Araştırma Makalesi / Research Article

Matematiksel Soyutlama ve Problem Çözme Dinamikleri: Matematik Öğretmen Adaylarının Performansları

Zeynep ARSLAN[1*], Hasan ÜNAL[2]

Citation : Arslan, Z. ve Ünal, H. (2023). Matematiksel soyutlama ve problem çözme dinamikleri: Matematik öğretmen adaylarının performansları. *Türk Eğitim Değerlendirmeleri Dergisi*, *4*(4),30-46.
Received : 18.08.2023
Accepted : 11.11.2023
Published : 31.12.2023
Publisher's Note : Istanbul Medipol University stays neutral with regard to any jurisdictional claims.

Özet

Bu çalışmanın amacı, matematikte çoklu yoldan problem çözme ile matematiksel soyutlama arasındaki bağlantıyı incelemektir. Bir başka deyişle farklı yollardan bir problemin çözümü ile o problemin çözümünün soyutlanması (genellenmesi) arasındaki ilişkinin nasıl olduğu araştırılmıştır. Soyutlama, kavramsal anlamanın temelini oluşturmaktadır. Matematiksel soyutlama, çok boyutlu bir kavram olup, bunlardan bir tanesi genelleme olarak ifade edilebilir. Soyutlama, sürekli ilerleme kaydetmektedir, şöyle ki geometriyi ilk soyutlama evresine taşıyan, aksiyomatik yapısını kuran Öklid ile başlayıp, pek çok bilim adamı (Lobachevsky, Bolyai ve Gauss) tarafından Öklid dışı geometriler de genelleştirilmiştir ve yeni geometriler genelleştirilmeye devam edilecektir. Öğrencilerin matematiksel soyutlama evresine geçişlerini sağlamak defalarca hesaplama yapmaktan daha etkilidir. Bu araştırmada problem çözme dinamiklerindeki soyutlama evresine geçişleri tespit etmek için tarama modeli kullanılmıştır. Çalışmanın katılımcıları, Marmara bölgesinde bir devlet üni-

1* Arş. Gör., İstanbul Medipol Üniversitesi, Eğitim Fakültesi. zeynep.arslan1@medipol.edu.tr; ORCID No: 0000-0001-5135-8246. Sorumlu yazar.
2 Prof. Dr., Yıldız Teknik Üniversitesi, Eğitim Fakültesi. hunal@yildiz.edu.tr; ORCID No: 0000-0002-4661-111X.

versitesinde ilköğretim matematik öğretmenliği programına kayıtlı öğretmen adayları oluşturmaktadır. Bireysel çözümler ile matematiksel soyutlama evresine geçiş dinamiklerini incelemek için matematik öğretmen adaylarına geometri öğrenme alanına ait dörtgende açılar kavramına yönelik çoklu yoldan çözülebilen (en az yedi yol) bir problem verilmiş, katılımcılar cevapları yazılı olarak toplanmıştır. Veri analizinde doküman analizi kullanılmıştır. Analiz sonucu kategoriler oluşturulmuş olup, soyutlama evresine geçip geçemeyenler, sonrasında geçenlerden bağlantı kurdukları bireysel çözümler ve matematiksel soyutlama boyutu arasında ilişkilendirme düzeyleri, bununla birlikte katılımcıların soyutlama evresine geçişteki kullandıkları patikalardaki farklılıklar değerlendirilmiştir. Her öğrencinin farklı öğrenme stiline, algılama düzeyi, perspektifinin olduğu göz önünde bulundurulmasının önemi vurgulamıştır.

Anahtar Kelimeler: Matematik eğitimi, problem çözme, çoklu yoldan problem çözme, matematiksel soyutlama, genelleme

Mathematical Abstraction and Problem Solving Dynamics: Pre-service Mathematics Teachers' Performances

Abstract

The aim of this study is to examine the connection between problem solving in multiple ways and mathematical abstraction in mathematics. In other words, the relationship between the solution of a problem in different ways and the abstraction (generalization) of the solution of that problem was investigated. Abstraction is the basis of conceptual understanding. Mathematical abstraction is a multidimensional concept, one of which can be expressed as generalization. Abstraction is constantly progressing, starting with Euclid, who took geometry to the first stage of abstraction and established its axiometric structure, and has been generalized by many scientists (Lobachevsky, Bolyai & Gauss) with non-Euclidean geometries and will continue to be generalized. Ensuring students' transition to the stage of mathematical abstraction is more effective than repeated calculations. In this study, the survey model was used to determine the transitions to the abstraction phase in problem solving dynamics. The participants of the study were pre-service mathematics teachers enrolled in the elementary mathematics teaching program at a state university in the Marmara region of Turkey. In order to examine the dynamics of individual solutions and transition to the mathematical abstraction stage, pre-service mathematics teachers were given a problem that can be solved in multiple ways (at least seven ways) for the concept of angles in quadrilaterals belonging to the geometry learning domain, and the answers of the participants were collected in writing. Document analysis was used in data analysis. As a result of the analysis, categories were formed, and the levels of association between the individual solutions and the mathematical abstraction dimension that the participants made connections between those who passed the abstraction phase and those who did not, as well as the differences in the paths used by the participants in the transition to the abstraction phase were evaluated. The importance of taking into account that each student has a different learning style, perception level and perspective was emphasized.

Keywords: Mathematics education, problem solving, multiple path problem solving, mathematical abstraction, generalization

1. Giriş

2023'te açıklanan PISA-2022 sınavları Türkiye'nin sonuçları bir iki puan artmasına rağmen istenilen seviyeye ulaşamamamızın nedenlerini araştırıp çözümlerin üretilmesi gerekmektedir. Matematiğin işlemsel ve kavramsal anlaşılması, matematiksel soyutlamanın yapılması ve matematiksel soyutlamanın indirgenmesi, problem çözme becerilerinin geliştirilmesi araştırılacak öncelikli alanlardan bazıları olup bütüncül yaklaşım ile Ar-Ge temelli bir matematik eğitiminin verilmesi başarının anahtarıdır.

Problem çözme becerisinin hem matematik hem de diğer disiplinlerde bireyin akıl yürütebilmesine ve ilişkilendirme yaparak öğrenebilmesine önemli katkıda bulunmaktadır (Van De Walle, Karp ve Bay-Williams, 2012). Bu nedenle problem çözmenin bireye kazandırılması gereken önemli bir beceri olduğu söylenebilir (MEB, 2013). Problem çözmenin matematik eğitiminin de en önemli hedefleri arasında olduğu bilinmektedir (NCTM, 2000; MEB, 2018; Charles ve Lester, 1982; Schoenfeld, 1985, 2009, 2013; Arcavi ve Schoenfeld, 2008). Problem çözme becerisinin önemine (NCTM, 2000; MEB, 2018; Schoenfeld, 1985, 2009, 2013) bu kadar vurgu yapılmasına rağmen ulusal (LGS/TYT-AYT) ve uluslararası (PISA ve TIMSS) yapılan sınavlarda başarı oranının düşük olduğu belirtilmiştir (MEB, 2018). Başarının düşük olması bireysel ve çevresel faktörler başta olmak üzere birçok boyut altında incelenmiştir (Demir vd., 2010). İncelenen boyutlardan biri de matematiğe karşı olumsuz bakış açısı olduğunu söylenebilir. Bu olumsuz bakış açısının oluşmasının sebeplerden biri her problemin sadece bir doğru cevabının olduğunu, tek bir çözüm yolu ile ulaşılabileceğine ve diğer çözümlerin yanlış olacağına yönelik inançlarıdır (Altun ve Arslan, 2006). Bu inancın kırılması, bireyin ezberci ve tek düze yöntemlerle öğrenmesi çoklu yoldan problem çözme becerisi ile mümkün olabilir (Arıkan ve Ünal, 2012). Başarının istenilen seviyede olmamasının bir diğer diğer sebebi de soyut düşünememe ile açıklanabilir.

2. Soyutlama kavramı ve matematiksel soyutlama

Soyutlama farklı durumların ortak olan özü (Dienes, 1963); insan zekasının üst düzey başarısı ve en güçlü aracı (Russell, 1926); bilgi parçacıklarının, tecrübelerin ve teorilerin birleştirilmesi (Noss ve Hoyles, 1996); deneyimlerle benzerliklerin fark edildiği bir aktivite (Skemp, 1986); kavramdan belirli özelliklerin ayrılması (Sierpinska, 1994) olarak tanımlanmıştır. Türk Dil Kurumu'nda (2023) ise "bir nesnenin özelliklerden veya özellikleri arasındaki ilişkilerden herhangi birini tek başına ele alan zihinsel işlem, gerçeklikte ayrılmaz olanı düşünmede ayırma" ifadesi ile tanımlanmıştır. Soyutlama, bir kavramın basitleştirilmesi, bilgi içeriğinin yalınlaştırılması olarak düşünülebilir, yani en genel hali olabilir.

Soyutlama, matematiksel düşünmenin işleyişini oluşturan unsurlardan biridir (Liu, 2003). Aynı zamanda matematik eğitiminde kazandırılması istenen becerilerden biri olduğu söylenebilir (MEB, 2018). Matematiksel düşünme ise, öğrenmedeki bireysellikten dolayı her bireyde farklı süreçte işleyebilir. Bu nedenle, öğrenen bireyin zihinsel becerilerinin bu süreçte önemli olduğu belirtilebilir (Olkun ve Toluk Uçar, 2012). Soyutlama kavramını incelenirken, literatürde araştırmacılar tarafından yapılan farklı tanımlamalar ile karşılaşılmıştır (Dienes, 1963; Noss ve Hoyles, 1996; Sierpinska, 1994; Skemp, 1986; Russell, 1926).

Literatürde soyutlama ile genelleme kavramlarının birbiri ile ilişkili kavramlar olduğunu belirtilmiştir (Açıl, 2015). Yöntem açısından birbirinden ayırt edilse de eş anlamlı olarak (Davydov, 1990) ya da genellemeyi soyutlamanın ilk adımı olarak (Dreyfus, 1991) kategorize eden araştırmacılar bulunmaktadır. Piaget (2001) ise genellemeyi, soyutlamanın oluşabilmesi için bir üst işlem basamağı olarak belirtmiştir. Dubinsky (1991) genellemeyi soyutlama süreci içerisine dahil etmiştir. Geliştirdiği APOS (eylemler-action, süreçler-process, nesneler-object, şemalar-schemas) teorisinin aşamalarını; içselleştirme (interiorization), kapsülleştirme/muhafaza etme (encapsulation), genelleme (generalization) ve tersine çevirme (reversal) kategorileri ile açıklamıştır. APOS teorisinin amacı, bir kavramın ne derce anlaşıldığı, öğrenildiğini analiz etmektir (Arnon vd., 2014; Baker, Cooley ve Trigueros, 2000; Borji ve Planell, 2020).

Matematiksel soyutlama ise, matematiksel bir kavramı oluşturan özelliklerinin özünü bulup, onun genelleme süreci olarak tanımlanabilir (Yılmaz, 2011). En basit haline indirgeme olarak da belirtilebilir. Literatürde matematiksel soyutlama üzerine çalışmalar yapılmıştır (Can, 2011; Can ve Ünal, 2011; Coşar, 2021; Yılmaz, 2011). Yapılan bu çalışmalarda soyutlamaya iki farklı yorumlama getirilmiştir (Can, 2011; Coşar, 2021; Yılmaz, 2011).

1. Deneyimsel Soyutlama (Piaget, Skemp ve Dianes)
Araştırmalarında genel olarak üzerinde durulan noktalar, deneyimlerdeki benzerliklerin farkındalığı ile genellemeye gidilmesi, düşük somut seviyeden yüksek soyut seviyeye geçilmesi, ortamın koşullarından bağımsız hale gelmesidir (Özmantar, 2005).

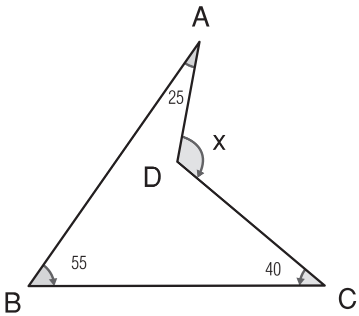
2. Teorik Soyutlama (Noss, Hoyles, Van Oers, Ohlsson, Lehtinen, Hershkowitz, Schwarz, Dreyfus)

Teorik soyutlama öğrenmenin içinde olduğu koşullarla gerçekleştiğini, ayrı düşünülemeyeceğini savunur (Can, 2011). Bu bağlamda matematik öğretiminde öğrencilerin soyutlama yapmalarını sağlayacak sınıf ortamlarının oluşturulması öğretmenlerin görevidir (Özmantar, 2005; Zembat, 2007). Bu nedenle bu çalışmada öğretmen adaylarının çoklu yoldan problem çözme ile matematiksel soyutlama ilişkisi araştırılmıştır. Öğrencilerin çoklu yoldan çözülebilen bir probleme yaklaşımları çözüm yolları ve bu problemi nasıl genelleyebildikleri incelenmiştir.

3. Yöntem

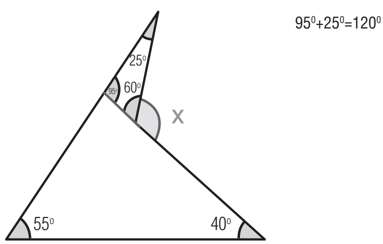
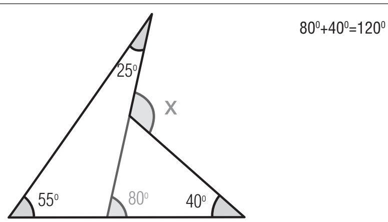
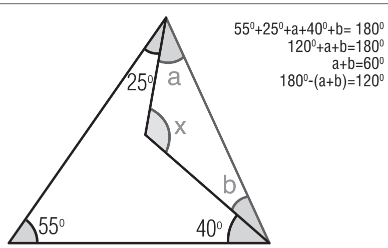
Çalışmanın amacı, matematikte çoklu yoldan problem çözme ile matematiksel soyutlama arasındaki bağlantıyı incelemektir. Çalışmanın katılımcıları, Marmara bölgesinde bir devlet üniversitesinde ilköğretim matematik öğretmenliği programına kayıtlı 3. sınıf 60 öğretmen adayları oluşturmaktadır. Bireysel çözümler ile matematiksel soyutlama evresine geçiş dinamiklerini incelemek için matematik öğretmen adaylarına geometri öğrenme alanına ait dörtgende açılar kavramına yönelik çoklu yoldan çözülebilen (en az yedi yol) bir problem verilmiş, katılımcılar cevapları yazılı olarak toplanmıştır. Veri analizinde doküman analizi kullanılmıştır. Doküman analizi belgelerin toplandığı, titizlikle ve sistematik olarak incelendiği, analiz edilip değerlendirildiği bir araştırma yöntemdir (Corbin ve Strauss, 2008; Ekiz, 2003; Wiersma, 2000). Analiz sonucu kategoriler oluşturulmuş olup, soyutlama evresine geçip geçemeyenler, sonrasında geçenlerden bağlantı kurdukları bireysel çözümler ve matematiksel soyutlama boyutu arasında ilişkilendirme düzeyleri, bununla birlikte katılımcıların soyutlama evresine geçişteki kullandıkları patikalardaki farklılıklar değerlendirilmiştir.

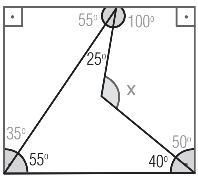
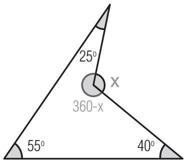
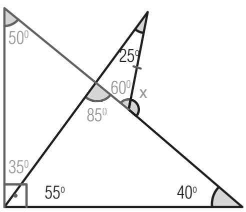
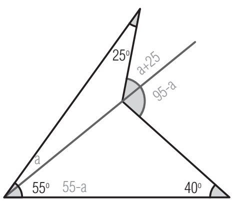
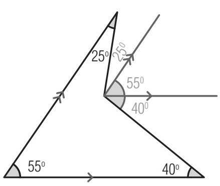
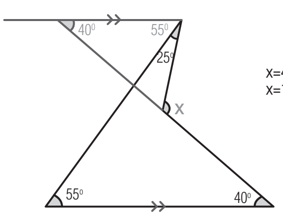
Öğretmen adaylarına verilen çoklu yoldan çözülebilen problem:

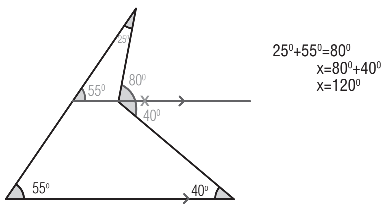
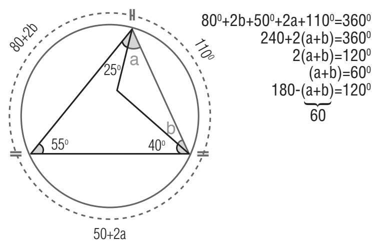


Yukarıda verilen şekilde;

m(ABC)=55°
m(BAD)=25°
m(BCD)=40°
m(ADC)=x kaç derecedir?

	Yöntemler	**Açıklaması**
1		1 ve 2. çözüm aynı dinamikten hareketle çözüme ulaştırmaktadır. Tek fark çokgenin bir kenarı yukarıya-sola doğru uzatılmış olup yardımcı çizginin farklı çizilmesinden kaynaklanmıştır.
2		1 ve 2. çözüm aynı dinamikten hareketle çözüme ulaştırmaktadır. Tek fark çokgenin bir kenarı aşağıya doğru uzatılmış olup yardımcı çizginin farklı çizilmesinden kaynaklanmıştır.
3		Çözümde iç bükey dörtgen üçgene tamamlanmıştır. Elde edilen küçük ve büyük üçgenin iç açılarından yola çıkarak çözüme ulaşılmıştır.

4		$90^0+100^0+x+50^0=360^0$ $240^0+x=360^0$ $x=120^0$	Çözümde iç bükey dörtgen daha büyük bir dörtgene (açılar 90 derece olacak şekilde) tamamlanmıştır. Soruda verilen iç bükey dörtgen ve yeni oluşan dörtgenin iç açılarından yola çıkarak çözüme ulaşılmıştır.
5		$25^0+55^0+40^0+360^0-x=360^0$ $x=120^0$	Çözümde iç bükey dörtgende bulunması istenilen x açısının bütünler açısı bulunmuştur. Sonrasında iç bükey dörtgenin dört açısı toplanmış ve dörtgenin iç açıları toplamı 360'a eşitlenmiştir.
6		$50^0+35^0=85^0$ $25+a=85^0$ $a=60^0$ $180^0-60^0=120^0$	Çözümde iç bükey dörtgenin bir kenarı görselde görüldüğü gibi dik üçgen oluşturacak şekilde uzatılmıştır. İki iç açının toplamı diğer dış açıya eşit olduğu gerekçesi ile diğer yöntemlere benzese de bu madde de kural sadece bir adım olarak kullanılarak çözüme ulaşılmıştır. Diğer kullanımda direk çözüm yöntemi olarak kabul edilmiştir.
7		$x=\cancel{a}+25^0+95^0-\cancel{a}$ $x=120^0$	Çözümde x açısı bölünerek ayrı ayrı elde edilmiştir. İki iç açının toplamı diğer dış açıya eşit olduğu gerekçesi ile diğer yöntemlere benzese de bu madde de kural sadece bir adım olarak kullanılarak çözüme ulaşılmıştır. (6. maddedeki gibi)
8		$x=25^0+55^0+40^0$ $x=120^0$	Çözümde x açısı, iç bükey dörtgenin kenarlarına paralel olacak şekilde doğrular çizilerek bölünmüştür. x açısı üç parçaya bölünmüş olup bu açılar toplanarak elde edilmiştir.
9		$x=40^0+55^0+25^0$ $x=120^0$	Çözümde iç bükey dörtgenin tabanına paralel olacak şekilde doğru çizilmiştir. Z kuralı olacak şekilde kesişen doğru çizilmiştir. İki iç açının toplamı diğer dış açıya eşit olduğu gerekçesi ile diğer yöntemlere benzese de bu madde de kural sadece bir adım olarak kullanılarak çözüme ulaşılmıştır. (6.ve 7. maddedeki gibi)

10		Çözümde x açısı, iç bükey dörtgenin tabanına paralel olacak şekilde bir doğru çizilerek bölünmüştür. Z kuralı olacak şekilde açılar taşınmıştır. İki iç açının toplamı diğer dış açıya eşit olduğu gerekçesi ile diğer yöntemlere benzese de bu madde de kural sadece bir adım olarak kullanılarak çözüme ulaşılmıştır. (6,7 ve 9. maddedeki gibi)
11		Çözümde iç bükey dörtgeni çevreleyen bir çember çizilmiştir. Çevre açıların gördükleri yayların uzunlukları belirlenmiştir. Toplam yayın uzunluğu 360'a eşitlenmiş, çözüme ulaşılmıştır.

Şekil 1. Çoklu yoldan çözülebilen problemin tüm çözümleri

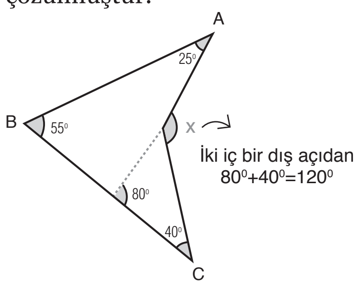
4. Bulgular

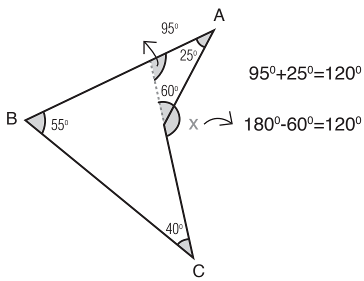
Öğretmen adaylarına çoklu yoldan çözülebilen bir problem verilmiş olup bu problemi çözebildikleri maksimum yoldan çözmeleri istenmiştir. Sonrasında ise bu çözüm metotlarından birini kullanarak bu soru için genelleme yapmaları ve nedeni ile açıklamaları istenmiştir. Elde edilen çözümler iki başlık altında analiz edilmiş ve çözüm metotlarına göre ilgili kategorilere ayrılmıştır.

A-Dörtgenlerde açı soruları - Tercih edilen ana metotlar

Verilen dörtgende istenilen açıya ulaşabilmek için her öğrenci farklı çözüm metotları kullanmıştır. Yapılan çözümlerden bazıları benzerlik gösterse de aynı anda farklı çözüm metotlarına başvurdukları gözlemlenmiştir.

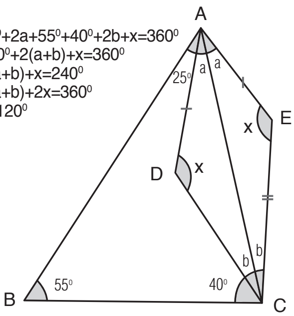
İki iç açı bir dış açıya eşittir: Verilen iç bükey dörtgen üçgenlere parçalanmıştır. Üçgende iki iç açı bir dış açıya eşit olduğu kuralından yola çıkarak çözülmüştür.

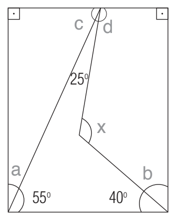




Dörtgene/üçgene tamamlayarak çözüme ulaşılmıştır: Verilen iç bükey dörtgen daha büyük bir dörtgene/üçgene tamamlanmıştır. Dörtgenin ve üçgenin iç açılarının toplamı sırasıyla 360 ve 180 derece olduğu kuralı ile çözüme ulaşılmıştır.

$25^0+2a+55^0+40^0+2b+x=360^0$
$120^0+2(a+b)+x=360^0$
$2(a+b)+x=240^0$
$2(a+b)+2x=360^0$
$x=120^0$



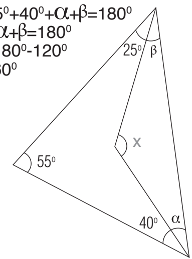


$a=35^0$
$b=50^0$
$c=55^0$
$d=180^0-55^0-25^0$
$d=100^0$

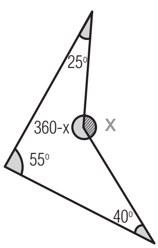
$90^0+x+d+b=360^0$
$90^0+x+100^0+50^0=360^0$
$x=120^0$

$x+\alpha+\beta=60^0$
$x+60^0=180^0$
$x=120^0$

$55^0+25^0+40^0+\alpha+\beta=180^0$
$120^0+\alpha+\beta=180^0$
$\alpha+\beta=180^0-120^0$
$\alpha+\beta=60^0$

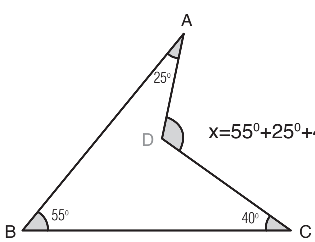


Tam açıya tamamlayarak çözüme ulaşılmıştır: Verilen iç bükey dörtgen üzerinde tam açıya (360 derece) tamamlanmıştır. Dörtgenin iç açıları toplamı dikkate alınarak çözüme ulaşılmıştır.



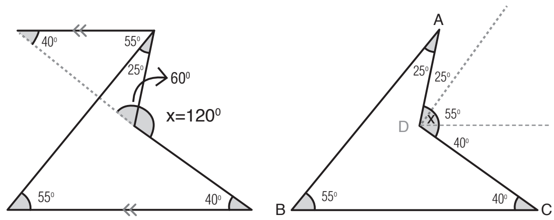
$25^0+55^0+40^0+360^0-x=360^0$
$x=120^0$

Füze kuralı uygulanarak çözüme ulaşılmıştır: Füze kuralı olarak adlandırılan kural kullanılarak çözüme ulaşılmıştır.

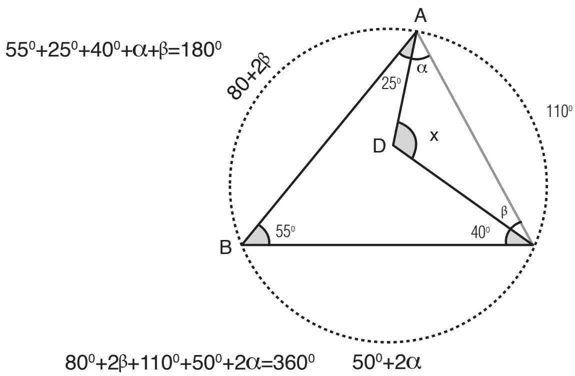


$x=55^0+25^0+40^0=120^0$

Paralel ve yardımcı çizgiler çizilerek çözüme ulaşılmıştır: Verilen iç bükey dörtgen üzerinde paralel ve yardımcı çizgiler çizilerek açılar taşınmış olup çözüme ulaşılmıştır. (İki iç açının toplamı bir dış açıya eşittir araç olarak kullanılmıştır.)



Çembere tamamlayarak çözüme ulaşılmıştır: Verilen iç bükey dörtgeni çevreleyen bir çember çizilmiştir. Açılar ve açıların gördüğü yaylar hesaplanarak çözüme ulaşılmıştır.



Tablo 1'de bu çözümlerin tercih edilme oranları verilmiştir.

Tablo 1. Dörtgende açılar sorusu için tercih edilen metotların oranı

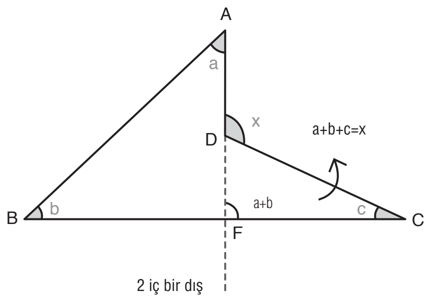
Metot	**Çözüm Sayısı**	**Yaklaşık Yüzdelik**
İki iç açı bir dış açıya eşittir.	75 çözüm	% 42
Dörtgene/üçgene tamamlayarak çözüme ulaşılmıştır.	54 çözüm	% 30
Tam açıya tamamlayarak çözüme ulaşılmıştır.	17 çözüm	% 9
Füze kuralı uygulanarak çözüme ulaşılmıştır.	23 çözüm	% 13
Paralel ve yardımcı çizgiler çizilerek çözüme ulaşılmıştır.	10 çözüm	% 5,5
Çembere tamamlayarak çözüme ulaşılmıştır.	1 çözüm	% 0,5

B-Matematiksel soyutlama evresine geçiş dinamikleri

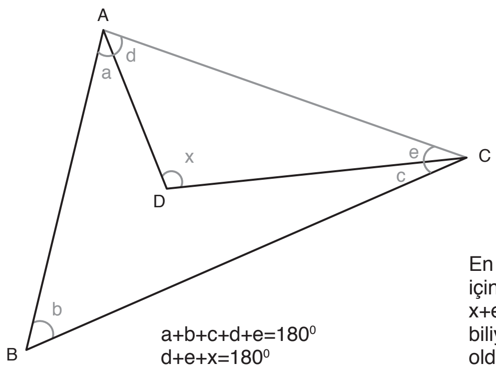
Katılımcıların soruyu hepsi bir ya da daha fazla yoldan çözmelerine rağmen bu çözümlerini soyutlama evresine taşıyamayanlar olmuştur. Öğrencinin bir probleme işlemsel olarak doğru çözümleri yapması onun matematiksel soyutlama evresine geçtiğini göstermez. Matematiksel kavramı derin anlamaktan ziyade yüzeysel anlamış olup, bilgiyi araç olarak kullanmıştır. Yani kavramsal anlama düzeyine ulaşamadığı söylenebilir. Bu bağlamda ilişkilendirme seviyesi zayıf olup örnekler ile genel hali arasındaki bağlantı kurulamamıştır.

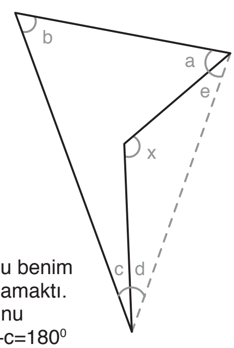
Üçgenlere parçalayarak genellemeye ulaşılmıştır: Verilen dörtgeni küçük üçgenleri parçalayarak genellemeye yapılmıştır. Burada iki iç açının bir dış açıya eşit olduğu belirtilmiştir. Aynı zamanda verilen dörtgende istenilen açının füze kuralı ile ilişkili olduğunu belirtmiştir.

Füze kuralı a+b+c=x yaptığım çözümlerde görüldüğü gibi üç sayının toplamının direkt açıya eşit olduğunu gösteren bir formül ve bu formülün ispatı olarak benim kafamda iki iç açının bir dış açıyı vermesi işleminin iki defa tekrarlanmış halidir. Bu işlemi uygularken yine tüm açıları toplamış oluyoruz.



Büyük üçgene tamamlayarak genellemeye ulaşılmıştır: Verilen dörtgeni büyük üçgene tamamlanmıştır. Açılar alan bilgisi ve üçgenin iç açıları toplamının 180 derece olduğu bilgisi kullanılarak şekil üzerinde genelleme yapılmıştır.

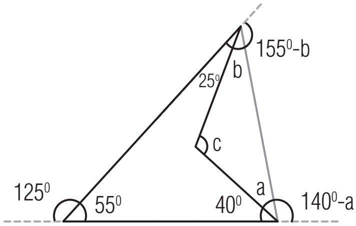




$a+b+c+d+e=180^0$
$d+e+x=180^0$
$d+e=180^0-x$
$a+b+c+180^0-x=180^0$
$a+b+c=x$

En kolay çözüm yolu benim için üçgene tamamlamaktı. $x+e+d=180^0$ olduğunu biliyoruz. $e+d+a+b+c=180^0$ olduğunu da biliyoruz. $x+e+d=e+d+a+b+c$ eşitliğinden yararlanarak $x=a+b+c$ diyebiliriz.

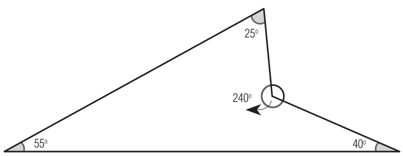
Dörtgenin özellikleri ile genellemeye ulaşılmıştır: Verilen dörtgenin iç açıları toplamından yola çıkılmıştır. İç açıları toplamının 360 derece olduğu bilgisini kullanarak genellemeye gidilmiştir.



Füze kuralını açıklamak gerekirse, şekli dörtgen olarak düşünebiliriz ve dış açıların toplamı 360^0 olacağından;

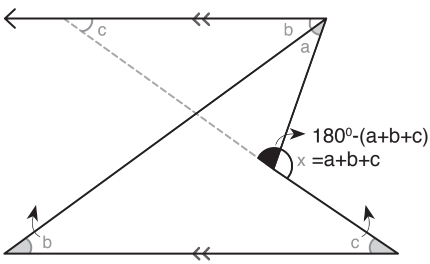
$155^0+140^0+125^0=420^0$
$420^0-a-b=360^0$
$a+b=60^0$
$c=120^0$

Dış açıların toplamını kullanarak buna varabiliriz.

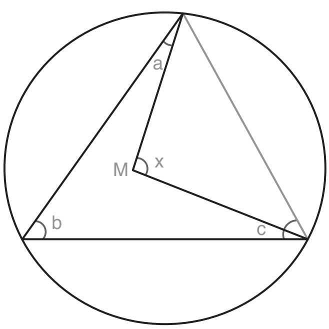


İkinci yöntemde dış açıları bulmak için 360^0'den her açının kendisini çıkarınca dış açıları bulup bunları 1080^0'e eşitledik.
$(360^0-25^0)+(360^0-55^0)+(360^0-40^0)+(x)=1080^0$
$x=25^0+55^0+40^0$
$x=120^0$
x=a+b+c formülünü bulmuş olduk.

Paralel çizgiler yardımıyla genellemeye ulaşılmıştır: Verilen dörtgende çözüme ulaşmak için yardımcı çizgiler çizilmiştir. Açıları taşıyabilmek için paralel çizgiler kullanılmıştır. Sonrasında üçgenlerin iç açılarının toplamı 180 derece olduğu bilgisini kullanarak genellemeye gidilmiştir.



Çember yardımıyla genellemeye ulaşılmıştır: Verilen dörtgeni çevreleyen bir çember çizilmiştir. Çemberin üzerinde bir nokta belirlenmiş ve bu noktanın gördüğü yay uzunluğu üzerinden hesaplama yapılarak genellemeye gidilmiştir.



a+b+c=x

M çemberin merkezi olsun. a, b ve c açılarının gördüğü yayların toplamı x merkez açısının gördüğü yaya eşit olduğundan dolayı a+b+c=x deriz.

Genelleme yapılamamıştır: Sayısal çözüm yaparak sonuca ulaştığı halde aynı çözümü sembolleştirememişlerdir.

Aşağıdaki tabloda (Tablo.2) genelleme için tercih edilen metotların oranları verilmiştir.

Tablo 2. Genelleme için tercih edilen metotların oranı

Metot	Cevap Sayısı	Yaklaşık Yüzdelik
Üçgenlere parçalayarak genellemeye ulaşılmıştır.	25	% 42
Büyük üçgene tamamlayarak genellemeye ulaşılmıştır.	16	% 27
Dörtgene benzeterek genellemeye ulaşılmıştır.	8	% 13
Paralel çizgiler yardımıyla genellemeye ulaşılmıştır.	2	% 3
Çember yardımıyla genellemeye ulaşılmıştır.	1	% 2
Genelleme yapılamamıştır. (Yanıtsız)	8	% 13

Tartışma

Araştırma kapsamında öğretmen adaylarına çoklu yoldan çözülebilen bir problem verilmiş olup bu problemi çözebildikleri maksimum yoldan çözmeleri istenmiştir. Bir geometri problemin çoklu yoldan çözmenin yedi faydası:

1. Farklı bakış açıları kazandırır.
2. Kavramlar arasında ilişkilendirmeyi sağlar.
3. Yaratıcı düşünmeyi geliştirir.
4. Aynı probleme farklı kavramların/konuların uygulanmasını sağlar. (Benzerlik, alan, açı, trigonometri)
5. Farklı pedagojik açıklamaların açığa çıkmasına fırsat verir.
6. Bireysel farklılıkları göz önünde bulundurur.
7. Öğrencilerin Van Hiele geometrik düşünme düzeylerine katkıda bulunur.

Öğretmen adaylarının var olan alan bilgisi her yeni öğrenmede birikerek genişlediği için sonraki öğrenmelerinde kullanabildikleri veri tabanı olduğu söylenebilir. Bunu Tablo 1.de "İki iç açı bir dış açıya eşittir" yolları ile çözüme ulaşan %42 lik bir grubun olduğu gözükmektedir. Bu grup iç bükey dörtgeni üçgene parçalayarak çözülmüştür. Diğer maddeler de üçgen bilgisinde çok farklı değildir. Daha büyük üçgene ya da dörtgene tamamlanması, paralel çizgiler yardımıyla şeklin bölünmesi üçgen alan bilgisinin kullanıldığı metotlardır. Yani soruyu üçgende açı bilgisi ile çözüme ulaştırmıştır.

Öğretmen adaylarının verilen problemi çoklu yoldan çözmeleri istendikten sonra bu yolları vasıtasıyla genellemeye ulaşmaları istenmiştir. Elde edilen veriler doğrultusunda en çok genelleme yapılan yolun, üçgenlere parçalayarak yapılan genelleme olup oranı %42'dir. Sonrasında, büyük üçgene tamamlayarak yapılan genelleme oranı %27; dörtgene benzeterek yapılan genelleme oranı %13; paralel çizgiler yardımıyla yapılan genelleme oranı %3; çember yardımıyla yapılan genelleme oranı %2'dir.

Bütün çözüm yolları ile genelleme yapılabilecekken öğretmen adayları sadece bir çözüm ile genellemeye gitmişlerdir. Bu bir eksikliktir. Sınıf içi uygulamalarında genelleme durumlarının farklı çözüm yolları kullanılarak yapılması gereğini açığa çıkartmıştır. Yani öğretmen genelleme durumuna uygun öğrenme ortamı tasarlarken bireysel farklılıklardan faydalanmalıdır. Tablo 2'de gözüktüğü üzere beş farklı yoldan genellemeye gidilmiştir. Bu beş farklı genellemenin sınıf içindeki yansıması öğretim tasarımını güçlendirecektir. Hem sayısal olarak hesaplama yapılan kısımda hem de genellemeye yapılan kısımda öğrencilerin farklı çözüm yollarını tercih ettikleri gözükmektedir. Her öğrencinin farklı öğrenme stiline, algılama düzeyi, perspektifinin olduğu göz önünde bulundurulmalıdır.

5. Sonuç

Araştırma sonucunda, farklı patikalar ile soyutlama evresine geçiş mümkün olmuştur. Her öğrencinin farklı öğrenme stiline, algılama düzeyi, perspektifinin olduğu ve bunların göz önünde bulundurulmasının gerekliliği kendini bir daha göstermiştir. Çoklu yoldan problem çözmenin matematiksel soyutlamayı zenginleştirme potansiyelinin olduğunu açığa çıkarmıştır.Her farklı yolun aslında soyutlamaya giden bir yol olduğu açığa çıkmıştır. Öğrencilerin ezberlemelerin yerine kavramsal öğrenmelerini desteklediği için neden ve niçinleri ile bağlantı kurmaları sağlanmıştır. Çoklu yoldan problem çözme ve çok problem çözme dengesinin kurulması gerektiği aşikardır.

Çıkar Çatışması Beyanı: Yazarlar herhangi bir çıkar çatışması olmadığını beyan etmektedir.

KAYNAKÇA

Açıl, E. (2015). *Ortaokul 3. sınıf öğrencilerin denklem kavramına yönelik soyutlama süreçlerinin incelenmesi: APOS Teorisi* (Yayın No. 418252) [Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi]

Altun, M. & Arslan, Ç. (2006). İlköğretim öğrencilerinin problem çözme stratejilerini öğrenmeleri üzerine bir çalışma. *Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 19*(1), 1-21.

Arcavi, A., & Schoenfeld, A. H. (2008). Using the unfamiliar to problematize the familiar. *Canadian Journal of Science Mathematics and Technology Education, 8*(3), 280-295. https://doi.org/10.1080/14926150802315122

Arıkan, E. E., & Ünal, H (2012). Farklı profillere sahip öğrencilerle çoklu yoldan problem çözme. *Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi, 1*(2), 76-84.

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktac, A., Roa, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. New York, Heidelberg, Dordrecht, London: Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7966-6

Baker, B., Cooley, L., & Trigueros, M. (2000). A calculus graphing schema. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(5), 557-578. https://doi.org/10.2307/749887

Borji, V., & Martínez-Planell, R. (2020). On students' understanding of implicit differentiation based on APOS theory. *Educational Studies in Mathematics, 105*(2), 163-179. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09991-y

Can, M. (2011). *Matematiksel Soyutlama ve Soyutlamanın İndirgenmesi*. (Yayın No. 297063) [Yüksek Lisans Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi]

Can, M. ve Ünal, H., (2011). *"Ortaöğretim Öğrencilerinin Matematiksel Soyutlaması ve Soyutlamanın İndirgenmesi"*, III. International Congress of Educational Research, 4-7 Mayıs 2011, Girne.

Charles, R. T. & Lester, F. K. (1982). *Teaching problem solving: What, why, how*. Dale Seymour Publications.

Corbin, J. & Strauss, A. (2008). *Basics of qualitative research: Techniques and procedures for developing grounded theory*. Thousand Oaks: Sage. https://doi.org/10.4135/9781452230153

Coşar, Y. (2011). *İlköğretim altıncı sınıf matematik dersi çalışma kitabındaki soruların kapsam geçerlik ve yenilenmiş Bloom taksonomisinin bilişsel süreç boyutuna göre analizi*. (Yayın No. 299733) [Yüksek Lisans Tezi, Atatürk Üniversitesi]

Davydov, V. V. (1990). *Types of Generalization in Instruction: Logical and Psychological Problems in the Structuring of School Curricula. Soviet Studies in Mathematics Education*. National Council of Teachers of Mathematics, 1906 Association Dr., Reston, VA 22091.

Dienes, Z.P., (1961). On abstraction and generalization. *Harward Educational Review, 31*(3), 281-301.

Dienes, Z. P. (1963). *An experimental study of mathematics-learning*. London, England: Hutchinson.

Demir, İ., Kılıç, S. ve Ünal, H. (2010). Effects of students' and schools' characteristics on mathematics achievement: Findings from PISA 2006. *Procedia-Social and Behavioral Sciences, 2*(2), 3099-3103. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2010.03.472

Dreyfus, T. (1991). On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. I, s. 33-48). Assisi, Italy: PME Program Committee.

Dubinsky, E. (1991). Constructive aspects of reflective abstraction in advanced mathematics. *Epistomological Foundations of Mathematical Experience*. (s. 160-187). New York: Springer-Verlag. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3178-3_9

Ekiz, D. (2003). *Eğitimde araştırma y*öntem ve *metodlarına giriş*. Ankara, Anı Yayıncılık.

Liu, H. P. (2003). Do teachers need to incorporate the history of mathematics in their teaching? *Mathematics Teacher, 96*(6), 416-421.

Millî Eğitim Bakanlığı (MEB). (2013). *Ortaokul matematik dersi 5-8.sınıflar öğretim programı*. Ankara: Devlet Kitapları Müdürlüğü.

Millî Eğitim Bakanlığı (MEB). (2018). *Matematik dersi* öğretim *programı (ilkokul ve ortaokul 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8.* sınıflar). Ankara: TTK Başkanlığı

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for the school Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Noss, R., & Hoyles, C. (1996). The visibility of meanings: Modelling the mathematics of banking. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 1*(1), 3-31. https://doi.org/10.1007/bf00191470

Olkun, S. ve Toluk Uçar, Z. (2012). İlköğretimde etkinlik temelli matematik öğretimi. Beşinci Basım. Ankara: Eğiten Kitap.

Özmantar, M. F. (2005). *An investigation of the formation of mathematical abstractions through scaffolding* (Unpublished doctoral dissertation). University of Leeds.

Piaget, J. (2001). *Studies in reflecting abstraction* (Trans. R. L. Campbell). Sussex, England: Psychology Press.

Russell, B. (1926). *Education and the good life*. New York: Liveright.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (2009). Working with schools: The story of a mathematics education collaboration. *American Mathematical Monthly, 116*(3), 197-217. https://doi.org/10.1080/00029890.2009.11920930

Schoenfeld, A. H. (2013). Reflections on problem solving theory and practice. *The Mathematics Enthusiast, 10*(1), 9-34. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1258

Sierpinska, A. (1994). *Understandings in mathematics*. London: Falmer Press.

Skemp, R. (1986). *The physcology of learning mathematics* (2nd Ed.). Harmondsworth: Penguin. https://doi.org/10.2307/3616203

Türk Dil Kurumu. (2023). *Türkçe sözlük*. Ankara: TDK Yayınları.

Wiersma, W. (2000). *Research methods in education: An introduction* (7th Ed.). Needham Heights, MA: Allyn ve Bacon A Pearson Education Company.

Van De Walle, J., Karp, K.S. and Bay-Williams, J.M. (2012). İlkokul ve Ortaokul Matematiği Gelişimsel Yaklaşımla Öğretim (Çev. Ed. S. Durmuş, 7. Basımdan Çeviri). Ankara: Nobel Akademik Yayıncılık.

Yılmaz, R. (2011). *Matematiksel soyutlama ve genelleme süreçlerinde görselleştirme ve rolü* (Yayın No. 279755) [Doktora Tezi, Uludağ Üniversitesi]

Zembat, İ. Ö. (2007). Yansıma dönüşümü, doğrudan öğretim ve yapılandırmacılığın temel bileşenleri. *Gazi Üniversitesi Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi, 27*(1), 195-213.