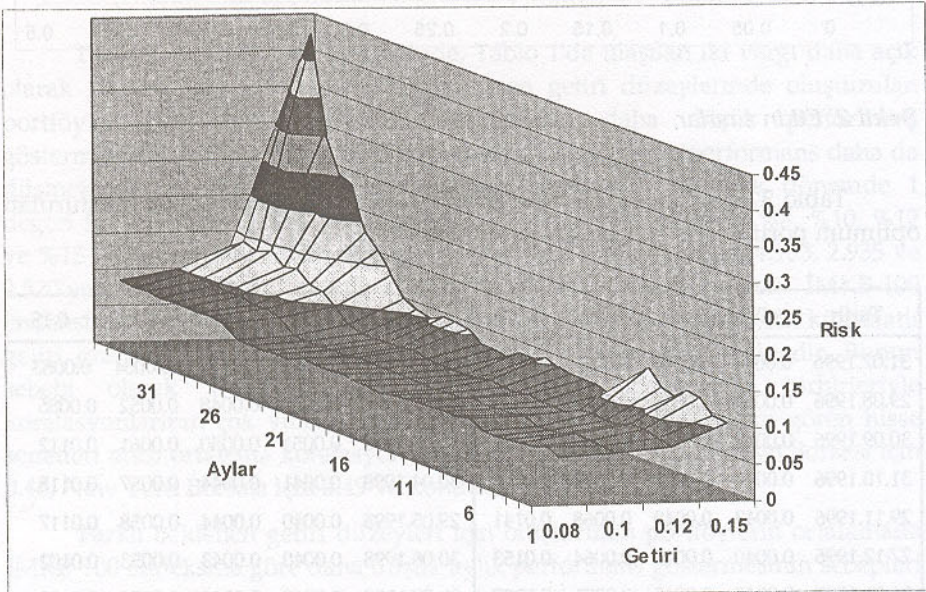
Tarih	r=0.08	r=0.1	r=0.12	r=0.15	Tarih	r=0.08	R=0.1	r=0.12	r=0.15
31.07.1996	0.0044	0.0048	0.0057	0.0112	28.01.1998	0.0047	0.0047	0.0054	0.0083
29.08.1996	0.0055	0.0053	0.0066	0.0122	27.02.1998	0.0047	0.0048	0.0052	0.0086
30.09.1996	0.0047	0.0057	0.0079	0.0164	31.03.1998	0.0051	0.0050	0.0061	0.0112
31.10.1996	0.0044	0.0061	0.0079	0.0174	30.04.1998	0.0041	0.0044	0.0057	0.0118
29.11.1996	0.0043	0.0049	0.0068	0.0141	29.05.1998	0.0040	0.0044	0.0058	0.0117
27.12.1996	0.0040	0.0046	0.0064	0.0153	30.06.1998	0.0040	0.0043	0.0053	0.0102
31.01.1997	0.0040	0.0045	0.0071	0.0207	31.07.1998	0.0040	0.0044	0.0056	0.0109
28.02.1997	0.0057	0.0057	0.0065	0.0164	31.08.1998	0.0040	0.0044	0.0063	0.0131
31.03.1997	0.0048	0.0052	0.0050	0.0090	30.09.1998	0.0063	0.0071	0.0096	0.0198



30.04.1997	0.0051	0.0053	0.0053	0.0077	28.10.1998	0.0067	0.0082	0.0124	0.0285
30.05.1997	0.0049	0.0049	0.0055	0.0090	30.11.1998	0.0065	0.0082	0.0133	0.0347
30.06.1997	0.0050	0.0054	0.0058	0.0135	31.12.1998	0.0066	0.0093	0.0174	0.0603
31.07.1997	0.0048	0.0046	0.0053	0.0092	9.01.1999	0.0068	0.0089	0.0161	0.0644
29.08.1997	0.0043	0.0044	0.0053	0.0097	26.02.1999	0.0066	0.0094	0.0204	0.0938
30.09.1997	0.0039	0.0043	0.0059	0.0112	26.03.1999	0.0069	0.0096	0.0185	0.1904
31.10.1997	0.0043	0.0043	0.0052	0.0098	30.04.1999	0.0069	0.0100	0.0203	0.1515
28.11.1997	0.0046	0.0046	0.0050	0.0097	31.05.1999	0.0072	0.0097	0.0168	0.1109
31.12.1997	0.0049	0.0048	0.0050	0.0077	30.06.1999	0.0071	0.0111	0.0210	çözumsuz

**Tablo 3.** Portföylerin risk değerleri

Tablo 3'de değerleri verilen risk-beklenen getiri değerlerinin zaman içerisindeki değişimini gözlemek için, bu değerler Şekil 3'de grafik olarak verilmiştir. Bu grafik İstanbul Menkul Kıymetler Borsasının 36 aylık risk-getiri uzayını vermektedir. Özellikle son altı ayda riskin, yüksek beklenen getiri düzeyleri için oldukça arttığı gözlenmektedir. Bunun nedeni İMKB'nin 1998'de çok hızlı bir düşüş, 1999'da da hızlı bir yükseliş yaşamasıdır.



**Şekil 3.** İMKB için 36 aylık risk-getiri uzayı

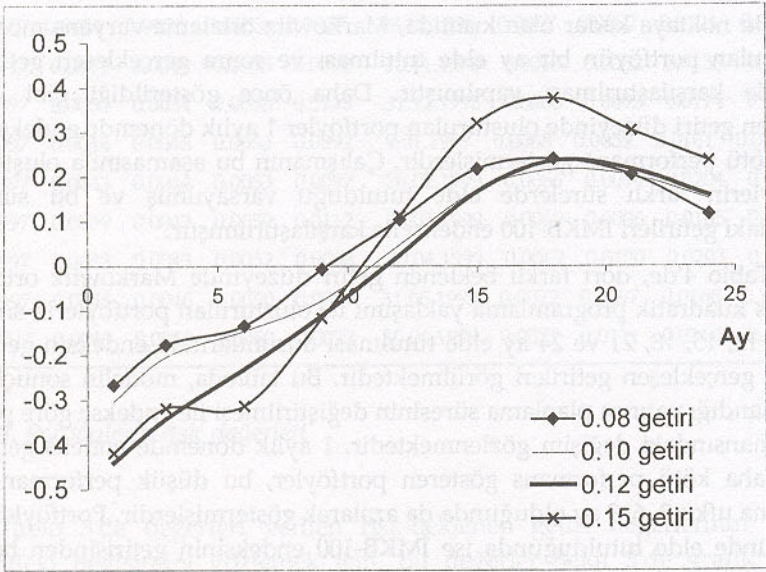


Bu noktaya kadar olan kısımda, Markowitz ortalama-varyans modeli ile oluşturulan portföyün bir ay elde tutulması ve sonra gerçekleşen getirisinin endekse karşılaştırılması yapılmıştır. Daha önce gösterildiği gibi 4 ayrı beklenen getiri düzeyinde oluşturulan portföyler 1 aylık dönemde endekse göre daha kötü performans göstermişlerdir. Çalışmanın bu aşamasında oluşturulan portföylerin farklı sürelerde elde tutulduğu varsayılmış ve bu sürelerin sonundaki getirileri İMKB-100 endeksi ile karşılaştırılmıştır.

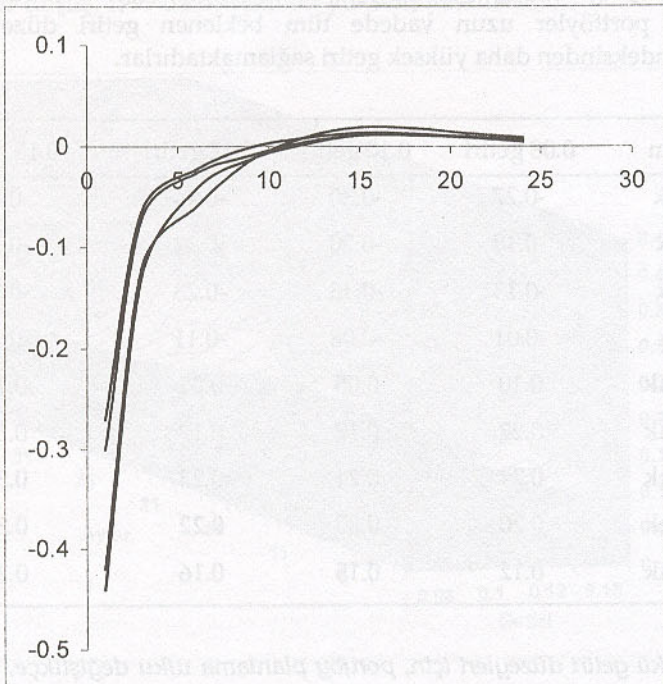
Tablo 4'de, dört farklı beklenen getiri düzeyinde Markowitz ortalama-varyans kuadratik programlama yaklaşımı ile oluşturulan portföylerin sırası ile 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21 ve 24 ay elde tutulması durumlarında endeksin getirisine kıyasla gerçekleşen getirileri görülmektedir. Bu tabloda, modelin sonuçlarının yorumlandığı yatırım planlama süresinin değiştirilmesi ile endekse göre portföy performansındaki değişim gözlenmektedir. 1 aylık dönemde endeks getirisine göre daha kötü performans gösteren portföyler, bu düşük performanslarını planlama ufku 3, 6, 9 ay olduğunda da azalarak göstermişlerdir. Portföyler, 1 yıl ve üstünde elde tutulduğunda ise İMKB-100 endeksinin getirisinden belirgin ölçüde iyi performans göstermişlerdir. Portföylerin 18 ay elde tutulması durumu endeks getirisine göre en iyi performansın sağlandığı yatırım planlama ufkunu vermiştir. Bu sonuçların grafiksel gösterimi ise Şekil 4 ve 5'te verilmiştir. Sonuçlar açıkça gösterdiği gibi Markowitz ortalama-varyans modeline göre oluşturulan portföyler uzun vadede tüm beklenen getiri düzeyleri için İMKB-100 endeksinden daha yüksek getiri sağlamaktadırlar.

Dönem	0.08 getiri	0.10 getiri	0.12 getiri	0.15 getiri
1-aylık	-0.27	-0.30	-0.44	-0.42
3 aylık	-0.18	-0.20	-0.34	-0.32
6 aylık	-0.13	-0.15	-0.23	-0.31
9 aylık	-0.01	-0.08	-0.11	-0.12
12 aylık	0.10	0.05	0.02	0.11
15 aylık	0.22	0.17	0.17	0.32
18 aylık	0.24	0.21	0.23	0.37
21 aylık	0.20	0.20	0.22	0.30
24 aylık	0.12	0.15	0.16	0.23

**Tablo 4.** Farklı getiri düzeyleri için, portföy planlama ufku değiştiğince, portföyün endekse göre getirisinin değişim tablosu.



Şekil 4. Farklı beklenen getiri düzeyleri için, portföyü elde tutma süresi değişikçe, portföyün endekse göre dönem sonu getirisinin değişim grafiği



Şekil 5. Farklı beklenen getiri düzeyleri için, portföyü elde tutma süresi değişikçe, portföyün endekse göre aylık getirisinin değişim grafiği.



Bu çalışma esnasında 144 adet kuadratik programlama modeli çözülmüştür. Gerek modellerin kurulması, gerekse çözülmesi oldukça uzun bir süreci içermiştir. Model çözümleri ile ilgili performans değerleri Tablo 5.'de verilmiştir.

Modellenen dönem (ay) sayısı	36
Her ay için farklı risk düzeyinde kurulan model sayısı	4
Kurulan toplam model sayısı	144
Her model için değişken sayısı	139
Her modelde katsayısı varyans-kovaryans değeri olan kuadratik terim sayısı	9730
Tek bir model için ortalama çözüm süresi	67 dakika
Minimum model çözme süresi	3 dakika
Maksimum model çözme süresi	187 dakika
Kullanılan donanım	120 16 MB. PC.

Tablo 5. Model çözüm sürelerine ilişkin değerler.

## 5. Sonuçlar

Bu çalışmada Markowitz'in kuadratik programlama formundaki ortalama-varyans modeli İstanbul Menkul Kıymetler Borsası verileri kullanılarak kurulmuş ve çözülmüştür. Yaklaşımın bir yatırım planlama aracı olarak performansını ölçmek amacıyla 36 ay için deneme yapılmıştır. Her ay için dört ayrı beklenen getiri düzeyinde oluşturulan modeller çözümlenerek etkin sınırlar oluşturulmuştur.

Elde edilen sonuçlar Modern Portföy Teorisi kullanılarak oluşturulan portföy getirilerinin endeks getirisine göre performanslarının planlama ufkuna bağlı olarak değiştiğini göstermiştir. Markowitz ortalama-varyans modeli ile oluşturulan portföyler sırasıyla 1, 3, 6, 9 ay elde tutulduğunda endeks getirisine göre daha düşük performans göstermişlerdir. Ancak portföyleri elde tutuma süresi 1 yıl ve üstü olduğunda ise İMKB100 endeksine göre daha iyi performans göstermişlerdir. Optimum planlama ufkunun uzunluğunun 18 ay civarında olduğu görülmüştür.

Bu çalışma özellikle büyük ölçekli ve uzun dönemli fonların yönetilmesinde Markowitz ortalama-varyans modelinin önemini ve geçerliliğini İstanbul Menkul Kıymetler Borsası için ampirik olarak ortaya koymuştur. Bu çalışmanın uzantısı olarak ileride yapılabilecek çalışmalar ise iki ayrı yönde



gelişebilir. Birincisi, bu çalışmanın sonuçlarının diğer yatırım stratejileri ile karşılaştırılarak performans değerlendirmesidir. İkincisi ise modelin kendi içerisinde yapılabilecek iyileştirmeler ve eklentilerdir. Özellikle ortalama getiriler hesaplanırken geçmiş 36 ayın eşit ağırlıklı getirisi dikkate alınmıştır. Bu getirilerin farklı yöntemlerle hesaplanması (örneğin, ağırlıklı ortalama) İMKB gibi varyansın yüksek olduğu borsalarda yatırım planlama aracı olarak MPT'nin performansını artıracak etkiler yaratacağı düşünülmektedir. Ayrıca, işlem maliyetleri, kredili yatırım yapabilme, vergi oranları gibi parametreler de modele dahil edilerek sonuçlar gözlenmelidir.

## Kaynakça

- COHEN, K.J./POGUE, J.A. (1967), "An Empirical Evaluation of Alternative Portfolio Selection Models," *Journal of Business*, 40: 166-193.
- ELTON, E.J./GRÜBER, M.J. (1973), "Estimating the Dependence Structure of Share Prices-Implications for Portfolio Selection," *J.Finance*, 28: 1203-1232.
- FRANCIS, J.C. (1978), "Portfolio Analysis of Small, Medium, and Large Sized Banks," *J.Monetary Econ.*, 4: 459-480.
- KING, A. (1993), "Assymetric Risk Measures and Tracking Models for Portfolio Optimization Under Uncertainty," *Annals of Operations Research*, 45: 165-178.
- KONNO, H./YAMAZAKI, H. (1991), "Mean Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and its Application to Tokyo Stock Market," *Management Science*, 37: 519-531.
- MARKOWITZ, H. (1952), "Portfolio Selection," *J.Finance*, 7: 77-91.
- MARKOWITZ, H. (1956), "The Optimiztion of a Quadratic Function Subject to Linear Constraints," *Naval Res.Log.Quart.*, 3.
- MARKOWITZ, H. (1959), *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments* (New York: John Wilwey).
- MARKOWITZ, H./PEROLD, A. (1981), "Portfolio Analysis with Factors and Scenarios," *J.Finance*.
- MARKOWITZ, H./YU, G./YAMANE, Y. (1993), "Computation of Mean-Sewmivariance Efficient Sets by the Critical Line Alorithm," *Annals of Operational Research*, 45: 307-317.
- PEROLD, A.F. (1984), "Large Scale Portfolio Optimization," *Man. Sci.*, 30: 1143-1160.
- POGUE, G.A. (1970), "An Extension of the Markowitz Portfolio Model to Include Variable Transactions Costs, Short Sales, Leverage Policies and Taxes," *J.Finance*, 25: 1005-1028.
- ROSENBERG, B. (1974), "Extra Market Components of Covariance in Security Returns," *J.Financ.Quant.Anal.*, 9: 263-273.
- RÜDD, A./ROSENBERG, B. (1979) "Realistic Portfolio Optimization," *TIMS Studies in Management Science*, 11: 21-46.
- SHARPE, W.F. (1967), "Portfolio Analysis," *J.Financ.Quant.Anal.*, 2: 76-84.
- SHARPE, W.F. (1970), *Portfolio Theory and Capital Markets* (New York: Mc Graw Hill).
- SHARPE, W.F. (1971), "A Linear Programming Approximation for the General Portfolio Analysis Problem," *J.Financ.Quant.Anal.*, 1263-1275.
- WOLFE, P. (1959), "The Simplex Method for Quadratic Programming," *Econometrica*, 27: 382-398.



EK: Çalışmada verisi kullanılan 139 şirketin kodları.

ABA	ANL	BUS	DOG	EGS	GIM	IST	KOA	MRS	NIG	PNU	SIS	TOA	TKB
ADA	ARC	CEL	DOU	EME	GLO	IZM	KOR	MED	PAR	POL	TUD	TRK	UNY
AFY	ASE	AYC	DEV	ENK	GOO	IZO	KOY	MET	PEG	RAK	TDI	TRN	USK
AKA	ASL	CME	DOK	ERC	GOR	KAR	KUH	MIG	PET	SAB	TBA	TSK	VAK
AKB	AYG	CIM	DUR	ERE	GUB	KAV	LUK	MIL	PKE	SAR	TAT	TUP	VKF
AKS	BAG	CUK	ECI	OTO	GUN	KLB	MAK	NTH	PTO	SIF	TEK	TUR	VES
AKD	BEK	DEM	ECZ	ESB	HEK	KEN	MRD	NTT	PIM	SOK	TEL	THY	YKB
ALA	BOC	DEN	EDI	FIN	HUR	KEP	MAR	NET	PNE	SON	TEZ	TBO	YAS
ALR	BRI	DER	EGB	FEN	IKT	KCH	MMA	OKA	PIN	GAR	KUT	TBB	YUN
TIN	BUR	DIT	EGG	GEN	INT	KON	MAA	OLM	PNS	SME	TOF	ISC	